北京大学 清华大学固体力学丛书 GTLX

非线性连续介质力学

黄克智

清华大学出版社
北京大学出版社

北京大学清华大学固体力学丛书

非线性连续介质力学

黄　克　智



清华大学出版社
北京大学出版社

内 容 简 介

本书系统地阐述了非线性连续介质力学的基本概念和原理，并反映了该学科的新成就。书中同时采用张量的实体(抽象)记法与在一般曲线坐标系中的分量记法，且在变形后的构形中同时采用拉格朗日随体坐标系与欧拉坐标系，易于为读者理解。全书共分九章，内容包括两点张量场，变形几何学，运动学，一般平衡原理，本构理论，简单材料，弹性，热弹性与超弹性，塑性等，并附有习题。

本书可作为力学及有关专业本科生、研究生教材，亦可供教师、科研和工程技术人员参考。

北京大学清华大学固体力学丛书

非线性连续介质力学

黄克智

☆

清华大学出版社
北京大学出版社 出版

北京 清华园

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

☆

开本：850×1168 1/32 印张：15.5 字数：402 千字

1989年4月第1版 1989年4月第1次印刷

印数：0001-3500

ISBN 7-302-00360-2/O·68 定价：3.65 元

说　明

我们共同编辑出版这套丛书，旨在介绍现代固体力学的新近成果，反映国内在固体力学的教学和科研方面的成就。丛书的特点是，在内容上力求达到较高的学术水平；在表述上力求精炼流畅，约相当于一门研究生课程的取材。我们希望这套丛书的出版既能适应我国培养固体力学专业研究生的需要；同时又能成为有关教师和研究工作者在知识更新过程中的益友。我们也期待着广大读者的宝贵意见，以便把这套丛书出得更好。

《北京大学清华大学固体力学丛书》编委会

一九八六年十二月

引　　言

连续介质力学研究物体的宏观力学行为。假设材料由大量的粒子组成，因而无需考虑粒子的物理，可把材料当作连续的（或分段连续的）。

连续介质力学中的规律分成两部分：

1. 运动基本规律。它适用于一切物体，无论是由什么材料构成的。这些规律包括质量守恒，动量平衡，动量矩平衡，能量平衡等。

2. 本构规律，即材料内力与运动的关系。

传统的连续介质力学是在材料给定时求力与运动的联系，即求解边值问题。但是除了解边值问题以外，现代连续介质力学还研究如何建立各类材料的本构方程。这些本构方程以数学的形式体现材料的性质，同时又满足本构方程所要求的某些普遍原理——物质不变性原理。连续介质力学的重要贡献在于建立与发展非线性材料的本构关系。近年来（1945 年以后）非线性材料本构关系的研究有了极大的发展。

连续介质力学并不具体决定本构关系中的材料常数、函数或泛函，它们需由试验来确定，或者由材料科学来预言。

连续介质力学的任务是：

1. 给定本构方程，预言材料的力学行为，即解边值问题；

2. 根据材料定性的性质，提出适合于物质不变性原理的本构方程，因而提出材料常数、函数或泛函的形式。

而材料科学的任务是:

1. 研究宏观力学性质与粒子物理及化学的联系;

2. 设计与制造新材料;

3. 定量地预言材料性质。

由此可见连续介质力学与材料科学是互相补充的。

自从 1845 年 Stokes 最早提出非线性粘性流体本构关系(在笛卡儿坐标中):

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + f_{ij}(D_{kl}), \quad f_{ij}(0) = 0$$

以后,直到 1945 年的一百年间,非线性理论没有得到发展。D. C. Leigh 在其非线性连续介质力学一书中认为原因主要是:

- 线性理论能满足大部分工业技术问题的需要。只是在本世纪初,由于化学工业的发展,具有非线性效应的材料愈益重要,而在 1845 年工业技术对非线性理论还没有需要。

- 1845 年数学物理学所面临的是求解与线性本构关系有关的边值问题。许多问题可以线性化(如小位移弹性力学,位流理论)。需要发展线性偏微分方程的求解方法。

- 后来,在线性本构关系的体系中发展了对工程技术有用的许多分支,例如边界层,湍流,可压缩流动,热传导,化学反应流体,磁流体等,它们都是建立在理想流体或线性粘流体力学的基础上。研究工作被吸引到这些分支上。

- 1945 年左右发展了气体的动力理论,至今物理学家主要对粒子物理感兴趣,而对连续介质物理缺少兴趣。

- 主要关心于创造非线性材料的是化学家与物理化学家,他们对连续介质力学既无兴趣,也不在行。他们过去主要从粒子观点来建立本构关系与解边值问题,他们不知道去满足、甚至也不懂得连续介质物理的原理。

- 非线性理论在本世纪前半叶大量发展,才使得对非线性理论的统一的研究成为可能。如果只有两个古典线性理论——线弹

性固体与线粘性流体，一般的理性的研究就没有什么必要了。

● 最后，采用近世代数的无坐标直接记法有助于避免复杂的坐标，因而能把物理本质看得更清楚。例如，由于不用坐标写法，对标架无差异原理与材料各向同性的区别可以看得更清楚了。

本书将采用作者在另一本书《张量分析》*中所用的符号。

在写作本书过程中主要参考过的书有：

[1] Leigh, D. C., Nonlinear Continuum Mechanics, McGraw-Hill, 1968.

[2] 郭仲衡，非线性弹性理论，科学出版社，1980。

[3] Седов, Л. И., Введение в Механику Сплошной Среды, Физматгиз, Москва, 1962.

[4] Malvern, L. E., Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall, Inc., 1969.

[5] Eringen, A. C., Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill, New York, 1962.

[6] Eringen, A. C., Mechanics of Continua, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.

本书承张晓堤同志提出宝贵意见并协助整理与校稿工作，在此表示感谢。

---

* 《张量分析》黄克智等著 清华大学出版社 1986年出版

目　　录

第一章　两点张量场

§ 1.1　两点张量场、偏梯度

一、定义

设在三维欧氏空间中有两个区域，例如一物体在变形前与变形后所占的区域 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{r}$。有时我们也称 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{r}$ 为变形前与变形后的构形。

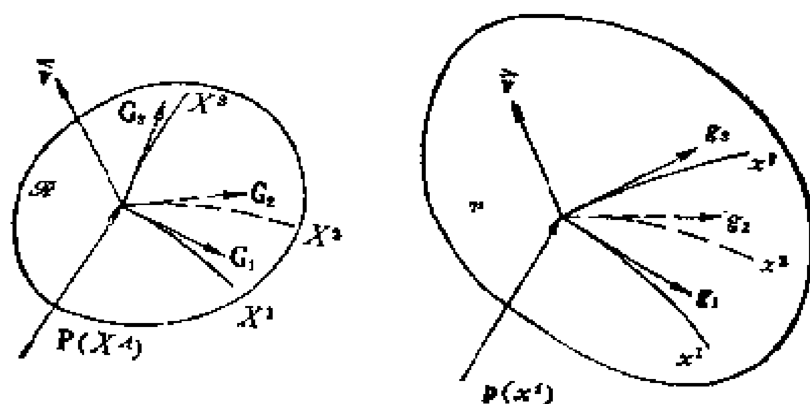


图　1.1

用大写字母表示对应于构形 $\mathscr{R}$ 的量，例如坐标 $\{X^A\}$，矢径 $\mathbf{P}(X^A)$，基矢量 $\mathbf{G}_A(X^K)$，$\mathbf{G}^B(X^K)$，度量张量 $G_{AB}(X^K)$，$G^{AB}(X^K)$ 等。

用小写字母表示对应于构形 $\mathscr{r}$ 的量，例如坐标 $\{x^i\}$，矢径 $\mathbf{p}(x^i)$，基矢量 $\mathbf{g}_i(x^k)$，$\mathbf{g}^j(x^k)$，度量张量 $g_{ij}(x^k)$，$g^{ij}(x^k)$ 等。

张量的并矢式中含有属于不同构形中的矢量时，则称张量为两点张量。例如

$$\overset{\rangle\langle}{\mathbf{T}} = T_{iA}\mathbf{g}^i\mathbf{G}^A = T^{iA}\mathbf{g}_i\mathbf{G}_A = T^i_{\cdot A}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A = T_i^{\cdot A}\mathbf{g}^i\mathbf{G}_A \quad (1.1.1)$$

$$\overset{\langle\rangle}{\mathbf{S}} = S_{Ai}\mathbf{G}^A\mathbf{g}^i = S^{Ai}\mathbf{G}_A\mathbf{g}_i = S^A_{\cdot i}\mathbf{G}_A\mathbf{g}^i = S_A^{\cdot i}\mathbf{G}^A\mathbf{g}_i \quad (1.1.2)$$

式中分量 $T_{iA},\cdots,S_{Ai},\cdots$ 等都是坐标 X^K 与 x^k 的函数，基矢量 $\mathbf{G}_A$ 和 $\mathbf{G}^A$ 是坐标 X^K 的函数，$\mathbf{g}_i$ 和 $\mathbf{g}^i$ 是坐标 x^k 的函数。分量之间满足指标升降关系

$$T_{iA} = g_{ij}T^j_{\cdot A} = g_{ij}G_{AB}T^{jB} = \cdots \quad (1.1.3)$$

$$S_{Ai} = G_{AB}S^B_{\cdot i} = G_{AB}g_{ij}S^{Bj} = \cdots \quad (1.1.4)$$

当坐标转换（$X^A \to X^{A'}$ 及 $x^i \to x^{i'}$）时，分量服从张量的坐标转换关系，例如

$$\begin{aligned}\overset{\rangle\langle}{\mathbf{T}} &= T_{iA}\mathbf{g}^i\mathbf{G}^A = \cdots \\ &= T_{i'A'}\mathbf{g}^{i'}\mathbf{G}^{A'} = \cdots\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}T_{i'A'} &= \beta^j_{i'}\beta^B_{A'}T_{jB},\cdots \\ T_{i'A} &= \beta^j_{i'}T_{jA},\cdots\end{aligned} \quad (1.1.5)$$

式中 $\beta^j_{i'}$ 等为转换系数。在二阶张量 $\mathbf{T}$ 的上面，用记号“$\rangle\langle$”表示张量的“两点”性质，前(即左)矢量属于构形 $\mathscr{r}$(用右半括弧“$\rangle$”表示)，而后(即右)矢量属于构形 $\mathscr{R}$(用左半括弧“$\langle$”表示)。与此类似，在二阶张量 $\mathbf{S}$ 上面，用记号“$\langle\rangle$”表示其两点性质。与两点张量相对照，凡并矢的矢量在同一构形中的张量，可称为一点张量。两点张量与一点张量都可简称为张量。

高阶的两点张量，为简单起见，一律在它上面用记号“$\langle\cdot\rangle$”表示其两点性。例如

$$\overset{\langle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}} = \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B\mathbf{G}^C\mathbf{G}^D\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l \quad (1.1.6)$$

式中分量是坐标 X^K 与 x^k 的函数。

在构形 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{r}$ 中的矢径微分分别为

$$d\mathbf{P}=\mathbf{G}_A dX^A,\quad d\mathbf{p}=\mathbf{g}_i dx^i \tag{1.1.7}$$

定义偏梯度为

$$\overset{(\,(\cdot)}{\nabla\boldsymbol{\varphi}}=\mathbf{G}^M\frac{\partial\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial X^M}\bigg|_{X^{K\neq M},x^r},\quad \overset{(\cdot)\,(}{\boldsymbol{\varphi}\nabla}=\frac{\partial\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial X^M}\bigg|_{X^{K\neq M},x^r}\mathbf{G}^M \tag{1.1.8a}$$

$$\overset{)\,(\cdot)}{\nabla\boldsymbol{\varphi}}=\mathbf{g}^m\frac{\partial\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial x^m}\bigg|_{X^K,x^{r\neq m}},\quad \overset{(\cdot)\,)}{\boldsymbol{\varphi}\nabla}=\frac{\partial\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial x^m}\bigg|_{X^K,x^{r\neq m}}\mathbf{g}^m \tag{1.1.8b}$$

(1.1.8a) 式中偏导数后面的记号“$X^{K\neq M}$, x^r”表示在求导时只变化X^M，而其他的 $X^K(K\neq M)$ 和一切的 x^r 都保持不变，同样 (1.1.8b) 式中偏导数后面的记号“X^K, $x^{r\neq m}$”表示一切的 X^K 和除 x^m 以外的其他 x^r 都保持不变。以后对坐标的偏导数都按此意义理解。在本节(§ 1.1)中我们假定 X^A 与 x^i 是两组互相独立的自变量(坐标)，暂不考虑它们之间的联系，等到下节 (§ 1.2) 中再去考虑。由(1.1.8)式可得$\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$的微分：

$$\begin{aligned}d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}&=d\mathbf{P}\cdot\overset{(\,(\cdot)}{\nabla\boldsymbol{\varphi}}+d\mathbf{p}\cdot\overset{)\,(\cdot)}{\nabla\boldsymbol{\varphi}}\\&=(\overset{(\cdot)\,(}{\boldsymbol{\varphi}\nabla})\cdot d\mathbf{P}+(\overset{(\cdot)\,)}{\boldsymbol{\varphi}\nabla})\cdot d\mathbf{p}\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

偏梯度按基矢量的分解式为

$$\begin{aligned}\overset{(\,(\cdot)}{\nabla\boldsymbol{\varphi}}&=\nabla_M\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}\mathbf{G}^M\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B\mathbf{G}^C\mathbf{G}^D\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l\\ \overset{(\cdot)\,(}{\boldsymbol{\varphi}\nabla}&=\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl;M}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B\mathbf{G}^C\mathbf{G}^D\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l\mathbf{G}^M\end{aligned} \tag{1.1.10a}$$

式中右端的分量称为 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的分量对于 X^M 的偏协变导数：

$$\begin{aligned}\nabla_M\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}&=\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl;M}\\&=\frac{\partial}{\partial X^M}\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}+\varphi^{NB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}\Gamma^A_{MN}\\&\quad+\varphi^{AN\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}\Gamma^B_{MN}-\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot ND\cdot\cdot kl}\Gamma^N_{MC}-\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CN\cdot\cdot kl}\Gamma^N_{MD}\end{aligned} \tag{1.1.10b}$$

及

$$\overset{\rangle(\cdot)}{\nabla\boldsymbol{\varphi}} = \nabla_m\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}\mathbf{g}^m\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B\mathbf{G}^C\mathbf{G}^D\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l$$

$$\overset{(\cdot)\rangle}{\boldsymbol{\varphi}\nabla} = \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl;m}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B\mathbf{G}^C\mathbf{G}^D\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l\mathbf{g}^m \tag{1.1.11a}$$

式中右端的分量称为 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的分量对于 x^m 的偏协变导数:

$$\begin{aligned}\nabla_m\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl} &= \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl;m}\\ &= \frac{\partial}{\partial x^m}\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl} + \varphi^{AB\cdot\cdot sj}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}\Gamma^i_{ms}\\ &\quad + \varphi^{AB\cdot\cdot is}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}\Gamma^j_{ms} - \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot sl}\Gamma^s_{mk} - \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot ks}\Gamma^s_{ml}\end{aligned} \tag{1.1.11b}$$

以后我们用记号“∂”或“,”表示偏导数:

$$\partial_M(\quad) = (\quad)_{,M} = \frac{\partial}{\partial X^M}(\quad)\big|_{X^{K\neq M},x^r}$$

$$\partial_m(\quad) = (\quad)_{,m} = \frac{\partial}{\partial x^m}(\quad)\big|_{X^K,x^{r\neq m}}$$

在构形 $\mathscr{R}$ 中的度量张量为

$$\begin{aligned}\overset{\langle\langle}{\mathbf{I}} &= G_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B = G^{AB}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B = \delta^B_A\mathbf{G}^A\mathbf{G}_B = \delta^A_B\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B\\ &= \mathbf{G}^A\mathbf{G}_A = \mathbf{G}_A\mathbf{G}^A\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

式中 $\mathbf{I}$ 上面的记号“$\langle\langle$”表示前、后矢量都在构形 $\mathscr{R}$ 中，故 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{I}}$ 为 $\mathscr{R}$ 中的张量。在构形 $\mathscr{r}$ 中的度量张量为

$$\begin{aligned}\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}} &= g_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j = g^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j = \delta^j_i\,\mathbf{g}^i\mathbf{g}_j = \delta^i_j\,\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j\\ &= \mathbf{g}^i\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i\mathbf{g}^i\end{aligned} \tag{1.1.13}$$

式中 $\mathbf{I}$ 上面的记号“$\rangle\rangle$”表示 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}}$ 为 $\mathscr{r}$ 中的张量。

二、矢量的平移、转移张量

设在构形 $\mathscr{R}$ 的 X^A 点处有一矢量 $\overset{\langle}{\mathbf{v}}$，在构形 $\mathscr{r}$ 的 x^i 点处有一矢量 $\overset{\rangle}{\mathbf{v}}$。此两矢量 $\overset{\langle}{\mathbf{v}}$ 与 $\overset{\rangle}{\mathbf{v}}$ 的大小相等，方向平行，即一者为另一

者经过平移的结果(图 1.1)。它们沿各自的基矢量分解式为

$$\begin{aligned}\overset{(}{\mathbf{v}} &= v^A\mathbf{G}_A = v_A\mathbf{G}^A \\ \overset{)}{\mathbf{v}} &= v^i\mathbf{g}_i = v_i\mathbf{g}^i\end{aligned} \tag{1.1.14}$$

为了要研究 v^A 或 v_A 与 v^i 或 v_i 间的关系，首先要研究基矢量 $\mathbf{G}_A$ 或 $\mathbf{G}^A$ 与 $\mathbf{g}_i$ 或 $\mathbf{g}^i$ 的关系。设构形 $\mathscr{r}$ 中的基矢量通过构形 $\mathscr{R}$ 中基矢量的表达式为

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_i &= g_i^{\cdot A}\mathbf{G}_A = g_{iA}\mathbf{G}^A \\ \mathbf{g}^i &= g^{iA}\mathbf{G}_A = g^i_{\cdot A}\mathbf{G}^A\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

式中的四组系数 $g_{\cdots}$ 之间满足指标升降关系。而构形 $\mathscr{R}$ 中的基矢量通过构形 $\mathscr{r}$ 中的基矢量表达式则为

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_A &= g_A^{\cdot i}\mathbf{g}_i = g_{Ai}\mathbf{g}^i \\ \mathbf{G}^A &= g^{Ai}\mathbf{g}_i = g^A_{\cdot i}\mathbf{g}^i\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

式中的四组系数 $g_{\cdots}$ 之间也满足指标升降关系。

(1.1.15)与(1.1.16)式中的系数 $g_{\cdots}$ 均称为转移系数。显然，

$$\begin{aligned}g_{iA} &= \mathbf{g}_i\cdot\mathbf{G}_A = \mathbf{G}_A\cdot\mathbf{g}_i = g_{Ai} \\ g^{iA} &= \mathbf{g}^i\cdot\mathbf{G}^A = \mathbf{G}^A\cdot\mathbf{g}^i = g^{Ai} \\ g_i^{\cdot A} &= \mathbf{g}_i\cdot\mathbf{G}^A = \mathbf{G}^A\cdot\mathbf{g}_i = g^A_{\cdot i} = g_i^A \\ g^i_{\cdot A} &= \mathbf{g}^i\cdot\mathbf{G}_A = \mathbf{G}_A\cdot\mathbf{g}^i = g_A^{\cdot i} = g_A^i\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

因此转移系数对于其两个指标是对称的，指标的前后顺序可以对换。

可以证明 $\|g_i^A\|$ 与 $\|g_B^i\|$ 互为逆矩阵，即

$$g_i^A g_B^i = \delta_B^A, \quad g_A^i g_j^A = \delta_j^i \tag{1.1.18}$$

证明过程如下：将(1.1.16)式代入以下等式

$$\mathbf{G}^A\cdot\mathbf{G}_B = \delta_B^A$$

得

$$g_i^A\mathbf{g}^i\cdot g_B^j\mathbf{g}_j = \delta_B^A$$

故

$$g_i^A g_B^i = \delta_B^A$$

即(1.1.18)之第一式。同理,将(1.1.15)式代入等式

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i$$

可得(1.1.18)之第二式。

两个互逆矩阵的行列式互为倒数,故

$$|g_i^A||g_B^i| = 1 \tag{1.1.19}$$

其实,这两个行列式的值可以通过 $\sqrt{g}$ 与 $\sqrt{G}$ 的比值表示,这里 G 与 g 各表示构形 $\mathscr{R}$ 与构形 $\mathscr{r}$ 的度量张量 G_{AB} 与 g_{ij} 的行列式。设坐标系恒取为右手系,则

$$\begin{aligned}\sqrt{g} &= [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] = [g_1^A\mathbf{G}_A, g_2^B\mathbf{G}_B, g_3^C\mathbf{G}_C] \\ &= g_1^A g_2^B g_3^C[\mathbf{G}_A, \mathbf{G}_B, \mathbf{G}_C] \\ &= g_1^A g_2^B g_3^C \sqrt{G}\, e_{ABC} = \sqrt{G}\, |g_i^A|\end{aligned}$$

故

$$|g_i^A| = \sqrt{\frac{g}{G}} \tag{1.1.20a}$$

同理可证

$$|g_A^i| = \sqrt{\frac{G}{g}} \tag{1.1.20b}$$

将(1.1.13)式度量张量 $\overset{\times}{\mathbf{I}}$ 中的后矢量从构形 $\mathscr{r}$ 中平移至构形 $\mathscr{R}$ 中,得到

$$\overset{\times}{\mathbf{I}} = \mathbf{g}^i(g_i^A\mathbf{G}_A) = \mathbf{g}^i(g_{iA}\mathbf{G}^A) = \mathbf{g}_i(g^{iA}\mathbf{G}_A) = \mathbf{g}_i(g^i_A\mathbf{G}^A)$$

由此

$$\overset{\times}{\mathbf{I}} = g_{iA}\mathbf{g}^i\mathbf{G}^A = g^{iA}\mathbf{g}_i\mathbf{G}_A = g^i_A\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A = g_i^A\mathbf{g}^i\mathbf{G}_A \tag{1.1.21}$$

若将(1.1.12)式度量张量 $\overset{\times}{\mathbf{I}}$ 中的前矢量从构形 $\mathscr{R}$ 中平移至构形 $\mathscr{r}$ 中,也同样得到(1.1.21)式。同理,从(1.1.12)式经过后矢量的平移,或从(1.1.13)式经过前矢量的平移,可得到

$$\overset{()}{\mathbf{I}} = g_{Ai}\mathbf{G}^A\mathbf{g}^i = g^{Ai}\mathbf{G}_A\mathbf{g}_i = g_i^{\,A}\mathbf{G}_A\mathbf{g}^i = g^i_{\,A}\mathbf{G}^A\mathbf{g}_i \tag{1.1.22}$$

$\overset{)(}{\mathbf{I}}$ 与 $\overset{()}{\mathbf{I}}$ 称为转移张量，它们是度量张量经过前矢量或后矢量平移的结果，均为两点张量，转移张量的分量就是转移系数。

我们知道，度量张量与任何矢量进行点积的结果就是该矢量自身，即在构形 $\mathscr{R}$ 与 r 中各有

$$\begin{aligned} \overset{((}{\mathbf{I}}\cdot\overset{(}{\mathbf{v}} = \overset{(}{\mathbf{v}}\cdot\overset{((}{\mathbf{I}} = \overset{(}{\mathbf{v}} \\ \overset{))}{\mathbf{I}}\cdot\overset{)}{\mathbf{v}} = \overset{)}{\mathbf{v}}\cdot\overset{))}{\mathbf{I}} = \overset{)}{\mathbf{v}} \end{aligned} \tag{1.1.23}$$

现在我们来看转移张量与矢量进行点积的结果。为此，先看转移张量与基矢量的点积。由(1.1.21)与(1.1.22)式可得

$$\begin{aligned} \overset{()}{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{g}_k = \mathbf{g}_k\cdot\overset{)(}{\mathbf{I}} = g_k^{\,A}\mathbf{G}_A = g_{kA}\mathbf{G}^A \\ \overset{()}{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{g}^k = \mathbf{g}^k\cdot\overset{)(}{\mathbf{I}} = g^k_{\,A}\mathbf{G}^A = g^{kA}\mathbf{G}_A \end{aligned} \tag{1.1.15$'$}$$

及

$$\begin{aligned} \overset{)(}{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{G}_B = \mathbf{G}_B\cdot\overset{()}{\mathbf{I}} = g^i_{\,B}\mathbf{g}_i = g_{iB}\mathbf{g}^i \\ \overset{)(}{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{G}^B = \mathbf{G}^B\cdot\overset{()}{\mathbf{I}} = g_i^{\,B}\mathbf{g}^i = g^{iB}\mathbf{g}_i \end{aligned} \tag{1.1.16$'$}$$

由(1.1.15)′式，“$\overset{()}{\mathbf{I}}\cdot$” 或 “$\cdot\overset{)(}{\mathbf{I}}$” 运算的结果，相当于把构形 r 中的基矢量平移到构形 $\mathscr{R}$ 中来，而由(1.1.16)′式，“$\overset{)(}{\mathbf{I}}\cdot$” 或 “$\cdot\overset{()}{\mathbf{I}}$” 的运算结果，相当于把构形 $\mathscr{R}$ 中的基矢量平移到构形 r 中来。因此，对于任意的矢量 $\mathbf{v}$，我们也有

$$\overset{()}{\mathbf{I}}\cdot\overset{)}{\mathbf{v}} = \overset{)}{\mathbf{v}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{I}} = \overset{(}{\mathbf{v}} \quad (r \to \mathscr{R}) \tag{1.1.24a}$$

这表示把矢量 $\mathbf{v}$ 从构形 r 中平移到构形 $\mathscr{R}$ 中，而

$$\overset{)(}{\mathbf{I}}\cdot\overset{(}{\mathbf{v}} = \overset{(}{\mathbf{v}}\cdot\overset{()}{\mathbf{I}} = \overset{)}{\mathbf{v}} \quad (\mathscr{R} \to r) \tag{1.1.24b}$$

这表示把矢量从构形 $\mathscr{R}$ 中平移到构形 r 中。正因为如此，$\overset{()}{\mathbf{I}}$ 与 $\overset{)(}{\mathbf{I}}$称为转移张量。(1.1.24)称为矢量平移公式。有时，人们往往把

与转移张量进行点积这个运算省去不写，那么(1.1.24)式就成为，

$$\overset{\rangle}{\mathbf{v}} = \overset{\langle}{\mathbf{v}} \tag{1.1.24$'$}$$

这个式子表达的意思就是式两端的矢量大小相等、方向相同，经过平移以后完全一致。今后我们也允许象(1.1.24)$'$式的写法。事实上，上面的(1.1.15)$'$与(1.1.16)$'$式中若省去转移张量点积不写，恰好就是我们早已承认了的(1.1.15)与(1.1.16)式。

将式(1.1.14)代入(1.1.24)式，并利用(1.1.15)$'$与(1.1.16)$'$式，可得到矢量平移前后的分量间的关系：

$$\begin{aligned} v^A &= g^A_i v^i, \quad v_A = g^i_A v_i \\ v^i &= g^i_A v^A, \quad v_i = g^A_i v_A \end{aligned} \tag{1.1.25}$$

更简便一些，若承认(1.1.24)$'$式，则将(1.1.14)式代入后，并利用(1.1.15)与(1.1.16)式，也同样得到(1.1.25)式。(1.1.25)的各式中右端的一对哑指标 i 或 A 显然可以升降。(1.1.25)式称为矢量平移公式的分量形式。

三、张量的平移

张量可表示为并矢形式，其中的矢量可以部分地或全部地进行平移。例如在构形 $\mathscr{R}$ 中的二阶张量

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{B}} = B_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B$$

经过部分的或全部的平移后，得到

$$\begin{aligned} \overset{\rangle\langle}{\mathbf{B}} &= \overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{B}} = (g^M_i \mathbf{g}^i \mathbf{G}_M) \cdot (B_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B) = g^M_i B_{MB}\mathbf{g}^i\mathbf{G}^B \\ &= B_{iB}\mathbf{g}^i\mathbf{G}^B \\ \overset{\langle\rangle}{\mathbf{B}} &= \overset{\langle\langle}{\mathbf{B}} \cdot \overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} = B_{AM} g^M_i \mathbf{G}^A \mathbf{g}^i = B_{Ai}\mathbf{G}^A\mathbf{g}^i \\ \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{B}} &= \overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{B}} \cdot \overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} = g^M_i g^N_j B_{MN}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j = B_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j \end{aligned} \tag{1.1.26a}$$

式中

$$B_{iB} = g^M_i B_{MB}, \quad B_{Ai} = g^M_i B_{AM}, \quad B_{ij} = g^M_i g^N_j B_{MN} \tag{1.1.26b}$$

这里 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{B}}$ 为构形 $\mathscr{R}$ 中的张量，$\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{B}}$为构形 $\mathscr{r}$ 中的张景，$\overset{\rangle\langle}{\mathbf{B}}$ 与 $\overset{\langle\rangle}{\mathbf{B}}$ 均为两点张量。同样，由 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{B}}=B_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j$ 经过部分的或全部的平移以后，得到

$$\begin{aligned}
\overset{\langle\rangle}{\mathbf{B}}&=\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}\cdot\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{B}}=B_{Aj}\mathbf{G}^A\mathbf{g}^j\\
\overset{\rangle\langle}{\mathbf{B}}&=\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{B}}\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}=B_{iA}\mathbf{g}^i\mathbf{G}^A\\
\overset{\langle\langle}{\mathbf{B}}&=\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}\cdot\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{B}}\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}=B_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B
\end{aligned}\tag{1.1.27a}$$

式中

$$B_{Aj}=g^r_A B_{rj},\quad B_{iA}=g^r_A B_{ir},\quad B_{AB}=g^r_A g^s_B B_{rs}\tag{1.1.27b}$$

(1.1.25)式以及 (1.1.26b) 与 (1.1.27b) 式说明在两个构形 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{r}$ 间的指标升降(即大写与小写字母指标间的升降)是靠转移系数来实现的。

转移张量 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}$ 与 $\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}$ 是度量张量部分平移的结果。显然，度量张量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{I}}$ 或 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}}$ 的前矢量或后矢量经过往返的两次平移以后，仍旧还原。因此

$$\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}=\overset{\langle\langle}{\mathbf{I}},\quad \overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}\cdot\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}=\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}}\tag{1.1.28}$$

将(1.1.21)与(1.1.22)式代入后，就得到(1.1.28)式的分量形式

$$g_i^A g_B^i=\delta^A_B,\quad g^i_A g^A_j=\delta^i_j$$

这也就是前面的(1.1.18)式。此外，两个张量经过平移后的点积，和平移前它们的点积是相同的，即平移不改变点积，例如

$$\begin{aligned}
\overset{\langle\rangle}{\mathbf{A}}\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{B}}&=(\overset{\langle\langle}{\mathbf{A}}\cdot\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}})\cdot(\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{B}})=\overset{\langle\langle}{\mathbf{A}}\cdot\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{B}}=\overset{\langle\langle}{\mathbf{A}}\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{I}}\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{B}}\\
&=\overset{\langle\langle}{\mathbf{A}}\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{B}}
\end{aligned}$$

高阶的张量也可进行平移，例如假定在构形 $\mathscr{R}$ 中的张量（以上标记号“$\langle\cdot\langle$”表示）

$$\overset{\langle\cdot\langle}{\boldsymbol{\varphi}}=\varphi^{AB}_{\cdot\cdot CD}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B\mathbf{G}^C\mathbf{G}^D$$

与在构形 κ 中的张量(以上标记号"⟩·⟩"表示)

$$\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}} = \varphi^{ij}_{\cdot\cdot kl}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l$$

是相互平移的关系,记作

$$\begin{aligned}\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}} &= \overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}\,\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}\,\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}\,\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} \vdots \overset{\langle\cdot\langle}{\boldsymbol{\varphi}} \\ \overset{\langle\cdot\langle}{\boldsymbol{\varphi}} &= \overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}\,\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}\,\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}\,\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} \vdots \overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}\end{aligned} \tag{1.1.29a}$$

其分量形式为

$$\begin{aligned}\varphi^{ij}_{\cdot\cdot kl} &= g^i_A g^j_B g^C_k g^D_l \varphi^{AB}_{\cdot\cdot CD} \\ \varphi^{AB}_{\cdot\cdot CD} &= g^A_i g^B_j g^k_C g^l_D \varphi^{ij}_{\cdot\cdot kl}\end{aligned} \tag{1.1.29b}$$

四、转移张量的偏梯度为零

在张量分析中已经知道,度量张量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{I}}$ 与 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}}$ 为常张量,其梯度为零,即

$$\begin{aligned}&\overset{\langle\langle}{\mathbf{I}}\overset{\langle}{\nabla} = \overset{\langle}{\nabla}\overset{\langle\langle}{\mathbf{I}} = \mathbf{0}, \quad G_{AB;C} = \nabla_C G_{AB} = 0 \\ &\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}}\overset{\rangle}{\nabla} = \overset{\rangle}{\nabla}\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}} = \mathbf{0}, \quad g_{ij;k} = \nabla_k g_{ij} = 0\end{aligned} \tag{1.1.30}$$

可以证明转移张量的偏梯度为零,即

$$\begin{aligned}&\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}\overset{\langle}{\nabla} = \overset{\langle}{\nabla}\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} = \mathbf{0}, \quad g^i_{A;K} = \nabla_K g^i_A = 0 \\ &\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}\overset{\rangle}{\nabla} = \overset{\rangle}{\nabla}\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} = \mathbf{0}, \quad g^i_{A;j} = \nabla_j g^i_A = 0 \\ &\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}\overset{\langle}{\nabla} = \overset{\langle}{\nabla}\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} = \mathbf{0}, \quad g^A_{i;K} = \nabla_K g^A_i = 0 \\ &\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}\overset{\rangle}{\nabla} = \overset{\rangle}{\nabla}\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} = \mathbf{0}, \quad g^A_{i;j} = \nabla_j g^A_i = 0\end{aligned} \tag{1.1.31}$$

例如证 $\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}\overset{\rangle}{\nabla} = \mathbf{0}$: 由

$$\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} = g^i_A \mathbf{G}^A \mathbf{g}_i$$

$$\overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}}\overset{\rangle}{\nabla} = (g^i_A \mathbf{G}^A \mathbf{g}_i)_{,j}\mathbf{g}^j = g^i_{A;j}\mathbf{G}^A\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j$$

式中

$$g^j_{A;i} = (g^j_A)_{,i} + g^r_A \Gamma^j_{ir}$$
$$= (\mathbf{g}^j \cdot \mathbf{G}_A)_{,i} + g^r_A \Gamma^j_{ir} = -\Gamma^j_{ir}\mathbf{g}^r \cdot \mathbf{G}_A + g^r_A \Gamma^j_{ir} = 0$$

因此 $\overset{()}{\mathbf{I}}\overset{)}{\nabla} = \mathbf{0}$。在上式的计算中，对 x_i 求偏导数时，$\mathbf{G}_A$ 是构形 $\mathscr{R}$ 中的矢量（只依赖于 X^K），故保持不变。同理可证(1.1.31)中的其他各式。由(1.1.31)式可知，转移张量和度量张量一样，在进行 $\overset{(}{\nabla}$ 或 ∇ 运算时表现为恒量，可以移出于算符之外。

§1.2 全 梯 度

在 §1.1 中，假定 X^A 与 x^i 是互相独立的自变量，因而构形 $\mathscr{R}$ 中的矢径 $\mathbf{p}(X^A)$ 与构形 $\mathscr{r}$ 中的矢径 $\mathbf{p}(x^i)$ 是互相独立地变化的。现在考虑在 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{p}$ 之间存在着一一对应的关系（例如 $\mathbf{P}$ 代表物体变形前某质点的矢径，$\mathbf{p}$ 代表变形后该质点的矢径），即 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{p}$ 互为函数：

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{P}), \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{p}) \tag{1.2.1}$$

由于 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{p}$ 各由坐标 X^A 与 x^i 决定，故上式相当于坐标 X^A 与 x^i 互为函数：

$$x^i = x^i(X^A), \quad X^A = X^A(x^i) \tag{1.2.2}$$

一、矢径的梯度

由张量分析，矢径的梯度就是度量张量①，因此在构形 $\mathscr{R}$ 中与构形 $\mathscr{r}$ 中分别得到

$$\overset{(}{\nabla}\mathbf{P} = \mathbf{P}\overset{(}{\nabla} = \overset{((}{\mathbf{I}} \tag{1.2.3}$$

$$\overset{)}{\nabla}\mathbf{p} = \mathbf{p}\overset{)}{\nabla} = \overset{))}{\mathbf{I}} \tag{1.2.4}$$

---

① 参阅黄克智等著《张量分析》的(7.3.18)式，清华大学出版社。

现在我们把 $\mathbf{p}$ 理解为 $\mathbf{P}$ 的函数 $\mathbf{p}(\mathbf{P})$（见(1.2.1)的第一式），在构形 $\mathscr{R}$ 中考察，得到 $\mathbf{p}$ 的梯度①

$$
\begin{aligned}
\overleftarrow{\nabla}\mathbf{p} &= \overleftarrow{\nabla}\mathbf{p}(\mathbf{P}) = \mathbf{G}^A \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{P})}{\partial X^A} = \mathbf{G}^A \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial X^A} \\
&= \partial_A x^i \mathbf{G}^A \mathbf{g}_i \\
\mathbf{p}\overleftarrow{\nabla} &= \mathbf{p}(\mathbf{P})\overleftarrow{\nabla} = \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{P})}{\partial X^A}\mathbf{G}^A = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial X^A}\mathbf{G}^A \\
&= x^i_{,A}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A
\end{aligned}
\tag{1.2.5}
$$

式中

$$
\partial_A x^i = x^i_{,A} = \frac{\partial x^i}{\partial X^A}
$$

$\overleftarrow{\nabla}\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{p}\overleftarrow{\nabla}$ 互为转置。同理把 $\mathbf{P}$ 理解为 $\mathbf{p}$ 的函数 $\mathbf{P}(\mathbf{p})$（见(1.2.1)的第二式），在构形 $\mathscr{r}$ 中考察，得到 $\mathbf{P}$ 的梯度②

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}\mathbf{P} &= \overrightarrow{\nabla}\mathbf{P}(\mathbf{p}) = \mathbf{g}^i \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{p})}{\partial x^i} = \mathbf{g}^i \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^A}\frac{\partial X^A}{\partial x^i} = \partial_i X^A \mathbf{g}^i \mathbf{G}_A \\
\mathbf{P}\overrightarrow{\nabla} &= \mathbf{P}(\mathbf{p})\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{p})}{\partial x^i}\mathbf{g}^i = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^A}\frac{\partial X^A}{\partial x^i}\mathbf{g}^i = X^A_{,i}\mathbf{G}_A\mathbf{g}^i
\end{aligned}
\tag{1.2.6}
$$

式中

$$
\partial_i X^A = X^A_{,i} = \frac{\partial X^A}{\partial x^i}
$$

$\overrightarrow{\nabla}\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{P}\overrightarrow{\nabla}$ 互为转置。可以看出，(1.2.5)与(1.2.6)式的 $\overleftarrow{\nabla}\mathbf{p}$，$\mathbf{p}\overleftarrow{\nabla}$ 与 $\overrightarrow{\nabla}\mathbf{P}$，$\mathbf{P}\overrightarrow{\nabla}$ 都是两点张量场，它们的分量转换规律也说明这一

---

① 按照后文中（本节第二段）全梯度的概念，这里(1.2.5)式中的 $\overleftarrow{\nabla}\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{p}\overleftarrow{\nabla}$ 应各记作 $\overleftarrow{\Box}\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{p}\overleftarrow{\Box}$，见后 (1.2.51a) 式，

② 按照后文中（本节第二段）全梯度的概念，这里(1.2.6)式中的 $\overrightarrow{\nabla}\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{P}\overrightarrow{\nabla}$ 应各记作 $\overrightarrow{\Box}\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{P}\overrightarrow{\Box}$，见后 (1.2.50b) 式

点，即

$$x^{i'}_{,A'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial X^{A'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}} \frac{\partial x^{j}}{\partial X^{B}} \frac{\partial X^{B}}{\partial X^{A'}} = \beta^{i'}_{j} \beta^{B}_{A'} x^{j}_{,B}$$

$$X^{A'}_{,i'} = \frac{\partial X^{A'}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial X^{A'}}{\partial X^{B}} \frac{\partial X^{B}}{\partial x^{j}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}} = \beta^{A'}_{B} \beta^{j}_{i'} X^{B}_{,j}$$

利用矢径的梯度可以计算矢径的微分。若在$\mathscr{R}$中考察$\mathbf{p}(\mathbf{P})$，由于自变量微分 $d\mathbf{P}$ 引起的 $d\mathbf{p}$ 为

$$d\mathbf{p} = d\mathbf{p}(\mathbf{P}) = (\mathbf{p}\overleftarrow{\nabla}) \cdot d\mathbf{P} = d\mathbf{P} \cdot (\overleftarrow{\nabla}\mathbf{p}) \tag{1.2.7}$$

其展开形式为[利用(1.2.5)式]

$$\mathbf{g}_i dx^i = (x^i_{,A}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A) \cdot d\mathbf{P} = x^i_{,A}\mathbf{g}_i dX^A$$

即

$$dx^i = x^i_{,A} dX^A$$

同理，在$\mathscr{r}$中考察 $\mathbf{P}(\mathbf{p})$，由于自变量微分 $d\mathbf{p}$ 引起的 $d\mathbf{P}$ 为

$$d\mathbf{P} = d\mathbf{P}(\mathbf{p}) = (\mathbf{P}\overrightarrow{\nabla}) \cdot d\mathbf{p} = d\mathbf{p} \cdot (\overrightarrow{\nabla}\mathbf{P}) \tag{1.2.8}$$

其展开形式为[利用(1.2.6)式]

$$\mathbf{G}_A dX^A = (X^A_{,i}\mathbf{G}_A\mathbf{g}^i) \cdot d\mathbf{p} = X^A_{,i}\mathbf{G}_A dx^i$$

即

$$dX^A = X^A_{,i} dx^i$$

在矢径的梯度 $\overrightarrow{\nabla}\mathbf{P}$ 与 $\overleftarrow{\nabla}\mathbf{p}$ 之间存在着关系。由 (1.2.7) 与 (1.2.8)式，即

$$d\mathbf{p} = d\mathbf{P} \cdot (\overleftarrow{\nabla}\mathbf{p}), \quad d\mathbf{P} = d\mathbf{p} \cdot (\overrightarrow{\nabla}\mathbf{P})$$

将此两式相互代入，得

$$d\mathbf{p} = d\mathbf{p} \cdot (\overrightarrow{\nabla}\mathbf{P}) \cdot (\overleftarrow{\nabla}\mathbf{p}), \quad d\mathbf{P} = d\mathbf{P} \cdot (\overleftarrow{\nabla}\mathbf{p}) \cdot (\overrightarrow{\nabla}\mathbf{P})$$

由此得

$$(\overrightarrow{\nabla}\mathbf{P}) \cdot (\overleftarrow{\nabla}\mathbf{p}) = \overset{\rightrightarrows}{\mathbf{I}}, \quad (\overleftarrow{\nabla}\mathbf{p}) \cdot (\overrightarrow{\nabla}\mathbf{P}) = \overset{\leftleftarrows}{\mathbf{I}} \tag{1.2.9a}$$

其分量形式为

$$(\partial_i X^A)(\partial_A x^j) = \delta_i^j, \quad (\partial_A x^i)(\partial_i X^B) = \delta_A^B \tag{1.2.9b}$$

同理，由(1.2.7)与(1.28)式，即

$$d\mathbf{p} = (\mathbf{p}\overset{\langle}{\nabla}) \cdot d\mathbf{P}, \quad d\mathbf{P} = (\mathbf{P}\overset{\rangle}{\nabla}) \cdot d\mathbf{p}$$

相互代入，得

$$d\mathbf{p} = (\mathbf{p}\overset{\langle}{\nabla}) \cdot (\mathbf{P}\overset{\rangle}{\nabla}) \cdot d\mathbf{p}, \quad d\mathbf{P} = (\mathbf{P}\overset{\rangle}{\nabla}) \cdot (\mathbf{p}\overset{\langle}{\nabla}) \cdot d\mathbf{P}$$

故

$$(\mathbf{p}\overset{\langle}{\nabla}) \cdot (\mathbf{P}\overset{\rangle}{\nabla}) = \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}}, \quad (\mathbf{P}\overset{\rangle}{\nabla}) \cdot (\mathbf{p}\overset{\langle}{\nabla}) = \overset{\langle\langle}{\mathbf{I}} \tag{1.2.10a}$$

其分量形式为

$$x^i_{,A} X^A_{,j} = \delta^i_j, \quad X^A_{,i} x^i_{,B} = \delta^A_B \tag{1.2.10b}$$

习题 1.1 利用并矢式（1.2.5）与（1.2.6）验证（1.2.9a）与（1.2.10a）式。

二、张量的全梯度

由张量分析知，在构形 $\mathscr{R}$ 中张量 $\overset{(\cdot\langle}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的梯度为

$$\overset{(\cdot\langle\,\langle}{\boldsymbol{\varphi}\nabla} = \frac{\partial \overset{(\cdot\langle}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial X^A}\mathbf{G}^A, \quad \overset{\langle\,(\cdot\langle}{\nabla\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{G}^A \frac{\partial \overset{(\cdot\langle}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial X^A} \tag{1.2.11}$$

同样，在构形 $\boldsymbol{r}$ 中张量 $\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的梯度为

$$\overset{\rangle\cdot\rangle\,\rangle}{\boldsymbol{\varphi}\nabla} = \frac{\partial \overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial x^i}\mathbf{g}^i, \quad \overset{\rangle\,\rangle\cdot\rangle}{\nabla\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{g}^i \frac{\partial \overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial x^i} \tag{1.2.12}$$

现在来研究两点张量 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$，例如(1.1.6)式

$$\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} = \varphi^{AB\cdots ij}_{\cdot\cdot CD\cdots kl}(X^K, x^r)\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B\mathbf{G}^C\mathbf{G}^D(X^K)\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l(x^r) \tag{1.1.6}$$

$\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的微分已见(1.1.9)式，即

$$\begin{aligned} d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} &= d\mathbf{P} \cdot (\overset{\langle\,(\cdot)}{\nabla\boldsymbol{\varphi}}) + d\mathbf{p} \cdot (\overset{\rangle\,(\cdot)}{\nabla\boldsymbol{\varphi}}) \\ &= (\overset{(\cdot)\,\langle}{\boldsymbol{\varphi}\nabla}) \cdot d\mathbf{P} + (\overset{(\cdot)\,\rangle}{\boldsymbol{\varphi}\nabla}) \cdot d\mathbf{p} \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

式中运算符号 $\overset{\leftarrow}{\nabla}$ 与 $\overset{\rightarrow}{\nabla}$ 的含义见(1.1.10)与(1.1.11)式。

在本节(§1.2)中 $d\mathbf{P}$ 与 $d\mathbf{p}$ 存在着如(1.2.7)与(1.2.8)式的关系。将(1.2.7)代入(1.1.9)式，即在构形 $\mathscr{R}$ 中以 $\mathbf{P}(X^A)$ 为自变量来考察 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$，得

$$
\begin{aligned}
d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} &= d\mathbf{P}\cdot(\overset{\leftarrow}{\nabla}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} + (\overset{\leftarrow}{\nabla}\mathbf{p})\cdot(\overset{\rightarrow}{\nabla}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}})) = d\mathbf{P}\cdot\overset{\leftarrow}{\square}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} \\
&= (\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\leftarrow}{\nabla} + (\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\rightarrow}{\nabla})\cdot(\mathbf{p}\overset{\leftarrow}{\nabla}))\cdot d\mathbf{P} = \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\leftarrow}{\square}\cdot d\mathbf{P}
\end{aligned}
\tag{1.2.13}
$$

式中 $\overset{\leftarrow}{\square}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 与 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\leftarrow}{\square}$ 称为 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 在构形 $\mathscr{R}$ 中的全梯度：

$$
\begin{aligned}
\overset{\leftarrow}{\square}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} &= \overset{\leftarrow}{\nabla}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} + (\overset{\leftarrow}{\nabla}\mathbf{p})\cdot(\overset{\rightarrow}{\nabla}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}) \\
\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\leftarrow}{\square} &= \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\leftarrow}{\nabla} + (\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\rightarrow}{\nabla})\cdot(\mathbf{p}\overset{\leftarrow}{\nabla})
\end{aligned}
\tag{1.2.14}
$$

其分量形式为

$$
\begin{aligned}
\square_M\varphi^{AB\cdots ij}_{\cdots CD\cdots kl} &= \nabla_M\varphi^{AB\cdots ij}_{\cdots CD\cdots kl} + (\partial_M x^m)\nabla_m\varphi^{AB\cdots ij}_{\cdots CD\cdots kl} \\
\varphi^{AB\cdots ij}_{\cdots CD\cdots kl:M} &= \varphi^{AB\cdots ij}_{\cdots CD\cdots kl;M} + \varphi^{AB\cdots ij}_{\cdots CD\cdots kl;m}x^m_{,M}
\end{aligned}
\tag{1.2.15}
$$

此式左端称为 $\varphi^{AB\cdots ij}_{\cdots CD\cdots kl}$ 对 X^M 的全协变导数，以“$\square_M$”或冒号“$:M$”表示。这里，在梯度一词与协变导数一词之前加一“全”字表示已考虑了在构形 $\mathscr{r}$ 中的坐标 x^r 与基矢量 $\mathbf{g}_r$，$\mathbf{g}^r$ 为构形 $\mathscr{R}$ 中坐标 X^M 的函数。

同理，将(1.2.8)代入(1.1.9)式，即在构形 $\mathscr{r}$ 中以 $\mathbf{p}(x^i)$ 为自变量来考察 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$，得

$$
\begin{aligned}
d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} &= d\mathbf{p}\cdot((\overset{\rightarrow}{\nabla}\mathbf{P})\cdot(\overset{\leftarrow}{\nabla}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}) + \overset{\rightarrow}{\nabla}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}) = d\mathbf{p}\cdot(\overset{\rightarrow}{\square}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}) \\
&= ((\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\leftarrow}{\nabla})\cdot(\mathbf{P}\overset{\rightarrow}{\nabla}) + \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\rightarrow}{\nabla})\cdot d\mathbf{p} = (\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\rightarrow}{\square})\cdot d\mathbf{p}
\end{aligned}
\tag{1.2.16}
$$

式中 $\overset{\rightarrow}{\square}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 与 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\rightarrow}{\square}$ 称为 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 在构形 $\mathscr{r}$ 中的全梯度：

$$
\begin{aligned}
\overset{\rightarrow}{\square}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} &= (\overset{\rightarrow}{\nabla}\mathbf{P})\cdot(\overset{\leftarrow}{\nabla}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}) + \overset{\rightarrow}{\nabla}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} \\
\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\rightarrow}{\square} &= (\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\leftarrow}{\nabla})\cdot(\mathbf{P}\overset{\rightarrow}{\nabla}) + \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\rightarrow}{\nabla}
\end{aligned}
\tag{1.2.17}
$$

其分量形式为

$$\begin{aligned}\square_m \varphi^{AB\cdots ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl} &= (\partial_m X^M)\nabla_M \varphi^{AB\cdots ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl} + \nabla_m \varphi^{AB\cdots ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl} \\ \varphi^{AB\cdots ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl;m} &= \varphi^{AB\cdots ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl;M} X^M_{,m} + \varphi^{AB\cdots ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl;m}\end{aligned} \tag{1.2.18}$$

此式左端称为 $\varphi^{AB\cdots ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}$ 对 x^m 的全协变导数，以“$\square_m$”与冒号“$:m$”表示。同样这里的“全”字表示已考虑了在构形 $\mathscr{R}$ 中的坐标 X^M 与基矢量 $\mathbf{G}_M$, $\mathbf{G}^M$ 为构形 $\mathscr{r}$ 中坐标 x^m 的函数。

现在我们来进一步讨论全梯度的意义。引进“全偏导数”记号①：

$$\frac{d(\ldots)}{dX^M} = \frac{\partial(\ldots)}{\partial X^M} + (\partial_M x^m)\frac{\partial(\ldots)}{\partial x^m} \tag{1.2.19}$$

全偏导数的含义是：在对 X^M 求全偏导数时，已经考虑了 $x^m(m=1,2,3)$ 是 $X^M(M=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})$ 的函数，而只把 $X^K(K\neq M)$ 看作不变。同理，也可引进记号：

$$\frac{d(\ldots)}{dx^m} = \frac{\partial(\ldots)}{\partial x^m} + (\partial_m X^M)\frac{\partial(\ldots)}{\partial X^M} \tag{1.2.20}$$

这里，在对 x^m 求全偏导数时，已经考虑了 $X^M(M=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})$ 是 $x^m(m=1,2,3)$ 的函数，而只把 $x^r(r\neq m)$ 看作不变。

由(1.2.13)式，$\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 在构形 $\mathscr{R}$ 中的全梯度实际上就是

$$\overset{(}{\square}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{G}^M\frac{d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{dX^M}, \quad \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{(}{\square} = \frac{d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{dX^M}\mathbf{G}^M \tag{1.2.21}$$

而由(1.2.16)式，$\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 在构形 $\mathscr{r}$ 中的全梯度实际上就是

$$\overset{)}{\square}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{g}^m\frac{d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{dx^m} \quad \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{)}{\square} = \frac{d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{dx^m}\mathbf{g}^m \tag{1.2.22}$$

利用张量分析中张量对坐标求导的公式，由(1.1.6)式，得

---

① 在微分学中，只有一元函数导数才用 $d(\ldots)/d(\ldots)$ 的记号；这里 $d(\cdots)/dX^M$ 记号中的$(\ldots)$是 X^{I}, X^{II}, X^{III} 的三元函数。

$$\frac{\partial \overset{(*)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial X^M} = \nabla_M \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl} \mathbf{G}_A \mathbf{G}_B \mathbf{G}^C \mathbf{G}^D (X^K) \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \mathbf{g}^k \mathbf{g}^l (x^r)$$

$$\frac{\partial \overset{(*)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial x^m} = \nabla_m \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl} \mathbf{G}_A \mathbf{G}_B \mathbf{G}^C \mathbf{G}^D (X^K) \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \mathbf{g}^k \mathbf{g}^l (x^r) \tag{1.2.23}$$

式中右端的分量的表达式已见于 (1.1.10b) 与 (1.1.11b)。利用 (1.2.19) 与(1.2.23)，可得到 (1.2.21) 的分量形式如前述(1.2.15)；同样，利用 (1.2.20) 与 (1.2.23)，可得到 (1.2.22) 的分量形式如前述(1.2.18)。

必须指出，当构形 $\mathscr{R}$ 的矢径 $\mathbf{P}(X^A)$ 与构形 $\mathscr{r}$ 的矢径 $\mathbf{p}(x^i)$ 之间存在着一一对应的关系，因而坐标 X^A 与 x^i 互为函数如(1.2.2)式时，出现于 (1.1.10b) 与 (1.1.11b) 式中的偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial X^m} \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl} \quad 与 \quad \frac{\partial}{\partial x^m} \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl} \tag{1.2.24}$$

的值取决于演算的方式。例如在

$$\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}(X^K, x^r) \tag{1.2.25}$$

中，如果利用(1.2.2)的第一式，将 $x^r = x^r(X^K)$ 代入，重新整理后得到

$$\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}(X^K) = \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}(X^K, x^r(X^K)) \tag{1.2.26}$$

则有

$$\frac{\partial}{\partial X^M} \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}(X^K) = \frac{d}{dX^M} \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}(X^K, x^r)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^m} \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}(X^K) = 0 \tag{1.2.27}$$

但如果利用(1.2.2)的第二式，将 $X^K = X^K(x^r)$ 代入(1.2.25)，重新整理后得到

$$\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}(x^r) = \varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}(X^K(x^r), x^r) \tag{1.2.28}$$

则有

$$\frac{\partial}{\partial X^M}\varphi^{AB\cdots ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}(x^r)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\varphi^{AB\cdots ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}(x^r)=\frac{d}{dx^m}\varphi^{AB\cdots ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}(X^K,x^r) \tag{1.2.29}$$

利用上述两种不同的演算方式所得的偏导数(1.2.27)与(1.2.29)是不同的，因而代入(1.2.15)右端中的偏协变导数也是不同的，但是最后所得(1.2.15)左端即 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的分量对于 X^M 的全协变导数却是相同的。同样，利用上述两种不同的演算方式所得(1.2.18)左端即 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的分量对于 x^m 的全协变导数也是相同的。

三、在构形 $\mathscr{R}$ 中与在构形 $\mathscr{r}$ 中全梯度之间的关系

比较(1.2.13)与(1.2.16)，得

$$d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}=d\mathbf{P}\cdot(\overset{(}{\Box}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}})=d\mathbf{p}\cdot(\overset{)}{\Box}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}})$$
$$=(\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{(}{\Box})\cdot d\mathbf{P}=(\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{)}{\Box})\cdot d\mathbf{p}$$

将(1.2.7)式代入上式，得

$$d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}=d\mathbf{P}\cdot(\overset{(}{\Box}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}})=d\mathbf{P}\cdot(\overset{(}{\nabla}\mathbf{p})\cdot(\overset{)}{\Box}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}})$$
$$=(\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{(}{\Box})\cdot d\mathbf{P}=(\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{)}{\Box})\cdot(\mathbf{p}\overset{(}{\nabla})\cdot d\mathbf{P}$$

故

$$\overset{(}{\Box}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}=(\overset{(}{\nabla}\mathbf{p})\cdot(\overset{)}{\Box}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}})$$
$$\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{(}{\Box}=(\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{)}{\Box})\cdot(\mathbf{p}\overset{(}{\nabla}) \tag{1.2.30}$$

其分量形式为

$$\Box_M\varphi^{AB\cdots ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}=(\partial_M x^m)\Box_m\varphi^{AB\cdots ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}$$
$$\varphi^{AB\cdots ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl;M}=\varphi^{AB\cdots ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl;m}x^m_{,M} \tag{1.2.31}$$

同理利用(1.2.8)式，则可得

$$d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}=d\mathbf{p}\cdot(\overset{)}{\nabla}\mathbf{P})\cdot(\overset{(}{\Box}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}})=d\mathbf{p}\cdot(\overset{)}{\Box}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}})$$
$$=(\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{(}{\Box})\cdot(\mathbf{P}\overset{)}{\nabla})\cdot d\mathbf{p}=(\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{)}{\Box})\cdot d\mathbf{p}$$

故

$$(\overset{\succ}{\nabla}\mathbf{P})\cdot(\overset{\prec\prec\cdot\succ}{\square\boldsymbol{\varphi}})=\overset{\succ\prec\cdot\succ}{\square\boldsymbol{\varphi}}$$

$$(\overset{\prec\cdot\succ\prec}{\boldsymbol{\varphi}\square})\cdot(\mathbf{P}\overset{\succ}{\nabla})=\overset{\prec\cdot\succ\succ}{\boldsymbol{\varphi}\square}\tag{1.2.32}$$

①

其分量形式为

$$(\partial_m X^M)\square_M\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}=\square_m\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl}$$

$$\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl:M}X^M_{,m}=\varphi^{AB\cdot\cdot ij}_{\cdot\cdot CD\cdot\cdot kl;m}\tag{1.2.33}$$

特例，对于构形 $\mathscr{R}$ 中的张量 $\overset{\prec\cdot\prec}{\boldsymbol{\varphi}}$，例如

$$\overset{\prec\cdot\prec}{\boldsymbol{\varphi}}=\varphi^{AB}_{\cdot\cdot CD}(X^K)\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B\mathbf{G}^C\mathbf{G}^D$$

(1.2.14)与(1.2.17)式简化为

$$\overset{\prec\prec\cdot\prec}{\square\boldsymbol{\varphi}}=\overset{\prec\prec\cdot\prec}{\nabla\boldsymbol{\varphi}},\quad\overset{\prec\cdot\prec\prec}{\boldsymbol{\varphi}\square}=\overset{\prec\cdot\prec\prec}{\boldsymbol{\varphi}\nabla}$$

$$\overset{\succ\prec\cdot\prec}{\square\boldsymbol{\varphi}}=(\overset{\succ}{\nabla}\mathbf{P})\cdot(\overset{\prec\prec\cdot\prec}{\nabla\boldsymbol{\varphi}}),\quad\overset{\prec\cdot\prec\succ}{\boldsymbol{\varphi}\square}=(\overset{\prec\cdot\prec\prec}{\boldsymbol{\varphi}\nabla})\cdot(\mathbf{P}\overset{\succ}{\nabla})\tag{1.2.34}$$

其分量形式为

$$\square_M\varphi^{AB}_{\cdot\cdot CD}=\nabla_M\varphi^{AB}_{\cdot\cdot CD}=\varphi^{AB}_{\cdot\cdot CD:M}=\varphi^{AB}_{\cdot\cdot CD;M}$$

$$\square_m\varphi^{AB}_{\cdot\cdot CD}=(\partial_m X^M)\nabla_M\varphi^{AB}_{\cdot\cdot CD}=\varphi^{AB}_{\cdot\cdot CD;m}=\varphi^{AB}_{\cdot\cdot CD;M}X^M_{,m}\tag{1.2.35}$$

同样，对于构形 $\boldsymbol{r}$ 中的张量 $\overset{\succ\cdot\succ}{\boldsymbol{\phi}}$，例如

$$\overset{\succ\cdot\succ}{\boldsymbol{\phi}}=\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}(x^r)\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l$$

(1.2.17)与(1.2.14)式简化为

$$\overset{\succ\succ\cdot\succ}{\square\boldsymbol{\phi}}=\overset{\succ\succ\cdot\succ}{\nabla\boldsymbol{\phi}},\quad\overset{\succ\cdot\succ\succ}{\boldsymbol{\phi}\square}=\overset{\succ\cdot\succ\succ}{\boldsymbol{\phi}\nabla}$$

$$\overset{\prec\succ\cdot\succ}{\square\boldsymbol{\phi}}=(\overset{\prec}{\nabla}\mathbf{p})\cdot(\overset{\succ\succ\cdot\succ}{\nabla\boldsymbol{\phi}}),\quad\overset{\succ\cdot\succ\prec}{\boldsymbol{\phi}\square}=(\overset{\succ\cdot\succ\succ}{\boldsymbol{\phi}\nabla})\cdot(\mathbf{p}\overset{\prec}{\nabla})\tag{1.2.36}$$

其分量形式为

$$\square_m\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}=\nabla_m\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}=\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl:m}=\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl;m}$$

$$\square_M\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}=(\partial_M x^m)\nabla_m\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}=\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl:M}=\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl;m}x^m_{,M}\tag{1.2.37}$$

---

① 请读者注意，不要错误地使用转移张量，写出象 $\overset{\succ\prec}{\mathbf{I}}\cdot(\overset{\prec\prec\cdot\succ}{\square\boldsymbol{\varphi}})=\overset{\succ\prec\cdot\succ}{\square\boldsymbol{\varphi}}$ 这样的错误等式。

习题 1.2 利用分量等式(1.2.15)与(1.2.18)式验证(1.2.31)与(1.2.33)式。

四、转移张量的全梯度

由(1.1.30)式，度量张量的梯度为零。因此，由（1.2.34）与(1.2.36)式，度量张量的全梯度也为零：

$$\overset{(}{\square}\overset{((}{\mathbf{I}} = \overset{(}{\nabla}\overset{((}{\mathbf{I}} = \overset{((}{\mathbf{I}}\overset{(}{\square} = \overset{((}{\mathbf{I}}\overset{(}{\nabla} = 0$$

$$\overset{)}{\square}\overset{((}{\mathbf{I}} = \overset{((}{\mathbf{I}}\overset{)}{\square} = 0$$

$$\overset{)}{\square}\overset{))}{\mathbf{I}} = \overset{)}{\nabla}\overset{))}{\mathbf{I}} = \overset{))}{\mathbf{I}}\overset{)}{\square} = \overset{))}{\mathbf{I}}\overset{)}{\nabla} = 0$$

$$\overset{(}{\square}\overset{))}{\mathbf{I}} = \overset{))}{\mathbf{I}}\overset{(}{\square} = 0 \tag{1.2.38}$$

$$\square_C G_{AB} = \nabla_C G_{AB} = G_{AB;C} = G_{AB:C} = 0$$

$$\square_k G_{AB} = G_{AB;k} = 0$$

$$\square_k g_{ij} = \nabla_k g_{ij} = g_{ij;k} = g_{ij:k} = 0$$

$$\square_C g_{ij} = g_{ij;C} = 0$$

可以证明转移张量的全梯度亦为零：

$$
\begin{aligned}
&\overset{(}{\square}\overset{()}{\mathbf{I}} = \overset{()}{\mathbf{I}}\overset{(}{\square} = 0, \quad \square_M g^{i}_{A} = g^{i}_{A:M} = 0\\
&\overset{)}{\square}\overset{()}{\mathbf{I}} = \overset{()}{\mathbf{I}}\overset{)}{\square} = 0, \quad \square_j g^{i}_{A} = g^{i}_{A;j} = 0\\
&\overset{(}{\square}\overset{)(}{\mathbf{I}} = \overset{)(}{\mathbf{I}}\overset{(}{\square} = 0, \quad \square_M g^{A}_{i} = g^{A}_{i:M} = 0\\
&\overset{)}{\square}\overset{)(}{\mathbf{I}} = \overset{)(}{\mathbf{I}}\overset{)}{\square} = 0, \quad \square_j g^{A}_{i} = g^{A}_{i;j} = 0
\end{aligned} \tag{1.2.39}
$$

这是很容易证明的：因为由(1.1.31)式转移张量的偏梯度均为零，故利用全梯度公式(1.2.14)与(1.2.17)，即得上述(1.2.39)式。事实上，转移张量只是度量张量经过前矢量或后矢量平移的结果，作为一个二阶张量的实体，仍是一个常张量。

例 1 设 $\overset{)(}{\boldsymbol{\varphi}}$ 为两点张量：

$$\overset{)(}{\boldsymbol{\varphi}} = \varphi^{i}_{\cdot B}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^B$$

经过前矢量的平移后，得到

$$\overset{((}{\boldsymbol{\varphi}} = \overset{()}{\mathbf{I}}\cdot\overset{)(}{\boldsymbol{\varphi}} = g^A_i\varphi^i_{\cdot B}\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B = \varphi^A_{\cdot B}\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B$$

式中

$$\varphi^A_{\cdot B} = g^A_i\varphi^i_{\cdot B}$$

求证

$$\overset{()}{\mathbf{I}}\cdot(\overset{)(}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{(}{\square}) = \overset{((}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{(}{\nabla}) \tag{1.2.40}$$

证 由于转移张量 $\overset{()}{\mathbf{I}}$ 的全梯度为零，故

$$\overset{()}{\mathbf{I}}\cdot(\overset{)(}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{(}{\square}) = (\overset{()}{\mathbf{I}}\cdot\overset{)(}{\boldsymbol{\varphi}})\overset{(}{\square} = \overset{((}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{(}{\square}$$

再利用(1.2.34)式，即可得(1.2.40)式。(1.2.40)式的分量形式为

$$g^A_i\varphi^i_{\cdot B;C} = \varphi^A_{\cdot B;C} \tag{1.2.41}$$

例 2　设 $\overset{)}{\mathbf{u}}$ 为在构形 $\mathscr{r}$ 中之矢量，平移至构形 $\mathscr{R}$ 中后成为

$$\overset{(}{\mathbf{u}} = \overset{()}{\mathbf{I}}\cdot\overset{)}{\mathbf{u}}$$

求证

$$\overset{()}{\mathbf{I}}\cdot(\overset{)}{\mathbf{u}}\overset{)}{\nabla}) = \overset{(}{\mathbf{u}}\overset{)}{\square}$$

证 因为 $\overset{)}{\mathbf{u}}\overset{)}{\nabla}$ 为构形 $\mathscr{r}$ 中的张量，故由(1.2.34)式

$$\overset{)}{\mathbf{u}}\overset{)}{\nabla} = \overset{)}{\mathbf{u}}\overset{)}{\square}$$

又因为转移张量 $\overset{()}{\mathbf{I}}$ 的全梯度为零，故得：

$$\overset{()}{\mathbf{I}}\cdot(\overset{)}{\mathbf{u}}\overset{)}{\nabla}) = \overset{()}{\mathbf{I}}\cdot(\overset{)}{\mathbf{u}}\overset{)}{\square}) = (\overset{()}{\mathbf{I}}\cdot\overset{)}{\mathbf{u}})\overset{)}{\square} = \overset{(}{\mathbf{u}}\overset{)}{\square}$$

最后指出几点：

(1) 要注意坐标与矢量分量的区别。 X^A 与 x^i 各为构形 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{r}$ 中的坐标，它们都不是矢量的逆变分量。 但是坐标的微分 dX^A 与 dx^i 则不同；由(1.1.7)式，dX^A 是构形 $\mathscr{R}$ 中矢量 $d\mathbf{P}$ 的逆变分量，而 dx^i 则是构形 $\mathscr{r}$ 中矢量 $d\mathbf{p}$ 的逆变分量。 在构形 $\mathscr{R}$ 中

进行坐标转换 $X^A \longleftrightarrow X^{B'}$ 时，dX^A 与 $dX^{B'}$ 之间服从矢量逆变分量的坐标转换规律：

$$dX^{B'} = \frac{\partial X^{B'}}{\partial X^A} dX^A, \quad dX^A = \frac{\partial X^A}{dX^{B'}} dX^{B'}$$

同样，在构形 $\mathscr{r}$ 中进行坐标转换 $x^i \longleftrightarrow x^{i'}$ 时，dx^i 与 $dx^{i'}$ 之间服从矢量逆变分量的坐标转换规律：

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i, \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'}$$

（2）在张量分析中我们已经知道矢量分量对于坐标的偏导数并不构成张量的分量；而对于坐标的协变导数才构成张量的分量。例如设有构形 $\mathscr{R}$ 中的矢量 $\mathbf{U}$ 与构形 $\mathscr{r}$ 中的矢量 $\mathbf{u}$：

$$\mathbf{U} = U^A(X^M)\mathbf{G}_A(X^M) \tag{1.2.42}$$

$$\mathbf{u} = u^i(x^r)\mathbf{g}_i(x^r) \tag{1.2.43}$$

则它们的偏梯度为

$$\overset{(}{\nabla}\mathbf{U} = \nabla_A U^B \mathbf{G}^A \mathbf{G}_B, \quad \mathbf{U}\overset{(}{\nabla} = U^A_{;B}\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B \tag{1.2.44a}$$

$$\overset{)}{\nabla}\mathbf{U} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{U}\overset{)}{\nabla} = \mathbf{0} \tag{1.2.44b}$$

及

$$\overset{(}{\nabla}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{u}\overset{)}{\nabla} = \mathbf{0} \tag{1.2.45a}$$

$$\overset{)}{\nabla}\mathbf{u} = \nabla_i u^j \mathbf{g}^i \mathbf{g}_j, \qquad \mathbf{u}\overset{)}{\nabla} = u^i_{;j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j \tag{1.2.45b}$$

如果在矢径 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{p}$ 之间存在函数关系（1.2.1），因而在坐标 X^A 与 x^i 之间存在函数关系(1.2.2)，则由(1.2.14)与(1.2.17)式，$\mathbf{U}$ 的全梯度为

$$\overset{(}{\square}\mathbf{U} = \overset{(}{\nabla}\mathbf{U}, \qquad \mathbf{U}\overset{(}{\square} = \mathbf{U}\overset{(}{\nabla} \tag{1.2.46a}$$

$$\overset{)}{\square}\mathbf{U} = (\overset{)}{\nabla}\mathbf{P}) \cdot (\overset{(}{\nabla}\mathbf{U}), \quad \mathbf{U}\overset{)}{\square} = (\mathbf{U}\overset{(}{\nabla}) \cdot (\mathbf{P}\nabla) \tag{1.2.46b}$$

其分量形式为

$$\square_A U^B = \nabla_A U^B, \quad U^A_{;B} = U^A_{;B} \tag{1.2.46a$'$}$$

$$\square_i U^A = (\partial_i X^M)\nabla_M U^A, \quad U^A_{;i} = U^A_{;M} X^M_{;i} \qquad (1.2.46b)'$$

而 $\mathbf{u}$ 的全梯度为

$$\overleftarrow{\square}\mathbf{u} = (\overleftarrow{\nabla}\mathbf{p})\cdot(\overrightarrow{\nabla}\mathbf{u}), \quad \mathbf{u}\overleftarrow{\square} = (\mathbf{u}\overrightarrow{\nabla})\cdot(\mathbf{p}\overleftarrow{\nabla}) \qquad (1.2.47a)$$

$$\overrightarrow{\square}\mathbf{u} = \overrightarrow{\nabla}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{u}\overrightarrow{\square} = \mathbf{u}\overrightarrow{\nabla} \qquad (1.2.47b)$$

其分量形式为

$$\square_A u^i = (\partial_A x^m)\nabla_m u^i, \quad u^i_{;A} = u^i_{;m} x^m_{;A} \qquad (1.2.47a)'$$

$$\square_j u^i = \nabla_j u^i, \qquad u^i{}_j = u^i_{;j} \qquad (1.2.47b)'$$

如果把矢径 $\mathbf{P}$ 当作 $\mathbf{U}$，矢径 $\mathbf{p}$ 当作 $\mathbf{u}$，而且把 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{p}$，因而 X^A 与 x^i 当作互相独立的量(见 § 1.1)，则 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{p}$ 的偏梯度为①

$$\overleftarrow{\nabla}\mathbf{P} = \mathbf{P}\overleftarrow{\nabla} = \overleftarrow{\overleftarrow{\mathbf{I}}} \qquad (1.2.48a)$$

$$\overrightarrow{\nabla}\mathbf{P} = \mathbf{P}\overrightarrow{\nabla} = 0 \qquad (1.2.48b)$$

及

$$\overleftarrow{\nabla}\mathbf{p} = \mathbf{p}\overleftarrow{\nabla} = 0 \qquad (1.2.49a)$$

$$\overrightarrow{\nabla}\mathbf{p} = \mathbf{p}\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{\overrightarrow{\mathbf{I}}} \qquad (1.2.49b)$$

而 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{p}$ 的全梯度则为

$$\overleftarrow{\square}\mathbf{P} = \overleftarrow{\nabla}\mathbf{P} = \mathbf{P}\overleftarrow{\square} = \mathbf{P}\overleftarrow{\nabla} = \overleftarrow{\overleftarrow{\mathbf{I}}} \qquad (1.2.50a)$$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{\square}\mathbf{P} &= \overrightarrow{\nabla}\mathbf{P}(\mathbf{p}) = \partial_i X^A \mathbf{g}^i \mathbf{G}_A \\ \mathbf{P}\overrightarrow{\square} &= \mathbf{P}(\mathbf{p})\overrightarrow{\nabla} = X^A_{;i} \mathbf{G}_A \mathbf{g}^i \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.50b)$$

与

$$\left.\begin{aligned} \overleftarrow{\square}\mathbf{p} &= \overleftarrow{\nabla}\mathbf{p}(\mathbf{P}) = \partial_A x^i \mathbf{G}^A \mathbf{g}_i \\ \mathbf{p}\overleftarrow{\square} &= \mathbf{p}(\mathbf{P})\overleftarrow{\nabla} = x^i_{;A} \mathbf{g}_i \mathbf{G}^A \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.51a)$$

---

① 这里 (1.2.48b) 式与以前 (1.2.6) 式的差别，(1.2.49a) 式与以前(1.2.5)式的差别是因为这里把 $\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{P}$ 当作互相独立的量而不考虑它们之间的联系。(1.2.5)与(1.2.6)式各相当于这里的 (1.2.51b) 与 (1.2.50b) 式。

$$\overset{\leftarrow}{\square}\mathbf{p} = \overset{\leftarrow}{\nabla}\mathbf{p} = \mathbf{p}\overset{\rightarrow}{\square} = \mathbf{p}\overset{\rightarrow}{\nabla} = \overset{\gg}{\mathbf{I}} \qquad (1.2.51b)$$

由上面的（1.2.50b）与（1.2.51a）式(即以前的（1.2.6）与(1.2.5)式)可见坐标 x^i (或 X^A) 对于 X^A (或 x^i) 的偏导数 $x^i_{,A}$（或 $X^A_{,i}$）构成两点张量的分量。这是和上文第(1)点所指出的坐标本身不是矢量分量但坐标的微分是矢量分量这一事实密切相关的。本来，坐标不是矢量分量，不能求协变导数，但以后为了方便允许采用协变导数的记法，即约定：

$$\begin{aligned} x^i_{,A} = x^i_{;A} = x^i_{:A} = \partial_A x^i = \nabla_A x^i = \square_A x^i \\ X^A_{,i} = X^A_{;i} = X^A_{:i} = \partial_i X^A = \nabla_i X^A = \square_i X^A \end{aligned} \qquad (1.2.52)$$

以及

$$\begin{aligned} g_{ij}x^j_{,A} = x_{i,A} = x_{i;A} = x_{i:A} = \partial_A x_i = \nabla_A x_i = \square_A x_i \\ G_{AB}X^B_{,i} = X_{A,i} = X_{A;i} = X_{A:i} = \partial_i X_A = \nabla_i X_A = \square_i X_A \end{aligned} \qquad (1.2.53)$$

（3）显然，在张量分析中的积分变换公式（如 Green 公式，Stokes 公式等），只要把其中的 Hamilton 算子 ∇ 改为 $\square$，则对两点张量场同样适用。

第二章　变形几何学

§2.1　运动与变形

在本节中我们将研究连续体变形的几何性质，问题完全不涉及到力，因此是一个纯几何问题。

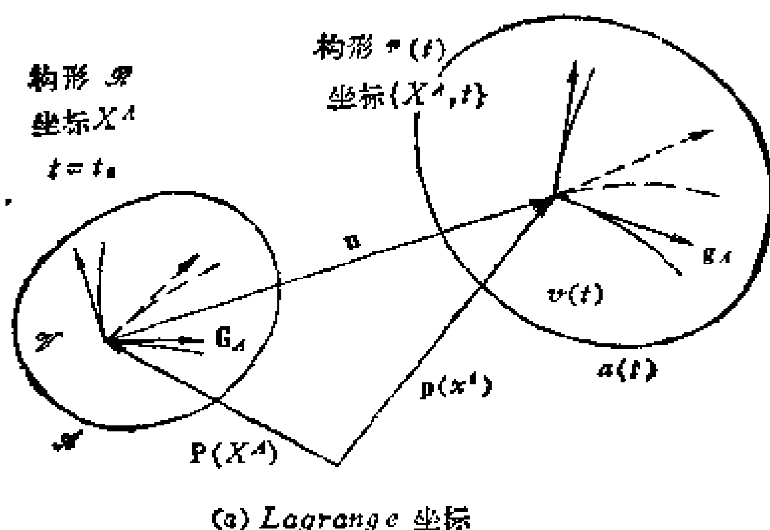
图 2.1 示一物体在运动，即其构形随着时间 t 而变化。设在某一初始时刻 t_0，物体的构形为 $\mathscr{R}$，而在时刻 t 其构形为 $\boldsymbol{r}$；为了表示构形 $\boldsymbol{r}$ 随时间 t 而变化，可记作 $\boldsymbol{r}(t)$。构形 $\mathscr{R}$ 可称为参考构形。从构形 $\mathscr{R}$ 到构形 $\boldsymbol{r}(t)$ 的变化，或者说，下列变换

$$\mathbf{P}\in\mathscr{R}\longleftrightarrow\mathbf{p}\in\boldsymbol{r}(t)$$

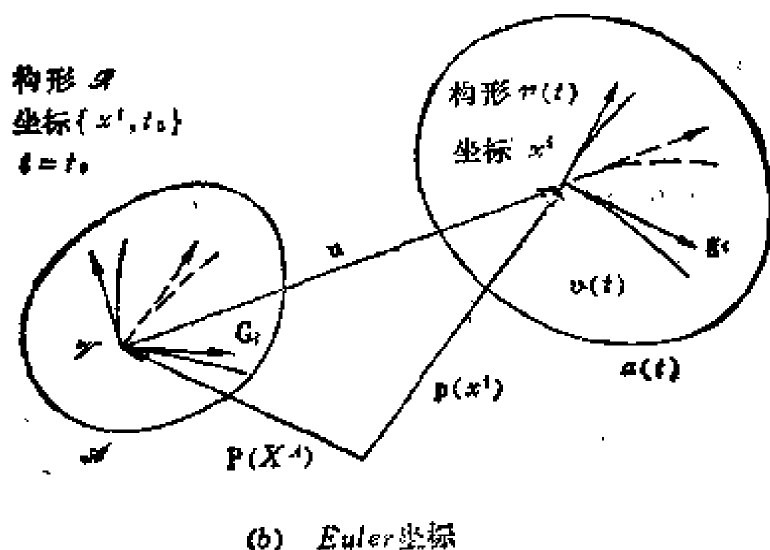
就构成物体的运动。在本章中研究物体的变形，即暂且把 t 当作一个固定的值，而第三章，则研究物体的变形速率，即把 t 当作变化着的参数。

以后约定在构形 $\mathscr{R}$ 中的量以大写字母表示，在构形 $\boldsymbol{r}$ 中的量则以小写字母表示。在必要时，为了区别两构形中的矢量，按照第一章的办法，在构形 $\mathscr{R}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的矢量上各加上左括弧"〈"与右括弧"〉"记号以示区别。第一章全部的结果都可以应用到这里来，而不必再另作说明。

取 X^A 为 Lagrange 坐标，即物质坐标，而 x^i 为 Euler 坐标，即空间坐标。因此，在构形 $\mathscr{R}$ 中的矢径 $\mathbf{P}$ 是 Lagrange 坐标 X^A 的函数，可记作 $\mathbf{P}(X^A)$，而在构形 $\boldsymbol{r}$ 中的矢径 $\mathbf{p}$ 是 Euler 坐标 x^i 的函数，可记作 $\mathbf{p}(x^i)$。若把 $\mathbf{P}$ 或 X^A 当作自变量，则 $\mathbf{p}$ 或 x^i 各为其函数：



(a) *Lagrange* 坐标



(b) *Euler* 坐标

图 2.1

$$\mathbf{p}=\mathbf{p}(\mathbf{P}, t), \quad \text{或} \quad x^i=x^i(X^A, t) \tag{2.1.1}$$

若把 $\mathbf{p}$ 或 x^i 当作自变量，则 $\mathbf{P}$ 或 X^A 各为其函数：

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{p}, t), \quad \text{或} \quad X^A=X^A(x^i, t) \tag{2.1.2}$$

在以上二式中 t 为参数；由于物体在运动，这些函数都依赖于 t。连续性公理假定(2.1.1)与(2.1.2)式的函数是连续、单值、可微而且有逆的（实际上(2.1.1)与(2.1.2)式的函数互相为逆函数），因此 Jacobian 行列式不等于零：

$$|x^i_{,A}| \neq 0, \quad |X^A_{,i}| \neq 0$$

(2.1.1)与(2.1.2)式中的函数有逆且为单值，这说明材料的不可消失性与不可渗透性。

以 $\mathbf{u}$ 表示物体内各质点的位移矢量。设构形 $\mathscr{R}$ 中的矢径 $\mathbf{P}$ 与构形 $\mathscr{r}$ 中的矢径 $\mathbf{p}$ 以同一点为起点(图 2.1)，则有

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{u} \tag{2.1.3}$$

位移 $\mathbf{u}$ 可以看作是构形 $\mathscr{R}$ 中的矢量，记作 $\overset{(}{\mathbf{u}}$，可按构形 $\mathscr{R}$ 中的基矢量分解；$\mathbf{u}$ 也可看作是构形 $\mathscr{r}$ 中的矢量，记作 $\overset{\prime}{\mathbf{u}}$，可按构形 $\mathscr{r}$ 中的基矢量分解。

§2.2 坐 标 系

在构形 $\mathscr{R}$ 中，采用物质坐标系 $\{X^A\}$，矢径 $\mathbf{P}$ 为坐标 X^A 的函数，故协变基矢量为

$$\mathbf{G}_A = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^A} = \mathbf{P}_{,A} \tag{2.2.1}$$

矢径的微分为

$$d\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^A} dX^A = \mathbf{G}_A dX^A \tag{2.2.2}$$

以 dS 表示线元 $d\mathbf{P}$ 的长度，则有

$$(dS)^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = G_{AB} dX^A dX^B \tag{2.2.3}$$

在构形 $\mathscr{r}$ 中，采用空间坐标系 $\{x^i\}$，矢径 $\mathbf{p}$ 为坐标 x^i 的函数，故协变基矢量为

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i} = \mathbf{p}_{,i} \tag{2.2.4}$$

矢径的微分为

$$d\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i} dx^i = \mathbf{g}_i dx^i \tag{2.2.5}$$

而线元长度 ds 的平方则为

$$(ds)^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = g_{ij}dx^i dx^j \tag{2.2.6}$$

位移矢量 $\mathbf{u}$，可以在构形 $\mathscr{R}$ 中考察，记作 $\overset{(}{\mathbf{u}}$，也可在构形 $\mathscr{r}$ 中考察，记作 $\overset{)}{\mathbf{u}}$。它们的分解式为

$$\overset{(}{\mathbf{u}} = u^A \mathbf{G}_A \tag{2.2.7}$$

与

$$\overset{)}{\mathbf{u}} = u^i \mathbf{g}_i \tag{2.2.8}$$

$\overset{(}{\mathbf{u}}$ 和 $\overset{)}{\mathbf{u}}$ 是大小相等，方向相同的矢量，可以认为它们互相是经过平移的结果：

$$\overset{(}{\mathbf{u}} = \overset{()}{\mathbf{I}} \cdot \overset{)}{\mathbf{u}}, \quad \overset{)}{\mathbf{u}} = \overset{)(}{\mathbf{I}} \cdot \overset{(}{\mathbf{u}} \tag{2.2.9a}$$

其分量形式为

$$u^A = g^A_r u^r, \quad u^i = g^i_M u^M \tag{2.2.9b}$$

在构形 $\mathscr{r}(t)$ 中也可以采用 Lagrange 坐标 X^A，它是一种随体坐标（即物质坐标）。在此坐标系中，矢径 $\mathbf{p}$ 为坐标 X^A 与时间 t 的函数 $\mathbf{p}(X^A, t)$，协变基矢量为

$$\mathbf{g}_A = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^A} \tag{2.2.10}$$

式中在对 X^A 求偏导数时，时间 t 保持不变。对于固定的时刻 t，Euler 坐标 x^i 与 Lagrange 坐标 X^A 被看作是在构形 $\mathscr{r}$ 中可以互相转换的两种坐标系。此时可将坐标系 X^A 记作 $\{X^A, t\}$，以强调这是在构形 $\mathscr{r}(t)$ 中采用的 X^A 的坐标，并与构形 $\mathscr{R}$ 中的 $\{X^A\}$ 坐标系相区别。

一、在构形 $\mathscr{r}(t)$ 中的两种坐标系 $\{x^i\}$ 与 $\{X^A, t\}$

将图 2.1 在构形 $\mathscr{r}(t)$ 中对应于两种坐标系即 Euler 坐标系 $\{x^i\}$ 与 Lagrange 随体坐标系 $\{X^A, t\}$ 的各种几何量对照如下：

坐标系 $\{x^i\}$　　　　　　　　　$\{X^A, t\}$

协变基：

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i} \quad (2.2.4) \qquad \mathbf{g}_A = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^A} \quad (2.2.4)'$$

逆变基：

$$\mathbf{g}^i \qquad\qquad \mathbf{g}^A$$

矢径微分：

$$d\mathbf{p} = \mathbf{g}_i dx^i \quad (2.2.10) \qquad d\mathbf{p} = \mathbf{g}_A dX^A \quad (2.2.10)'$$

对偶条件：

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta^i_j \quad (2.2.11) \qquad \mathbf{g}^A \cdot \mathbf{g}_B = \delta^A_B \quad (2.2.11)'$$

度量张量的分量：

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \\ g^{ij} &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j \end{aligned} \quad (2.2.12) \qquad \begin{aligned} g_{AB} &= \mathbf{g}_A \cdot \mathbf{g}_B \\ g^{AB} &= \mathbf{g}^A \cdot \mathbf{g}^B \end{aligned} \quad (2.2.12)'$$

对偶基矢量的关系：

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= g_{ij}\mathbf{g}^j \\ \mathbf{g}^i &= g^{ij}\mathbf{g}_j \end{aligned} \quad (2.2.13) \qquad \begin{aligned} \mathbf{g}_A &= g_{AB}\mathbf{g}^B \\ \mathbf{g}^A &= g^{AB}\mathbf{g}_B \end{aligned} \quad (2.2.13)'$$

度量张量的协变与逆变分量的关系：

$$g^{ij} = g_{kl}g^{ik}g^{jl} \quad (2.2.14) \qquad g^{AB} = g_{CD}g^{AC}g^{BD} \quad (2.2.14)'$$

度量张量：

$$\begin{aligned} \overset{\gg}{\mathbf{I}} &= g_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j \\ &= g^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j \\ &= \delta^i_j\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j \\ &= \delta^i_j\mathbf{g}^j\mathbf{g}_i \end{aligned} \quad (2.2.15) \qquad \begin{aligned} \overset{\gg}{\mathbf{I}} &= g_{AB}\mathbf{g}^A\mathbf{g}^B \\ &= g^{AB}\mathbf{g}_A\mathbf{g}_B \\ &= \delta^A_B\mathbf{g}_A\mathbf{g}^B \\ &= \delta^B_A\mathbf{g}^A\mathbf{g}_B \end{aligned} \quad (2.2.15)'$$

对于坐标 X^A 的转换 $(X^A \longleftrightarrow X^{K'})$，$g_{AB}$，$g^{AB}$ 服从张量分量的转换规律，而对于坐标 x^i 的转换 $(x^i \longleftrightarrow x^{r'})$，$g_{ij}$，$g^{ij}$ 也服从张量分量的转换规律。对于固定的时刻 t，Euler 坐标 x^i 与 Lagrange 坐标 X^A 之间也是一种坐标转换，因此有关的量也服从张量的坐标转换关系，例如在基矢量之间与度量张量分量之间有

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_A \frac{\partial X^A}{\partial x^i}, \qquad \mathbf{g}_A = \mathbf{g}_i \frac{\partial x^i}{\partial X^A}$$
$$\mathbf{g}^i = \mathbf{g}^A \frac{\partial x^i}{\partial X^A}, \qquad \mathbf{g}^A = \mathbf{g}^i \frac{\partial X^A}{\partial x^i} \tag{2.2.16}$$

$$g_{ij} = g_{AB} \frac{\partial X^A}{\partial x^i} \frac{\partial X^B}{\partial x^j}, \quad g_{AB} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial X^A} \frac{\partial x^j}{\partial X^B}$$
$$g^{ij} = g^{AB} \frac{\partial x^i}{\partial X^A} \frac{\partial x^j}{\partial X^B}, \quad g^{AB} = g^{ij} \frac{\partial X^A}{\partial x^i} \frac{\partial X^B}{\partial x^j} \tag{2.2.17}$$

这里，在求两组坐标间的偏导数时，保持时间 t 不变。

以 $d\mathbf{P}$ 表示在变形前的构形即参考构形 $\mathscr{R}$ 中的线元，见(2.2.2)式，它的长度 dS 的平方见(2.2.3)式。此线元 $d\mathbf{P}$ 在变形后的构形 $\mathscr{r}$ 中变成 $d\mathbf{p}$，其长度的平方为 $(ds)^2$。若已知在构形 $\mathscr{r}$ 中的度量张量分量 g_{AB}（见 (2.2.12)′式），可计算$(ds)^2$：

$$(ds)^2 = g_{AB} dX^A dX^B$$

上式可写作以下的形式：

$$(ds)^2 = (\mathbf{G}_K dX^K) \cdot (g_{AB} \mathbf{G}^A \mathbf{G}^B) \cdot (\mathbf{G}_L dX^L)$$

即

$$(ds)^2 = d\mathbf{P} \cdot \overset{\ll}{\mathbf{C}} \cdot d\mathbf{P} \tag{2.2.18}$$

式中

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}} = C_{AB} \mathbf{G}^A \mathbf{G}^B = C^{AB} \mathbf{G}_A \mathbf{G}_B, \quad C_{AB} = g_{AB} \tag{2.2.19}$$

$\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 是构形 $\mathscr{R}$ 中的张量，称为 Green 变形张量，或称为右 Cauchy-Green 变形张量。$\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 的协变分量 C_{AB} 在数值上与 g_{AB} 相等，$\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 其实就是把 g_{AB} 改写为 C_{AB}，然后配上变形前构形 $\mathscr{R}$ 的逆变基矢量 $\mathbf{G}^A$ 与 $\mathbf{G}^B$ 的结果。如果我们把 g_{AB} 配上变形后构形 $\mathscr{r}$ 的逆变基矢量 $\mathbf{g}^A$ 与 $\mathbf{g}^B$，那么得到的是变形后构形 $\mathscr{r}$ 的度量张量，即前(2.2.15)′式：

$$\overset{\gg}{\mathbf{I}} = g_{AB} \mathbf{g}^A \mathbf{g}^B = g^{AB} \mathbf{g}_A \mathbf{g}_B \tag{2.2.15′}$$

比较上面的（2.2.19）与（2.2.15)′式，可知虽然 $C_{AB}=g_{AB}$，但 $C^{AB}\neq g^{AB}$，因为 C^{AB} 是由 C_{CD} 利用构形 $\mathscr{R}$ 中的度量张量使指标上升而得：

$$C^{AB}=C_{CD}G^{AC}G^{BD} \tag{2.2.20}$$

而 g^{AB} 则为由 g_{CD} 利用构形 $\mathscr{r}$ 中的度量张量使指标上升的结果，即以前的(2.2.14)′式：

$$g^{AB}=g_{CD}g^{AC}g^{BD} \tag{2.2.14$'$}$$

以后我们将把 g^{AB} 记作 $\overset{-1}{C}{}^{AB}$［见式(2.5.4)］。

在连续介质力学中，常把变形后的构形 $\mathscr{r}$ 中 Lagrange 坐标系的协变基矢量 $\mathbf{g}_A$ 平移到变形前的参考构形 $\mathscr{R}$ 中来，并改用大写字母记作 $\mathbf{C}_A$，因此按矢量的平移公式（1.1.24a）

$$\overset{(}{\mathbf{C}}_A=\overset{()}{\mathbf{I}}\cdot\overset{)}{\mathbf{g}}_A$$

且因 $g_{AB}=\mathbf{g}_A\cdot\mathbf{g}_B$，故有

$$C_{AB}=\mathbf{C}_A\cdot\mathbf{C}_B$$

利用在构形 $\mathscr{r}$ 中协变基矢量的坐标转换公式（2.2.16）以及基矢量平移公式(1.1.15)′，$\overset{(}{\mathbf{C}}_A$ 可写作

$$\overset{(}{\mathbf{C}}_A=\overset{()}{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{g}_k\frac{\partial x^k}{\partial X^A}=x^k_{,A}g^B_k\mathbf{G}_B \tag{2.2.10$'$}$$

以 $\overset{(}{\mathbf{C}}{}^A$ 表示由 $\overset{(}{\mathbf{C}}_A$ 利用度量张量 G^{AB} 上升指标的结果，即

$$\overset{(}{\mathbf{C}}{}^A=G^{AK}\overset{(}{\mathbf{C}}_K \tag{2.2.21}$$

将(2.2.10)′代入(2.2.21)式，得

$$\overset{(}{\mathbf{C}}{}^A=G^{AK}x^k_{,K}g^B_k\mathbf{G}_B \tag{2.2.21$'$}$$

这里要特别注意，虽然 $\overset{(}{\mathbf{C}}_A$ 是 $\mathbf{g}_A$ 从构形 $\mathscr{r}$ 平移到构形 $\mathscr{R}$ 中的结果，但是 $\overset{(}{\mathbf{C}}{}^A$ 决不是 $\mathbf{g}^A$ 的平移结果，因为与(2.2.21)式相对照，由(2.2.13)′式

$$\mathbf{g}^A = g^{AK}\mathbf{g}_K$$

这个关系显然不同于(2.2.21)式。通常把 $\mathbf{g}^A$ 从构形 r 平移到构形 $\mathscr{R}$ 中的结果记作 $\overset{-1}{\mathbf{C}}{}^A$，以示区别于 $\mathbf{C}^A$，即

$$\overset{-1}{\mathbf{C}}{}^A = \overset{0}{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{g}^A$$

故

$$\overset{-1}{C}{}^{AB} = g^{AB} = \overset{-1}{\mathbf{C}}{}^A \cdot \overset{-1}{\mathbf{C}}{}^B$$

以 $\overset{-1}{\mathbf{C}}{}_A$ 表示由 $\overset{-1}{\mathbf{C}}{}^A$ 利用构形 $\mathscr{R}$ 中度量张量 G_{AB} 使指标下降的结果，即

$$\overset{-1}{\mathbf{C}}{}_A = G_{AK}\overset{-1}{\mathbf{C}}{}^K$$

同时，以 $\overset{-1}{C}{}_{AB}$ 表示由 $\overset{-1}{C}{}^{AB} = g^{AB}$ 利用构形 $\mathscr{R}$ 中度量张量 G_{AB} 使指标下降的结果，即

$$\overset{-1}{C}{}_{AB} = \overset{-1}{C}{}^{CD}G_{AC}G_{BD}$$

故

$$\overset{-1}{C}{}_{AB} = \overset{-1}{\mathbf{C}}{}_A \cdot \overset{-1}{\mathbf{C}}{}_B$$

利用构形 r 中逆变基矢量的坐标转换公式(2.2.16)与基矢量平移公式(1.1.15)′，上式可写作

$$\overset{-1}{\mathbf{C}}{}^A = \overset{0}{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{g}^k \frac{\partial X^A}{\partial x^k} = X^A_{,k} g^k_B \mathbf{G}^B \qquad (2.2.10)''$$

由于构形 r 中基矢量 $\mathbf{g}^A$ 与 $\mathbf{g}_B$ 满足对偶条件 (2.2.11)′ 式，因此它们从构形 r 平移至构形 $\mathscr{R}$ 后显然也满足对偶条件，即

$$\overset{-1}{\mathbf{C}}{}^A \cdot \mathbf{C}_B = (\overset{0}{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{g}^A) \cdot (\overset{0}{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{g}_B) = \mathbf{g}^A \cdot \mathbf{g}_B = \delta^A_B \quad (2.2.11)''$$

上式经过利用构形 $\mathscr{R}$ 中的度量张量 G_{AB} 升降指标以后，成为

$$\overset{-1}{\mathbf{C}}{}_A \cdot \mathbf{C}^B = \delta^B_A \qquad (2.2.11)'''$$

由(2.2.20)与(2.2.21)式可得

$$C^{AB} = (\mathbf{C}_C \cdot \mathbf{C}_D)G^{AC}G^{BD} = \mathbf{C}^A \cdot \mathbf{C}^B$$

因此 Green 变形张量 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ (2.2.19)式可写作

$$\begin{aligned} \overset{\ll}{\mathbf{C}} &= C_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B = (\mathbf{C}_A \cdot \mathbf{C}_B)\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B \\ &= C^{AB}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B = (\mathbf{C}^A \cdot \mathbf{C}^B)\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B \end{aligned} \tag{2.2.19a)'$$

当已知 $x^i(X^A, t)$ 与 g_{ij} 时，可以利用(2.2.17)的 g_{AB} 式来计算 C_{AB}:

$$C_{AB} = g_{AB} = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial X^A}\frac{\partial x^j}{\partial X^B} \tag{2.2.19b)'$$

容易验证，Green 变形张量 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 之逆 $\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}$ 在基矢量中的分解式为

$$\begin{aligned} \overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}} &= \overset{-1}{C}{}^{AB}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B = (\overset{-1}{\mathbf{C}}{}^A \cdot \overset{-1}{\mathbf{C}}{}^B)\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B \\ &= \overset{-1}{C}{}_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B = (\overset{-1}{\mathbf{C}}{}_A \cdot \overset{-1}{\mathbf{C}}{}_B)\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B \end{aligned} \tag{2.2.19a)''$$

式中:

$$\overset{-1}{C}{}^{AB} = g^{AB} = g^{ij}\frac{\partial X^A}{\partial x^i}\frac{\partial X^B}{\partial x^j} \tag{2.2.19b)''$$

二、在构形 $\mathscr{R}$ 中的两种坐标系 $\{X^A\}$ 与 $\{x^i, t_0\}$

由于 X^A 是随体坐标，图 2.1(a) 中构形 $\mathscr{R}$ 与构形 $\mathscr{r}(t)$ 中的坐标线(X^A 坐标线)是由相同的物质质点组成的，同样在图 2.1(b) 中也可以由构形 $\mathscr{r}(t)$ 中的坐标线去寻找在构形 $\mathscr{R}$ 中由相同的物质质点组成的线。如果把 x^i 当作随体坐标来使用，那么这些线就是在构形 $\mathscr{R}$ 中 x^i 的坐标线。我们把构形 $\mathscr{r}$ 中的随体坐标 x^i 记作 $\{x^i, t_0\}$，以强调这是在构形 $\mathscr{R}$ 中采用的 x^i 坐标，并与构形 $\mathscr{r}$ 中的 $\{x^i\}$ 坐标系相区别。注意在图 2.1(a) 中，构形 $\mathscr{R}$ 中的 X^A 坐标线是固定不变的，而构形 $\mathscr{r}(t)$ 中的 X^A 坐标线则是随时间 t 而变动的。同样，在图 2.1(b) 中，构形 $\mathscr{r}$ 中的 x^i 坐标线是固定不变的，而构形 $\mathscr{R}$ 中的 x^i 坐标线则也是随时间 t 而变动的。

现在把图 2.1 在构形 $\mathscr{R}$ 中对应于两种坐标系即 Lagrange 坐

标系 $\{X^A\}$ 与 Euler 坐标系 $\{x^i, t_0\}$ 的各种几何量对照如下：

坐标系 $\{X^A\}$		$\{x^i, t_0\}$	
协变基：			
$\mathbf{G}_A = \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^A}$	(2.2.1)	$\mathbf{G}_i = \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^i}$	(2.2.1)′
逆变基			
$\mathbf{G}^A$		$\mathbf{G}^i$	
矢径微分：			
$d\mathbf{P} = \mathbf{G}_A dX^A$	(2.2.22)	$d\mathbf{P} = \mathbf{G}_i dx^i$	(2.2.22)′
对偶条件			
$\mathbf{G}^A \cdot \mathbf{G}_B = \delta^A_B$	(2.2.23)	$\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \delta^i_j$	(2.2.23)′
度量张量的分量：			
$G_{AB} = \mathbf{G}_A \cdot \mathbf{G}_B$ $G^{AB} = \mathbf{G}^A \cdot \mathbf{G}^B$	(2.2.24)	$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j$ $G^{ij} = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j$	(2.2.24)′
对偶基矢量的关系：			
$\mathbf{G}_A = G_{AB}\mathbf{G}^B$ $\mathbf{G}^A = G^{AB}\mathbf{G}_B$	(2.2.25)	$\mathbf{G}_i = G_{ij}\mathbf{G}^j$ $\mathbf{G}^i = G^{ij}\mathbf{G}_j$	(2.2.25)′
度量张量的协变与逆变分量的关系：			
$G^{AB} = G_{CD}G^{AC}G^{BD}$	(2.2.26)	$G^{ij} = G_{kl}G^{ik}G^{jl}$	(2.2.26)′
度量张量：			
$\overset{\text{“}}{\mathbf{I}} = G_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B = G^{AB}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B$ $= \delta^A_B\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B = \delta^B_A\mathbf{G}^A\mathbf{G}_B$	(2.2.27)	$\overset{\text{“}}{\mathbf{I}} = G_{ij}\mathbf{G}^i\mathbf{G}^j = G^{ij}\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j$ $= \delta^i_j\mathbf{G}_i\mathbf{G}^j = \delta^j_i\mathbf{G}^i\mathbf{G}_j$	(2.2.27)′

对于坐标 X^A 的转换 $(X^A \longleftrightarrow X^{K'})$，$G_{AB}$，$G^{AB}$ 服从张量分量的转换规律，而对于坐标 x^i 的转换 $(x^i \longleftrightarrow x^{r'})$，$G_{ij}$，$G^{ij}$ 也服从张量分量的转换规律。对于固定的时刻 t，Euler 坐标 x^i 与 Lagrange 坐标 X^A 之间也是一种坐标转换，因而有关的量也服从张量的转换关系，例如在基矢量之间与度量张量分量之间有

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_A \frac{\partial X^A}{\partial x^i}, \qquad \mathbf{G}_A = \mathbf{G}_i \frac{\partial x^i}{\partial X^A}$$

$$\mathbf{G}^i = \mathbf{G}^A \frac{\partial x^i}{\partial X^A}, \qquad \mathbf{G}^A = \mathbf{G}^i \frac{\partial X^A}{\partial x^i} \tag{2.2.28}$$

$$G_{ij} = G_{AB} \frac{\partial X^A}{\partial x^i} \frac{\partial X^B}{\partial x^j}, \qquad G_{AB} = G_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial X^A} \frac{\partial x^j}{\partial X^B}$$

$$G^{ij} = G^{AB} \frac{\partial x^i}{\partial X^A} \frac{\partial x^j}{\partial X^B}, \qquad G^{AB} = G^{ij} \frac{\partial X^A}{\partial x^i} \frac{\partial X^B}{\partial x^j} \tag{2.2.29}$$

类似于(2.2.17)式，这里在求两组坐标间的偏导数时，保持时间 t 不变。

以 $d\mathbf{p}$ 表示在变形后的构形 $\mathscr{r}$ 中的线元，见(2.2.5)式，它的长度 ds 的平方见(2.2.6)式。此线元 $d\mathbf{p}$ 对应于在变形前的参考构形 $\mathscr{R}$ 中的 $d\mathbf{P}$，$d\mathbf{P}$ 长度的平方为 $(dS)^2$。由变形前构形 $\mathscr{R}$ 中的度量张量分量 G_{ij}（见(2.2.24)′式），可计算 $(dS)^2$：

$$(dS)^2 = G_{ij} dx^i dx^j$$

上式可写作

$$(dS)^2 = (\mathbf{g}_r dx^r) \cdot (G_{ij} \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j) \cdot (\mathbf{g}_s dx^s)$$

即

$$(dS)^2 = d\mathbf{p} \cdot \overset{\rightrightarrows}{\mathbf{c}} \cdot d\mathbf{p} \tag{2.2.30}$$

式中

$$\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{c}} = c_{ij} \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j = c^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j, \quad c_{ij} = G_{ij} \tag{2.2.31}$$

$\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{c}}$ 是构形 $\mathscr{r}$ 中的张量，称为 Cauchy 变形张量，其逆 $\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{c}}^{-1}$ 称为左 Cauchy-Green 变形张量。$\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{c}}$ 的协变分量 c_{ij} 在数值上与 G_{ij} 相等，$\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{c}}$ 其实就是把 G_{ij} 改写成 c_{ij}，然后配上变形后构形 $\mathscr{r}$ 的逆变基矢量 $\mathbf{g}^i$ 与 $\mathbf{g}^j$ 的结果。如果我们把 G_{ij} 配上变形前构形 $\mathscr{R}$ 的基矢量 $\mathbf{G}^i$ 与 $\mathbf{G}^j$，那么得到的是变形前构形 $\mathscr{R}$ 的度量张量，即前(2.2.27)′式

$$\overset{\leftleftarrows}{\mathbf{I}} = G_{ij} \mathbf{G}^i \mathbf{G}^j = G^{ij} \mathbf{G}_i \mathbf{G}_j \tag{2.2.27$'$}$$

比较上面的(2.2.31)与(2.2.27)′式,可知虽然 $c_{ij}=G_{ij}$，但 $c^{ij}\neq G^{ij}$，因为 c^{ij} 是由 c_{kl} 利用构形 r 中的度量张量使指标上升而得：

$$c^{ij}=c_{kl}g^{ik}g^{jl} \tag{2.2.32}$$

而 G^{ij} 则为由 G_{kl} 利用构形 $\mathscr{R}$ 中的度量张量使指标上升的结果，即以前的(2.2.26)′式

$$G^{ij}=G_{kl}G^{ik}G^{jl} \tag{2.2.26$'$}$$

以后我们将把 G^{ij} 记作 $\overset{-1}{c}{}^{ij}$ [见(2.5.6)式]。

在连续介质力学中，常把变形前的构形 $\mathscr{R}$ 中 Euler 坐标系(时刻 t 固定,用作随体坐标)的协变基矢量 $\mathbf{G}_i$ 平移到变形后的构形 r 中来，并改用小写字母记作 $\mathbf{c}_i$，因此按矢量的平移公式(1.1.24b)

$$\overset{)}{\mathbf{c}}_i=\overset{)(}{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{G}_i$$

且因 $G_{ij}=\mathbf{G}_i\cdot\mathbf{G}_j$，故有

$$c_{ij}=\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{c}_j$$

利用在构形 $\mathscr{R}$ 中协变基矢量的坐标转换公式 (2.2.28) 与基矢量平移公式(1.1.16)′,上式可写作

$$\overset{)}{\mathbf{c}}_i=\overset{)(}{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{G}_A\frac{\partial X^A}{\partial x^i}=X^A_{;i}g^k_A\mathbf{g}_k \tag{2.2.22$'$}$$

以 $\overset{)}{\mathbf{c}}{}^i$ 表示由 $\overset{)}{\mathbf{c}}_i$ 利用度量张量 g^{ij} 使指标上升的结果,即

$$\overset{)}{\mathbf{c}}{}^i=g^{il}\overset{)}{\mathbf{c}}_l \tag{2.2.33}$$

将(2.2.22)′代入(2.2.33)式,得

$$\overset{)}{\mathbf{c}}{}^i=g^{il}X^A_{;l}g^k_A\mathbf{g}_k \tag{2.2.33$'$}$$

这里也要特别注意,虽然 $\overset{)}{\mathbf{c}}_i$ 是 $\mathbf{G}_i$ 从构形 $\mathscr{R}$ 平移到 r 的结果，但是 $\overset{)}{\mathbf{c}}{}^i$ 决不是 $\mathbf{G}^i$ 的平移的结果，因为与 (2.2.33) 式相对照，由(2.2.25)′

$$\mathbf{G}^i=G^{il}\mathbf{G}_l$$

这个关系显然不同于(2.2.33)式。通常把 $\mathbf{G}^i$ 从构形 $\mathscr{R}$ 平移到构形 $\mathscr{r}$ 中的结果记作 $\overset{-1}{\mathbf{c}}{}^i$，以示区别于 $\mathbf{c}^i$，即

$$\overset{-1}{\mathbf{c}}{}^i = \overset{)(}{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{G}^i$$

故

$$\overset{-1}{c}{}^{ij} = G^{ij} = \overset{-1}{\mathbf{c}}{}^i \cdot \overset{-1}{\mathbf{c}}{}^j$$

以 $\overset{-1}{\mathbf{c}}_i$ 表示由 $\overset{-1}{\mathbf{c}}{}^i$ 利用构形 $\mathscr{r}$ 中度量张量 g_{ij} 使指标下降的结果，即

$$\overset{-1}{\mathbf{c}}_i = g_{ik}\overset{-1}{\mathbf{c}}{}^k$$

同时，以 $\overset{-1}{c}_{ij}$ 表示由 $\overset{-1}{c}{}^{ij} = G^{ij}$ 利用构形 $\mathscr{r}$ 中度量张量 g_{ij} 使指标下降的结果，即

$$\overset{-1}{c}_{ij} = \overset{-1}{c}{}^{kl} g_{ik} g_{jl}$$

故

$$\overset{-1}{c}_{ij} = \overset{-1}{\mathbf{c}}_i \cdot \overset{-1}{\mathbf{c}}_j$$

利用构形 $\mathscr{R}$ 中逆变基矢量的坐标转换公式(2.2.28)与基矢量平移公式(1.1.16)′，上式可写作

$$\overset{-1}{\mathbf{c}}{}^i = \overset{)(}{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{G}^A \frac{\partial x^i}{\partial X^A} = x^i_{;A} g^A_k \mathbf{g}^k \tag{2.2.22)''$$

由于构形 $\mathscr{R}$ 中基矢量 $\mathbf{G}^i$ 与 $\mathbf{G}_j$ 满足对偶条件 (2.2.23)′ 式，因此它们从构形 $\mathscr{R}$ 平移到构形 $\mathscr{r}$ 后显然也满足对偶条件，即

$$\overset{-1}{\mathbf{c}}{}^i \cdot \mathbf{c}_j = (\overset{)(}{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{G}^i) \cdot (\overset{)(}{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{G}_j) = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \delta^i_j \tag{2.2.23)''$$

上式经过利用构形 $\mathscr{r}$ 中度量张量 g_{ij} 升降指标以后，成为

$$\overset{-1}{\mathbf{c}}_i \cdot \mathbf{c}^j = \delta^j_i \tag{2.2.23)'''$$

由(2.2.32)与(2.2.33)式可得

$$c^{ij} = (\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l) g^{ik} g^{jl} = \mathbf{c}^i \cdot \mathbf{c}^j$$

因此 Cauchy 变形张量 $\overset{))}{\mathbf{c}}$ (2.2.31)式可写作

$$
\begin{aligned}
\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{c}} &= c_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j = (\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{c}_j)\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j \\
&= c^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j = (\mathbf{c}^i\cdot\mathbf{c}^j)\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j
\end{aligned}
\qquad (2.2.31)'
$$

当已知 $X^A(x^i, t)$ 与 G_{AB} 时，可以利用 (2.2.29) 的 G_{ij} 式来计算 c_{ij}：

$$
c_{ij} = G_{AB}\frac{\partial X^A}{\partial x^i}\frac{\partial X^B}{\partial x^j}
$$

容易验证，Cauchy 变形张量 $\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{c}}$ 的逆，即左 Cauchy-Green 变形张量 $\overset{-1}{\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{c}}}$，在基矢量中的分解式为

$$
\begin{aligned}
\overset{-1}{\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{c}}} &= \overset{-1}{c}{}^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j = (\overset{-1}{\mathbf{c}}{}^i\cdot\overset{-1}{\mathbf{c}}{}^j)\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j \\
&= \overset{-1}{c}_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j = (\overset{-1}{\mathbf{c}}_i\cdot\overset{-1}{\mathbf{c}}_j)\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j
\end{aligned}
$$

习题 2.1　证明①

$$
\mathbf{G}^A\cdot\mathbf{c}_i = \overset{-1}{\mathbf{C}}{}^A\cdot\mathbf{g}_i = X^A_{,i}
$$

$$
\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{C}_A = \overset{-1}{\mathbf{c}}{}^i\cdot\mathbf{G}_A = x^i_{,A}
$$

[提示]可利用(2.2.16)与(2.2.28)式。

三、应变张量

我们来计算物体在变形前与变形后，即在构形 $\mathscr{R}$ 与构形 $\mathscr{r}$ 中线元长度平方 $(ds)^2$ 与 $(dS)^2$ 之差。若采用 Lagrange 坐标即 $\mathscr{R}$ 中的 $\{X^A\}$ 与 $\mathscr{r}$ 中的 $\{X^A, t\}$，则由 (2.2.3) 与 (2.2.18) 式，可得

$$
\begin{aligned}
(ds)^2-(dS)^2 &= d\mathbf{P}\cdot\overset{\leftleftarrows}{\mathbf{C}}\cdot d\mathbf{P} - d\mathbf{P}\cdot\overset{\leftleftarrows}{\mathbf{I}}\cdot d\mathbf{P} \\
&= 2d\mathbf{P}\cdot\overset{\leftleftarrows}{\mathbf{E}}\cdot d\mathbf{P}
\end{aligned}
\qquad (2.2.34)
$$

---

① 当出现属于不同构形(例如 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{r}$)的两个矢量点积时，可以理解为把它们中的一个平移至另一个所属的构形中，然后进行点积。即可将以转移张量点积的运算省去不写。

式中

$$\overset{\ll}{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\overset{\ll}{\mathbf{C}} - \overset{\ll}{\mathbf{I}}) = E_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B$$

$$E_{AB} = \frac{1}{2}(C_{AB} - G_{AB}) \tag{2.2.35}$$

$\overset{\ll}{\mathbf{E}}$ 为构形 $\mathscr{R}$ 中的张量，称为 Green (或 Green-St. Venant) 应变张量。同样，若采用 Euler 坐标即 $\mathscr{R}$ 中的 $\{x^i, t_0\}$ 与 $\mathscr{r}$ 中的 $\{x^i\}$，则由(2.2.6)与(2.2.30)式，得

$$\begin{aligned}(ds)^2 - (dS)^2 &= d\mathbf{p}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{I}}\cdot d\mathbf{p} - d\mathbf{p}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{c}}\cdot d\mathbf{p} \\ &= 2d\mathbf{p}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{e}}\cdot d\mathbf{p}\end{aligned} \tag{2.2.36}$$

式中

$$\overset{\gg}{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\overset{\gg}{\mathbf{I}} - \overset{\gg}{\mathbf{c}}) = e_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - c_{ij}) \tag{2.2.37}$$

$\overset{\gg}{\mathbf{e}}$ 为构形 $\mathscr{r}$ 中的张量，称为 Almansi (或 Almansi-Hamel) 应变张量。

§2.3 变 形 梯 度

在变形前的参考构形 $\mathscr{R}$ 中的线元 $d\mathbf{P}$，变形后变成构形 $\mathscr{r}(t)$ 中的线元 $d\mathbf{p}$。由(2.1.1)与(2.1.2)式，对于固定的时刻 t，矢径 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{p}$ 互为函数。因此，由(1.2.7)与(1.2.8)式

$$d\mathbf{p} = d\mathbf{p}(\mathbf{P}, t) = (\mathbf{p}\overleftarrow{\nabla})\cdot d\mathbf{P} = d\mathbf{P}\cdot(\overleftarrow{\nabla}\mathbf{p}) \tag{2.3.1}$$

$$d\mathbf{P} = d\mathbf{P}(\mathbf{p}, t) = (\mathbf{P}\nabla)\cdot d\mathbf{p} = d\mathbf{p}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\mathbf{P}) \tag{2.3.2}$$

由(1.2.10)与(1.2.9)式，

$$(\mathbf{p}\nabla)\cdot(\mathbf{P}\overset{)}{\nabla}) = \overset{))}{\mathbf{I}}, \quad (\mathbf{P}\overset{)}{\nabla})\cdot(\mathbf{p}\overset{(}{\nabla}) = \overset{((}{\mathbf{I}} \tag{2.3.3}$$

$$(\overset{)}{\nabla}\mathbf{P})\cdot(\nabla\mathbf{p}) = \overset{))}{\mathbf{I}}, \quad (\overset{(}{\nabla}\mathbf{p})\cdot(\overset{)}{\nabla}\mathbf{P}) = \overset{((}{\mathbf{I}} \tag{2.3.4}$$

式中由(1.2.5)与(1.2.6)式,矢径梯度为

$$\begin{aligned} \mathbf{p}\overset{(}{\nabla} &= x^i_{,A}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A \\ \overset{(}{\nabla}\mathbf{p} &= \partial_A x^i \mathbf{G}^A \mathbf{g}_i \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\overset{)}{\nabla} &= X^A_{,i}\mathbf{G}_A\mathbf{g}^i \\ \overset{)}{\nabla}\mathbf{P} &= \partial_i X^A \mathbf{g}^i \mathbf{G}_A \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

这些矢径梯度都是两点张量。

记两点张量 $\mathbf{p}\overset{(}{\nabla}$ 为 $\overset{)(}{\mathbf{D}}$:

$$\overset{)(}{\mathbf{D}} = \mathbf{p}\overset{(}{\nabla} \tag{2.3.7}$$

$\overset{)(}{\mathbf{D}}$ 称为变形梯度。显然,$\overset{(}{\nabla}\mathbf{p}$ 为它的转置张量,即

$$\overset{()}{\mathbf{D}}{}^* = \overset{(}{\nabla}\mathbf{p} \tag{2.3.8}$$

根据(2.3.3)式,$\mathbf{p}\overset{(}{\nabla}$ 与 $\mathbf{P}\overset{)}{\nabla}$ 为互逆张量,故可记

$$\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} = \mathbf{P}\overset{)}{\nabla} \tag{2.3.9}$$

$\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}$ 称为逆变形梯度或空间变形梯度,其转置张量为

$$\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^* = \overset{)}{\nabla}\mathbf{P} \tag{2.3.10}$$

注意(2.3.7)至(2.3.10)诸式中,无转置符号“*”者,Hamilton 算子符号“∇”在后,而有转置符号“*”者则“∇”在前。

运用以上记号,(2.3.1)与(2.3.2)式可写作

$$\begin{aligned} d\mathbf{p} &= \overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot d\mathbf{P} = d\mathbf{P}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^* \\ d\mathbf{P} &= \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot d\mathbf{p} = d\mathbf{p}\cdot\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^* \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

而(2.3.3)与(2.3.4)式可写作

$$\overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \overset{()}{\mathbf{D}}^{-1} = \overset{))}{\mathbf{I}}, \qquad \overset{()}{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}} = \overset{((}{\mathbf{I}} \tag{2.3.12}$$

$$\overset{)(}{\mathbf{D}}^{*-1} \cdot \overset{()}{\mathbf{D}}^{*} = \overset{))}{\mathbf{I}}, \quad \overset{()}{\mathbf{D}}^{*} \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}}^{*-1} = \overset{((}{\mathbf{I}} \tag{2.3.13}$$

(2.3.13)式实际上就是(2.3.12)式的转置。

注意在以上(2.3.7)—(2.3.10)诸式中,变形梯度(或其逆、或转置)上面的记号"("或")"是为了显示出张量的两点性质,它们是由式右端的运算结果所决定的。当然我们可以通过张量的平移来改变其两点性质,或者把它变成"一点"张量,即构形 $\mathscr{R}$ 中的张量或构形 • 中的张量。例如,由(2.3.5)第一式与(2.3.7)式,可得到

$$\begin{aligned}
\overset{)(}{\mathbf{D}} &= \mathbf{p}\overset{(}{\nabla} = x^i_{,A}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A \\
\overset{((}{\mathbf{D}} &= \overset{()}{\mathbf{I}} \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}} = g_r^A x^r_{,B}\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B \\
\overset{))}{\mathbf{D}} &= \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \overset{()}{\mathbf{I}} = x^i_{,M} g_j^M \mathbf{g}_i\mathbf{g}^j \\
\overset{()}{\mathbf{D}} &= \overset{()}{\mathbf{I}} \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \overset{()}{\mathbf{I}} = g_r^A x^r_{,M} g_j^M \mathbf{G}_A\mathbf{g}^j
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

其中第二式是由第一式把哑指标 i 换名为 r,A 换名为 B,并把 $\mathbf{g}_r$ 改成 $g_r^A\mathbf{G}_A$ 而得,第三式是由第一式把哑指标 A 换名为 M,$\mathbf{G}^M$ 改为 $g_j^M\mathbf{g}^j$ 而得,第四式是由第一式把哑指标 i 换名为 r,A 换名为 M,$\mathbf{g}_r$ 改为 $g_r^A\mathbf{G}_A$,$\mathbf{G}^M$ 改为 $g_j^M\mathbf{g}^j$ 而得。(2.3.14)的四个式子其实都是同一个张量实体,只是按不同的基($\mathscr{R}$ 或 • 中的基)来表示;为了方便,前矢量用协变基,而后矢量用逆变基。如果要从一种基改成另一种基,这只要把任何一对哑指标进行升降就可以。在本书的后半部分,我们常常用 $\mathbf{D}$ 来表示(2.3.14)式中的任何一个式子,而不去强调表明它的两点性质。通过张量的平移,就可以得到(2.3.14)四个 $\mathbf{D}$ 中的任何一个。同理,由(2.3.8)式可得到 $\mathbf{D}^*$ 的四种表示:

$$\overset{()}{\mathbf{D}}^* = \overset{(}{\nabla}\mathbf{p} = \partial_A x^i \mathbf{G}^A\mathbf{g}_i$$

$$
\begin{aligned}
\overset{))}{\mathbf{D}}{}^* &= \overset{)(}{\mathbf{I}}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^* = g_i^M\partial_M x^i g^i\mathbf{g}_i \\
\overset{((}{\mathbf{D}}{}^* &= \overset{()}{\mathbf{D}}{}^*\cdot\overset{)(}{\mathbf{I}} = (\partial_A x^r)g_r^B\mathbf{G}^A\mathbf{G}_B \\
\overset{)(}{\mathbf{D}}{}^* &= \overset{)(}{\mathbf{I}}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^*\cdot\overset{)(}{\mathbf{I}} = g_i^M(\partial_M x^r)g_r^B\mathbf{g}^i\mathbf{G}_B
\end{aligned}
\qquad (2.3.15)
$$

由(2.3.9)式得到 $\overset{-1}{\mathbf{D}}$ 的四种表示:

$$
\begin{aligned}
\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} &= \mathbf{P}\overset{)}{\nabla} = X^A_{;i}\mathbf{G}_A\mathbf{g}^i \\
\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{D}}} &= \overset{)(}{\mathbf{I}}\cdot\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} = g^i_M X^M_{;j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j \\
\overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{D}}} &= \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{I}} = X^A_{;r}g^r_B\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B \\
\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}} &= \overset{)(}{\mathbf{I}}\cdot\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{I}} = g^i_M X^M_{;r}g^r_A\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A
\end{aligned}
\qquad (2.3.16)
$$

由(2.3.10)式得到 $\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^*$ 的四种表示:

$$
\begin{aligned}
\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^* &= \overset{)}{\nabla}\mathbf{P} = \partial_i X^A\mathbf{g}^i\mathbf{G}_A \\
\overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{D}}}{}^* &= \overset{()}{\mathbf{I}}\cdot\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^* = g^r_A(\partial_r X^B)\mathbf{G}^A\mathbf{G}_B \\
\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{D}}}{}^* &= \overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^*\cdot\overset{()}{\mathbf{I}} = (\partial_i X^M)g^j_M\mathbf{g}^i\mathbf{g}_j \\
\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}{}^* &= \overset{()}{\mathbf{I}}\cdot\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^*\cdot\overset{()}{\mathbf{I}} = g^r_A(\partial_r X^M)g^i_M\mathbf{G}^A\mathbf{g}_i
\end{aligned}
\qquad (2.3.17)
$$

在以上的(2.3.14)—(2.3.17)式中,变形梯度、其逆或转置都是用基矢量 $\mathbf{G}_A$, $\mathbf{G}^A$ 或 $\mathbf{g}_i$, $\mathbf{g}^i$ 表示的。但是在构形 $\mathscr{R}$ 中,采用 Euler 坐标系 $\{x^i, t_0\}$ 时,基矢量为 $\mathbf{G}_i$, $\mathbf{G}^i$, 而在构形 r 中,采用 Lagrange 坐标系 $\{X^A, t\}$ 时,基矢量为 $\mathbf{g}_A$, $\mathbf{g}^A$。有时为了方便也可以把变形梯度通过这些基矢量表示。利用基矢量间的坐标转换关系(2.2.16)与(2.2.28)式,由(2.3.14)式可得

$$
\overset{)(}{\mathbf{D}} = \mathbf{p}\overset{(}{\nabla} = x^i_{,A}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A = \mathbf{g}_A\mathbf{G}^A = \mathbf{g}_i\mathbf{G}^i \qquad (2.3.18a)
$$

经过平移以后，成为

$$\overset{((}{\mathbf{D}} = \mathbf{C}_A\mathbf{G}^A, \quad \overset{))}{\mathbf{D}} = \mathbf{g}_i \overset{-1}{\mathbf{c}^i} \tag{2.3.18a)'}$$

而由(2.3.15)式，可得

$$\overset{()}{\mathbf{D}}{}^* = \overset{(}{\nabla}\mathbf{p} = x^i_{,A}\mathbf{G}^A\mathbf{g}_i = \mathbf{G}^A\mathbf{g}_A = \mathbf{G}^i\mathbf{g}_i \tag{2.3.18b}$$

经过平移以后，成为

$$\overset{((}{\mathbf{D}}{}^* = \mathbf{G}^A\mathbf{C}_A, \quad \overset{))}{\mathbf{D}}{}^* = \overset{-1}{\mathbf{c}^i}\mathbf{g}_i \tag{2.3.18b)'}$$

由(2.3.18)的以上诸式，可得

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{g}_A = \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{G}_A, \quad \mathbf{C}_A = \overset{((}{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{G}_A \\ \mathbf{g}_i = \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{G}_i = \overset{))}{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{c}_i \end{array}\right\} \tag{2.3.19}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{G}^A = \overset{()}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \mathbf{g}^A = \overset{((}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \overset{-1}{\mathbf{C}^A} \\ \mathbf{G}^i = \overset{()}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \mathbf{g}^i, \quad \overset{-1}{\mathbf{c}^i} = \overset{))}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \mathbf{g}^i \end{array}\right\} \tag{2.3.20}$$

(2.3.19) 式说明协变基矢量藉变形梯度 **D** 进行从构形 $\mathscr{R}$ 到 r 的变换，而(2.3.20)说明逆变基矢量藉变形梯度的转置 $\mathbf{D}^*$ 进行逆变换(即从构形 r 到 $\mathscr{R}$ 的变换)。同理由(2.3.16)，可得：

$$\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} = \mathbf{P}\overset{)}{\nabla} = X^A_{,i}\mathbf{G}_A\mathbf{g}^i = \mathbf{G}_i\mathbf{g}^i = \mathbf{G}_A\mathbf{g}^A \tag{2.3.21a}$$

$$\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{D}}} = \mathbf{c}_i\mathbf{g}^i, \quad \overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{D}}} = \mathbf{G}_A\overset{-1}{\mathbf{C}^A} \tag{2.3.21a)'}$$

及由(2.3.17)式可得

$$\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^* = \overset{)}{\nabla}\mathbf{P} = X^A_{,i}\mathbf{g}^i\mathbf{G}_A = \mathbf{g}^i\mathbf{G}_i = \mathbf{g}^A\mathbf{G}_A \tag{2.3.21b}$$

$$\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{D}}}{}^* = \mathbf{g}^i\mathbf{c}_i, \quad \overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{D}}}{}^* = \overset{-1}{\mathbf{C}^A}\mathbf{G}_A \tag{2.3.21b)'}$$

由此得

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{G}_A = \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{g}_A = \overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{C}_A \\ \mathbf{G}_i = \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{c}_i = \overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{g}_i \end{array}\right\} \tag{2.3.22}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{g}^A = \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \mathbf{G}^A, \quad \overset{-1}{\mathbf{C}}{}^A = \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \mathbf{G}^A \\ \mathbf{g}^i = \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \mathbf{G}^i = \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \overset{-1}{\mathbf{c}}{}^i\end{array}\right\} \tag{2.3.23}$$

总结(2.3.19),(2.3.20),(2.3.22),(2.3.23)式,可知:

由构形 $\mathscr{R}$ 到 $\mathscr{r}$ 的变换 ($\mathscr{R} \to \mathscr{r}$): 协变基矢量藉 $\mathbf{D}$ 进行变换,见(2.3.19)式,逆变基矢量藉 $\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^*$ 进行变换,见(2.3.23)式;

由构形 $\mathscr{r}$ 到 $\mathscr{R}$ 的变换 ($\mathscr{r} \to \mathscr{R}$): 协变基矢量藉 $\overset{-1}{\mathbf{D}}$ 进行变换,见(2.3.22)式,逆变基矢量藉 $\mathbf{D}^*$ 进行变换,见(2.3.20)式。

特例: 在刚性旋转情况下,变形梯度 $\mathbf{D}$ 为一正交张量 $\mathbf{Q}$ 即

$$\mathbf{D} = \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^* = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{D}^* = \overset{-1}{\mathbf{D}} = \mathbf{Q}^*$$

故 $\mathbf{Q}$ 又称正交变换。

§2.4 线、面、体元的变换

一、预备公式

设 $\mathbf{B}$ 为任意二阶张量(一点张量), $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 为任意三个矢量,则有公式

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{c}) = \mathscr{J}_3^B \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \tag{2.4.1}$$

式中 $\mathscr{J}_3^B$ 为张量 $\mathbf{B}$ 的第三主不变量,即行列式 $|B^r_{\cdot s}|$。

证 (2.4.1)式的左端等于右端,因为

$$\begin{aligned}
\text{左端} &= (B^i_{\cdot l} a^l \mathbf{g}_i) \times (B^j_{\cdot m} b^m \mathbf{g}_j) \cdot (B^k_{\cdot n} c^n \mathbf{g}_k) \\
&= B^i_{\cdot l} B^j_{\cdot m} B^k_{\cdot n} a^l b^m c^n [\mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_j\, \mathbf{g}_k] \\
&= \varepsilon_{ijk} B^i_{\cdot l} B^j_{\cdot m} B^k_{\cdot n} a^l b^m c^n = \varepsilon_{lmn} |B^r_{\cdot s}| a^l b^m c^n \\
&= \mathscr{J}_3^B [\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}] = \text{右端}
\end{aligned}$$

这里 ε_{ijk} 表示 Eddington 张量, $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ 表示混合积。 [证毕]

此外，还有公式

$$(\mathbf{B}\cdot\mathbf{a})\times(\mathbf{B}\cdot\mathbf{b})=\mathscr{J}_3^B\overset{-1}{\mathbf{B}}{}^*\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \qquad (2.4.2)$$

式中 $\mathscr{J}_3^B\overset{-1}{\mathbf{B}}{}^*$ 称为 $\mathbf{B}$ 的伴随张量。

证 将(2.4.1)式写作

$$\{\mathbf{B}^*\cdot((\mathbf{B}\cdot\mathbf{a})\times(\mathbf{B}\cdot\mathbf{b}))\}\cdot\mathbf{c}=\mathscr{J}_3^B\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$$

因 $\mathbf{c}$ 为任意，故必有

$$\mathbf{B}^*\cdot((\mathbf{B}\cdot\mathbf{a})\times(\mathbf{B}\cdot\mathbf{b}))=\mathscr{J}_3^B\mathbf{a}\times\mathbf{b} \qquad (2.4.2)'$$

用 $\overset{-1}{\mathbf{B}}{}^*$ 点积上式，得

$$(\mathbf{B}\cdot\mathbf{a})\times(\mathbf{B}\cdot\mathbf{b})=\mathscr{J}_3^B\overset{-1}{\mathbf{B}}{}^*\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \qquad \text{即 } (2.4.2)$$

我们也可以直接证明(2.4.2)′式的分量形式，即证明(2.4.2)′式两端的分量相等：

$$\begin{aligned}\text{左端的分量} &= B^{*j}_{\ i}(\varepsilon_{jlm}B^l_{\ s}a^sB^m_{\ t}b^t)\\ &=\varepsilon_{jlm}B^j_{\ i}B^l_{\ s}B^m_{\ t}a^sb^t=\mathscr{J}_3^B\varepsilon_{ist}a^sb^t\\ &=\text{右端的分量}\end{aligned}$$

〔证毕〕

应用举例

例 1 由(2.3.19)式，构形 $\mathscr{R}$ 的 Lagrange 坐标 X^A 中的协变基矢量 $\mathbf{G}_A(A=\text{I, II, III})$①，经过以变形梯度 $\overset{\text{c}}{\mathbf{D}}$ 表示的变换以后，变成 $\mathbf{C}_A$（与构形 r 中的随体协变基矢量 $\mathbf{g}_A$ 大小相等，方向相同）。在(2.4.1)式中令

$$\mathbf{B}=\overset{\text{c}}{\mathbf{D}},\quad \mathbf{a}=\mathbf{G}_{\text{I}},\quad \mathbf{b}=\mathbf{G}_{\text{II}},\quad \mathbf{c}=\mathbf{G}_{\text{III}}$$

则得到

$$\mathbf{C}_{\text{I}}\times\mathbf{C}_{\text{II}}\cdot\mathbf{C}_{\text{III}}=\mathscr{J}_3^D\mathbf{G}_{\text{I}}\times\mathbf{G}_{\text{II}}\cdot\mathbf{G}_{\text{III}}$$

---

① 大写字母的指标有时用罗马数字，即 $A=\text{I, II, III}$，而小写字母指标用阿拉伯数字 $i=1, 2, 3$，以示区别。

即

$$[\mathbf{C}_{\mathrm{I}}\,\mathbf{C}_{\mathrm{II}}\,\mathbf{C}_{\mathrm{III}}] = \mathscr{J}_3^D[\mathbf{G}_{\mathrm{I}}\,\mathbf{G}_{\mathrm{II}}\,\mathbf{G}_{\mathrm{III}}] \tag{2.4.3}$$

此式说明 $\mathbf{D}$ 的第三主不变量 $\mathscr{J}_3^D$ 等于变形后的体积与变形前的体积之比。

例 2 在(2.4.2)式中令 $\mathbf{B}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 同上面的例 1，则得到

$$\mathbf{C}_{\mathrm{I}} \times \mathbf{C}_{\mathrm{II}} = \mathscr{J}_3^D \overset{-1}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot (\mathbf{G}_{\mathrm{I}} \times \mathbf{G}_{\mathrm{II}}) \tag{2.4.4$'$}$$

将此式除以(2.4.3)式，得

$$\overset{-1}{\mathbf{C}}{}^{\mathrm{III}} = \overset{-1}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot \mathbf{G}^{\mathrm{III}} \tag{2.4.4}$$

这正是(2.3.23)式(指标 $A = \mathrm{III}$)。

二、线元的变换

变形前的线元 $d\mathbf{P}$ 在变形后成为 $d\mathbf{p}$。它们的变换关系已见(2.3.11)式。

三、体元的变换

考虑在构形 $\mathscr{R}$ 中由协变基矢量 $\mathbf{G}_{\mathrm{I}}$, $\mathbf{G}_{\mathrm{II}}$, $\mathbf{G}_{\mathrm{III}}$ 组成的体元。由(2.4.3)式可知变形后体积与变形前体积之比为 $\mathscr{J}_3^D$，记作 $\mathscr{J}$。因此变形前体元 dV 与变形后体元 dv 的变换关系为

$$dv = \mathscr{J}\,dV \quad 或 \quad dV = \mathscr{j}\,dv \tag{2.4.5}$$

式中，利用(2.3.14)，(2.3.16)与(1.1.20)式，

$$\begin{aligned} \mathscr{J} &= \mathscr{J}_3^{\overset{\langle\langle}{D}} = \mathscr{J}_3^{\overset{\rangle\rangle}{D}} = |g^A_r x^r_{,B}| = |g^A_r|\,|x^r_{,B}| = \sqrt{\frac{g}{G}}\,|x^r_{,B}| \\ \mathscr{j} &= \mathscr{J}_3^{\overset{-1}{\overset{\rangle\rangle}{D}}} = \mathscr{J}_3^{\overset{-1}{\overset{\langle\langle}{D}}} = |g^I_M X^M_{,J}| = |g^I_M|\,|X^M_{,J}| = \sqrt{\frac{G}{g}}\,|X^M_{,J}| \\ &= \frac{1}{\mathscr{J}} \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

如果我们考虑在构形 $\mathscr{R}$ 中由任意三个线元 $d\underset{1}{\mathbf{P}}$，$d\underset{2}{\mathbf{P}}$，与 $d\underset{3}{\mathbf{P}}$ 构成的体元 dV，则变形后这个体元变成构形 $\mathscr{r}$ 中由 $d\underset{1}{\mathbf{p}}$，$d\underset{2}{\mathbf{p}}$，与 $d\underset{3}{\mathbf{p}}$ 构成的体元 dv，设

$$d\underset{1}{\mathbf{P}} = d\underset{1}{X}^A \mathbf{G}_A, \quad d\underset{2}{\mathbf{P}} = d\underset{2}{X}^B \mathbf{G}_B, \quad d\underset{3}{\mathbf{P}} = d\underset{3}{X}^C \mathbf{G}_C \tag{2.4.7}$$

$$d\underset{1}{\mathbf{p}} = d\underset{1}{x}^i \mathbf{g}_i, \quad d\underset{2}{\mathbf{p}} = d\underset{2}{x}^j \mathbf{g}_j, \quad d\underset{3}{\mathbf{p}} = d\underset{3}{x}^k \mathbf{g}_k \tag{2.4.8}$$

故

$$\begin{aligned} dV &= [d\underset{1}{\mathbf{P}}\ d\underset{2}{\mathbf{P}}\ d\underset{3}{\mathbf{P}}] = [d\underset{1}{X}^A \mathbf{G}_A\ d\underset{2}{X}^B \mathbf{G}_B\ d\underset{3}{X}^C \mathbf{G}_C] \\ &= d\underset{1}{X}^A d\underset{2}{X}^B d\underset{3}{X}^C [\mathbf{G}_A\ \mathbf{G}_B\ \mathbf{G}_C] \\ &= d\underset{1}{X}^A d\underset{2}{X}^B d\underset{3}{X}^C \sqrt{G}\, e_{ABC} \\ &= \sqrt{G}\, |d\underset{I}{X}^A| \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

式中 e_{ABC} 表示置换符号，$|d\underset{I}{X}^A|$ 表示由 $d\underset{I}{X}^A$ 所构成的行列式。同理，

$$dv = [d\underset{1}{\mathbf{p}}\ d\underset{2}{\mathbf{p}}\ d\underset{3}{\mathbf{p}}] = \sqrt{g}\, |d\underset{I}{x}^i| \tag{2.4.10}$$

式中 $|d\underset{I}{x}^i|$ 为由 $d\underset{I}{x}^i$ 所构成的行列式。但

$$d\underset{I}{x}^i = x^i_{,A} d\underset{I}{X}^A, \quad |d\underset{I}{x}^i| = |x^i_{,A}|\,|d\underset{I}{X}^A|$$

故利用(2.4.10)与(2.4.9)式，可得

$$dv = \sqrt{g}\, |x^i_{,A}|\,|d\underset{I}{X}^A| = \sqrt{\frac{g}{G}}\, |x^i_{,A}|\, dV = \mathscr{J} dV$$

式中 $\mathscr{J}$ 同(2.4.6)之第一式，同理可证 $dV = \mathscr{j}\, dv$。

可以有更简便的证明：

$$dv = d\underset{1}{\mathbf{p}} \times d\underset{2}{\mathbf{p}} \cdot d\underset{3}{\mathbf{p}} = (\overset{\asymp}{\mathbf{D}} \cdot d\underset{1}{\mathbf{P}}) \times (\overset{\asymp}{\mathbf{D}} \cdot d\underset{2}{\mathbf{P}}) \cdot (\overset{\asymp}{\mathbf{D}} \cdot d\underset{3}{\mathbf{P}})$$

$$= (\overset{D}{\mathbf{I}} \cdot d\underset{1}{\mathbf{p}}) \times (\overset{D}{\mathbf{I}} \cdot d\underset{2}{\mathbf{p}}) \cdot (\overset{D}{\mathbf{I}} \cdot d\underset{3}{\mathbf{p}})$$

$$= (\overset{C}{\mathbf{D}} \cdot d\underset{1}{\mathbf{P}}) \times (\overset{C}{\mathbf{D}} \cdot d\underset{2}{\mathbf{P}}) \cdot (\overset{C}{\mathbf{D}} \cdot d\underset{3}{\mathbf{P}})$$

利用(2.4.1)式，上式变成

$$dv = \mathscr{J}_3^D d\underset{1}{\mathbf{P}} \times d\underset{2}{\mathbf{P}} \cdot d\underset{3}{\mathbf{P}} = \mathscr{J}_3^D dV$$

即(2.4.5)之第一式，同理可得(2.4.5)之第二式。

我们规定恒采用右手坐标系。由连续性公理，恒有 $\mathscr{J} > 0$。

习题 2.2 以 jac 与 $(\text{jac})^{-1}$ 表示 Jacobian 行列式及其逆

$$\text{jac} = |x^i_{,A}|, \quad (\text{jac})^{-1} = |X^A_{,i}|$$

证明

$$\frac{\partial(\text{jac})}{\partial x^i_{,A}} = (\text{jac})X^A_{,i}, \quad \frac{\partial(\text{jac})^{-1}}{\partial X^A_{,i}} = (\text{jac})^{-1}x^i_{,A}$$

习题 2.3 证明等式：

$$\frac{d}{dx^i}(|X^K_{,r}|x^i_{,A}) = 0, \quad \frac{d}{dX^A}(|x^r_{,K}|X^A_{,i}) = 0$$

【提示】利用习题 2.2 的结果，可得

$$\frac{d}{dx^i}(|X^K_{,r}|x^i_{,A}) = \frac{d}{dx^i}[(\text{jac})^{-1}x^i_{,A}]$$

$$= \frac{\partial(\text{jac})^{-1}}{\partial X^K_{,r}} X^K_{,ri}x^i_{,A} + (\text{jac})^{-1}x^i_{,AM}X^M_{,i}$$

$$= (\text{jac})^{-1}[x^r_{,K}X^K_{,ri}x^i_{,A} + x^r_{,AK}X^K_{,r}]$$

$$= (\text{jac})^{-1}\frac{d}{dX^A}(x^r_{,K}X^K_{,r}) = 0$$

习题 2.4 证明等式

$$\varepsilon_{rst}\mathscr{J} = \varepsilon_{ABC}X^A_{,r}X^B_{,s}X^C_{,t}$$

$$\varepsilon_{ABC}\mathscr{J} = \varepsilon_{rst}x^r_{,A}x^s_{,B}x^t_{,C}$$

式中 ε_{ABC} 与 ε_{rst} 各表示构形 $\mathscr{R}$ 与 ι 中的 Eddington 张量。

【提示】利用(2.4.6)式。

四、面元的变换

考虑由 Lagrange 坐标系中两个协变基矢量构成的面元，以方向垂直于面元且其大小等于面元面积之矢量表示。在变形前构形 $\mathscr{R}$ 中的面元 $\mathbf{G}_{\mathrm{I}}\times\mathbf{G}_{\mathrm{II}}$，在变形后变成构形 $\mathscr{r}$ 中的面元 $\mathbf{g}_{\mathrm{I}}\times\mathbf{g}_{\mathrm{II}}$，平移至 $\mathscr{R}$ 中成为 $\mathbf{C}_{\mathrm{I}}\times\mathbf{C}_{\mathrm{II}}$。由(2.4.2)式，令其中 $\mathbf{B}=\overset{\ll}{\mathbf{D}}$，并利用(2.3.19)与(2.4.6)式，得到

$$\mathbf{C}_{\mathrm{I}}\times\mathbf{C}_{\mathrm{II}}=\mathscr{J}\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{D}}}{}^{*}\cdot(\mathbf{G}_{\mathrm{I}}\times\mathbf{G}_{\mathrm{II}})\tag{2.4.11}$$

同理可得 $\mathbf{C}_{\mathrm{II}}\times\mathbf{C}_{\mathrm{III}}$ 与 $\mathbf{C}_{\mathrm{III}}\times\mathbf{C}_{\mathrm{I}}$ 的公式。

如果考虑在构形 $\mathscr{R}$ 中由任意两个线元 $\underset{4}{d}\mathbf{P}$ 和 $\underset{5}{d}\mathbf{P}$ 所构成的面元，可证明类似于(2.4.11)的面元变换公式：

$$\overset{\langle}{d\mathbf{a}}=\mathscr{J}\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{D}}}{}^{*}\cdot d\overset{\langle}{\mathbf{A}}\tag{2.4.12}$$

即

$$\overset{\rangle}{d\mathbf{a}}=\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}}\cdot\overset{\langle}{d\mathbf{a}}=\mathscr{J}\overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^{*}\cdot d\overset{\langle}{\mathbf{A}}\tag{2.4.13}$$

式(2.4.13)称为 Nanson 公式。

证明如下：

变形前的面元

$$d\overset{\langle}{\mathbf{A}}=\underset{4}{d}\mathbf{P}\times\underset{5}{d}\mathbf{P}\tag{2.4.14a}$$

变形后成为

$$\overset{\rangle}{d\mathbf{a}}=\underset{4}{d}\mathbf{p}\times\underset{5}{d}\mathbf{p}\tag{2.4.14b}$$

式中

$$\underset{4}{d}\mathbf{p}=\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}\cdot\underset{4}{d}\mathbf{P},\quad \underset{5}{d}\mathbf{p}=\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}\cdot\underset{5}{d}\mathbf{P}$$

将(2.4.14b)式自构形 $\mathscr{r}$ 平移到构形 $\mathscr{R}$ 中，成为

$$d\overset{(}{\mathbf{a}} = \underset{4}{d}\overset{(}{\mathbf{p}} \times \underset{5}{d}\overset{(}{\mathbf{p}} = (\overset{()}{\mathbf{I}} \cdot \underset{4}{d}\mathbf{p}) \times (\overset{()}{\mathbf{I}} \cdot \underset{5}{d}\mathbf{p})$$

$$= (\overset{((}{\mathbf{D}} \cdot \underset{4}{d}\mathbf{P}) \times (\overset{((}{\mathbf{D}} \cdot \underset{5}{d}\mathbf{P})$$

$$= \mathscr{J}\overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot (\underset{4}{d}\mathbf{P} \times \underset{5}{d}\mathbf{P})$$

即

$$d\overset{(}{\mathbf{a}} = \mathscr{J}\overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot d\overset{(}{\mathbf{A}} \qquad \text{即 (2.4.12) 式}$$

(2.4.13)式的逆变换为

$$d\overset{(}{\mathbf{A}} = \mathscr{j}\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*} \cdot d\overset{)}{\mathbf{a}} \tag{2.4.15}$$

(2.4.13)与(2.4.15)式的分量形式各为

$$da_i = \mathscr{J}(\partial_i X^M)dA_M \tag{2.4.16}$$

与

$$dA_M = \mathscr{j}(\partial_M x^i)da_i \tag{2.4.17}$$

线元、面元的变换公式(2.3.11),(2.4.12)及(2.4.13),与体元变换公式(2.4.5)之间是有联系的。想象在构形 $\mathscr{R}$ 中有一以 $d\mathbf{A}$ 为截面、以 $d\mathbf{P}$ 为斜高的柱体,则其体积为

$$dV = d\mathbf{P} \cdot d\overset{(}{\mathbf{A}}$$

在变形之后此柱体变成在构形 $\mathscr{r}$ 中一以 $d\mathbf{a}$ 为截面、以 $d\mathbf{p}$ 为斜高的柱体,其体积为

$$dv = d\mathbf{p} \cdot d\overset{)}{\mathbf{a}}$$

将(2.3.11)式的 $d\mathbf{p}$ 与(2.4.13)式的 $d\overset{)}{\mathbf{a}}$ 代入后,得到

$$dv = d\mathbf{P} \cdot \overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*} \cdot (\mathscr{J}\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot d\overset{(}{\mathbf{A}}) = \mathscr{J}\, d\mathbf{P} \cdot d\overset{(}{\mathbf{A}}$$

因此得到 $dv = \mathscr{J}\, dV$,即体元变换公式(2.4.5)

习题 2.5 利用习题 2.4 的结果,由 (2.4.14) 式的分量形式证明(2.4.16)与(2.4.17)式

五、Euler-Neumann 等式

在构形 $\mathscr{r}$ 中取任意一封闭曲面 $\mathscr{a}$，其内所包含的域为 $\mathscr{v}$。在封闭曲面 $\mathscr{a}$ 上的面元的积分应为零，即

$$\oint_{\mathscr{a}} d\vec{\mathbf{a}} = 0$$

为了证明此式，只须在构形 $\mathscr{r}$ 中应用 Green 公式：

$$\oint_{\mathscr{a}} d\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\vec{\mathbf{I}}} = \oint_{\mathscr{v}} dv \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\mathbf{I}}}$$

而显然 $\vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\mathbf{I}}} = \mathbf{0}$。应用面元变换公式(2.4.13)，可将上式改写为

$$\oint_{\mathscr{A}} \mathscr{J} \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^* \cdot d\overleftarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$$

这里 $\mathscr{A}$ 和下文中的 $\mathscr{V}$ 各表示在构形 $\mathscr{R}$ 中对应于构形 $\mathscr{r}$ 中 $\mathscr{a}$ 的封闭曲面与对应于 $\mathscr{v}$ 的域。将上式积分号下的张量 $\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^*$ 平移至构形 $\mathscr{R}$ 中，得到

$$\oint_{\mathscr{A}} \mathscr{J} \overset{-1}{\overleftarrow{\overleftarrow{\mathbf{D}}}}{}^* \cdot d\overleftarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{0} \quad 即 \quad \oint_{\mathscr{A}} d\overleftarrow{\mathbf{A}} \cdot (\mathscr{J} \overset{-1}{\overleftarrow{\overleftarrow{\mathbf{D}}}}) = \mathbf{0}$$

利用构形 $\mathscr{R}$ 中的 Green 公式，得到

$$\int_{\mathscr{V}} dV \overleftarrow{\square} \cdot (\mathscr{J} \overset{-1}{\overleftarrow{\overleftarrow{\mathbf{D}}}}) = \mathbf{0}$$

这里我们使用了 $\overleftarrow{\square}$ 来代替 $\overleftarrow{\nabla}$，是因为考虑到 $\mathscr{J} \overset{-1}{\overleftarrow{\overleftarrow{\mathbf{D}}}}$ 可以仅是 X^A 的函数，也可以通过 x^i 而依赖于 X^A（因 $x^i = x^i(X^A, t)$）。由于积分域 $\mathscr{V}$ 为任意，故必有

$$\overleftarrow{\square} \cdot (\mathscr{J} \overset{-1}{\overleftarrow{\overleftarrow{\mathbf{D}}}}) = \mathbf{0} \tag{2.4.18}$$

同理可证

$$\vec{\square} \cdot (\mathscr{j} \vec{\vec{\mathbf{D}}}) = \mathbf{0} \tag{2.4.19}$$

由于转移张量可以移进或移出 $\square$ 号，故以上两式可写作

$$\overset{(}{\square}\cdot(\mathscr{J}\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}})=0,\quad \overset{)}{\square}\cdot(\jmath\overset{)(}{\mathbf{D}})=0 \tag{2.4.20}$$

此即为 Euler-Neumann 等式，其分量形式为

$$\square_A(\mathscr{J}X_{;i}^A)=0,\quad \square_i(\jmath x_{;A}^i)=0 \tag{2.4.21}$$

习题 2.6 利用(1.2.15)，(1.2.18)式验算(2.4.21)式。

[提示] 利用(2.4.6)式及习题 2.2 的结果。

习题 2.7 利用 Euler-Neumann 等式(2.4.21)证明习题 2.3。

§2.5 Cauchy-Green 变形张量、长度比、面积比、体积比与剪切

在§2.4 中我们看到线元、面元、体元的变换取决于变形梯度 $\mathbf{D}$ 和 $\overset{-1}{\mathbf{D}}$。变形梯度完全决定了介质的变形与旋转。在本节中我们讨论长度、面积、体积与夹角的变化，这些变化只反映了介质的变形，而与旋转无关。

一、Cauchy-Green 变形张量

由线元变换关系(2.3.11)式：

$$d\mathbf{p}=\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot d\mathbf{P}=d\mathbf{P}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^* \tag{2.3.11}$$

$$d\mathbf{P}=\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot d\mathbf{p}=d\mathbf{p}\cdot\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^*$$

可得线元 $d\mathbf{p}$ 的长度平方

$$(ds)^2=d\mathbf{p}\cdot d\mathbf{p}=(d\mathbf{p})^2=(\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot d\mathbf{P})\cdot(\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot d\mathbf{P})$$

$$=d\mathbf{P}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^*\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot d\mathbf{P}$$

上式与(2.2.18)式比较，并注意 $\overset{((}{\mathbf{C}}$ 与 $\overset{()}{\mathbf{D}}{}^*\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}$ 都是对称张量，可知

$$
\begin{aligned}
\overset{((}{\mathbf{C}} &= \overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*} \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}} = \overset{((}{\mathbf{D}}{}^{*} \cdot \overset{((}{\mathbf{D}} \\
\overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{C}}} &= \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} \cdot \overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^{*} = \overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{D}}} \cdot \overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{D}}}{}^{*}
\end{aligned}
\tag{2.5.1}
$$

因 $(ds)^2$ 恒正，故 Green（或右 Cauchy-Green）变形张量 $\overset{((}{\mathbf{C}}$ 及其逆 $\overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{C}}}$ 均为正张量。同理，

$$
(dS)^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = (d\mathbf{P})^2 = d\mathbf{p} \cdot \overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} \cdot d\mathbf{p}
$$

上式与(2.2.30)式比较，并注意 $\overset{))}{\mathbf{c}}$ 与 $\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}$均为对称张量，得

$$
\begin{aligned}
\overset{))}{\mathbf{c}} &= \overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} = \overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot \overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{D}}} \\
\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{c}}} &= \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*} = \overset{))}{\mathbf{D}} \cdot \overset{))}{\mathbf{D}}{}^{*}
\end{aligned}
\tag{2.5.2}
$$

因 $(dS)^2$ 恒正，故 Cauchy 变形张量 $\overset{))}{\mathbf{c}}$ 与其逆即左 Cauchy-Green 变形张量 $\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{c}}}$ 均为正张量。

为了要写出(2.5.1)与(2.5.2)式的分量形式，只需将(2.3.14)—(2.3.17)式代入，或者只需注意到由 § 2.2，

$$
C_{AB} = g_{AB}, \quad \overset{-1}{C}{}^{AB} = g^{AB}
$$

$$
c_{ij} = G_{ij}, \quad \overset{-1}{c}{}^{ij} = G^{ij}
$$

利用(2.2.17)与(2.2.29)式得到：

$$
C_{AB} = g_{AB} = g_{ij} x^i_{,A} x^j_{,B} \tag{2.5.3}
$$

$$
\overset{-1}{C}{}^{AB} = g^{AB} = g^{ij} X^A_{,i} X^B_{,j} \tag{2.5.4}
$$

$$
c_{ij} = G_{ij} = G_{AB} X^A_{,i} X^B_{,j} \tag{2.5.5}
$$

$$
\overset{-1}{c}{}^{ij} = G^{ij} = G^{AB} x^i_{,A} x^j_{,B} \tag{2.5.6}
$$

(2.5.3)、(2.5.4)式是张量等式(2.5.1)的分量式；(2.5.5)，(2.5.6)式是张量等式(2.5.2)的分量式。

二、长度比

设在变形前构形 $\mathscr{R}$ 中某点处有一线元 $d\mathbf{P}$，以 $\mathbf{N}$ 表示沿 $d\mathbf{P}$ 方向的单位矢量：

$$\mathbf{N}=\frac{d\mathbf{P}}{|d\mathbf{P}|} \tag{2.5.7}$$

由(2.2.18)式，变形后线元 $d\mathbf{p}$ 长度的平方为

$$(ds)^2=(d\mathbf{p})^2=d\mathbf{P}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{C}}\cdot d\mathbf{P}=C_{AB}dX^AdX^B$$

定义沿 $\mathscr{R}$ 中 $\mathbf{N}$ 方向之长度比为线元变形后与变形前长度之比值，记作 $\lambda_{\mathbf{N}}$ 或 $\lambda(\mathbf{N})$，则

$$\lambda_{\mathbf{N}}=\lambda(\mathbf{N})=\frac{|d\mathbf{p}|}{|d\mathbf{P}|}=\frac{\sqrt{(ds)^2}}{|d\mathbf{P}|}=\sqrt{\frac{d\mathbf{P}}{|d\mathbf{P}|}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{C}}\cdot\frac{d\mathbf{P}}{|d\mathbf{P}|}}$$

$$=\sqrt{\mathbf{N}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{N}}=\sqrt{C_{MN}N^MN^N} \tag{2.5.8}$$

式中根号内的

$$\mathbf{N}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{N}=C_{MN}N^MN^N$$

称为张量 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 沿 $\mathbf{N}$ 的法分量。因为 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 为正张量，故有方根，记作 $\overset{1/2}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}$，亦为正张量。因此，

$$\mathbf{N}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{N}=\mathbf{N}\cdot\overset{1/2}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}\cdot\overset{1/2}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}\cdot\mathbf{N}=(\overset{1/2}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}\cdot\mathbf{N})\cdot(\overset{1/2}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}\cdot\mathbf{N})$$

而(2.5.8)式可写作

$$\lambda_{\mathbf{N}}=|\overset{1/2}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}\cdot\mathbf{N}| \tag{2.5.9}$$

如取 $\underset{\text{I}}{\mathbf{N}}$，$\underset{\text{II}}{\mathbf{N}}$，$\underset{\text{III}}{\mathbf{N}}$ 为沿坐标线 $X^A(A=\text{I},\text{II},\text{III})$ 方向的单位矢量，即

$$\underset{\text{I}}{\mathbf{N}}=\frac{1}{\sqrt{G_{\text{II}}}}\mathbf{G}_{\text{I}},\quad \underset{\text{II}}{\mathbf{N}}=\frac{1}{\sqrt{G_{\text{II II}}}}\mathbf{G}_{\text{II}},\quad \underset{\text{III}}{\mathbf{N}}=\frac{1}{\sqrt{G_{\text{III III}}}}\mathbf{G}_{\text{III}}$$

则沿坐标线 X^A 方向的长度比为

$$
\underset{\mathrm{I}}{\lambda}=\lambda(\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}})=\sqrt{\frac{C_{\mathrm{I\,I}}}{G_{\mathrm{I\,I}}}},\quad \underset{\mathrm{II}}{\lambda}=\lambda(\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}})=\sqrt{\frac{C_{\mathrm{II\,II}}}{G_{\mathrm{II\,II}}}},
$$

$$
\underset{\mathrm{III}}{\lambda}=\lambda(\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}})=\sqrt{\frac{C_{\mathrm{III\,III}}}{G_{\mathrm{III\,III}}}} \tag{2.5.10}
$$

定义沿 $\mathscr{R}$ 中 $\mathbf{N}$ 方向的单位伸长为

$$
\Delta_{\mathbf{N}}=\frac{|d\mathbf{p}|-|d\mathbf{P}|}{|d\mathbf{P}|}=\lambda_{\mathbf{N}}-1 \tag{2.5.11}
$$

它表示每单位长度的伸长量。

设在变形后构形 r 中某点处有一线元 $d\mathbf{p}$,以 $\mathbf{n}$ 表示沿线元 $d\mathbf{p}$ 方向的单位矢量:

$$
\mathbf{n}=\frac{d\mathbf{p}}{|d\mathbf{p}|} \tag{2.5.12}
$$

由(2.2.30)式

$$
(dS)^2=(d\mathbf{P})^2=d\mathbf{p}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{c}}\cdot d\mathbf{p}=c_{ij}dx^idx^j
$$

定义沿 r 中 $\mathbf{n}$ 方向之长度比为线元变形后与变形前长度之比值,记作 $\lambda_{\mathbf{n}}$ 或 $\lambda(\mathbf{n})$,则

$$
\lambda_{\mathbf{n}}=\frac{|d\mathbf{p}|}{|d\mathbf{P}|}=\frac{1}{\dfrac{|d\mathbf{P}|}{|d\mathbf{p}|}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{d\mathbf{p}}{|d\mathbf{p}|}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{c}}\cdot\dfrac{d\mathbf{p}}{|d\mathbf{p}|}}}
$$

$$
=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{n}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{n}}}=\frac{1}{\sqrt{c_{rs}n^rn^s}} \tag{2.5.13}
$$

式中分母根号内的

$$
\mathbf{n}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{n}=c_{rs}n^rn^s
$$

称为张量 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}$ 沿 $\mathbf{n}$ 的法分量。因为 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}$ 是正张量,故有方根,记作 $\overset{1/2}{\overset{\gg}{\mathbf{c}}}$,亦为正张量。因此,

$$\mathbf{n}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{n}=(\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{1/2}\cdot\mathbf{n})\cdot(\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{1/2}\cdot\mathbf{n})$$

而(2.5.13)式可写作

$$\lambda_{\mathbf{n}}=\frac{1}{\left|\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{1/2}\cdot\mathbf{n}\right|}\tag{2.5.14}$$

如取 $\underset{1}{\mathbf{n}}$, $\underset{2}{\mathbf{n}}$, $\underset{3}{\mathbf{n}}$ 为沿坐标线 $x^i(i=1,2,3)$ 方向的单位矢量，即

$$\underset{1}{\mathbf{n}}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\mathbf{g}_1,\quad \underset{2}{\mathbf{n}}=\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\mathbf{g}_2,\quad \underset{3}{\mathbf{n}}=\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\mathbf{g}_3$$

则沿坐标线 x^i 方向的长度比为

$$\begin{aligned}&\underset{1}{\lambda}=\lambda(\underset{1}{\mathbf{n}})=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{c_{11}}{g_{11}}}},\quad \underset{2}{\lambda}=\lambda(\underset{2}{\mathbf{n}})=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{c_{22}}{g_{22}}}},\\ &\underset{3}{\lambda}=\lambda(\underset{3}{\mathbf{n}})=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{c_{33}}{g_{33}}}}\end{aligned}\tag{2.5.15}$$

沿•中 $\mathbf{n}$ 方向的单位伸长为

$$\Delta_{\mathbf{n}}=\lambda_{\mathbf{n}}-1\tag{2.5.16}$$

特例，设物体作刚体运动，则

$$(ds)^2=C_{AB}dX^AdX^B=(dS)^2=G_{AB}dX^AdX^B$$

故

$$C_{AB}=G_{AB},\quad \overset{\ll}{\mathbf{C}}=C_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B=G_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B=\overset{\ll}{\mathbf{I}}\tag{2.5.16$'$}$$

及

$$(ds)^2=g_{ij}dx^idx^j=(dS)^2=c_{ij}dx^idx^j$$

故

$$c_{ij}=g_{ij},\quad \overset{\gg}{\mathbf{c}}=c_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j=g_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j=\overset{\gg}{\mathbf{I}}\tag{2.5.16$''$}$$

三、体积比

由(2.4.6)式，体积比 $\mathscr{J}$ 及其倒数 $\mathscr{j}$ 为

$$
\begin{aligned}
\mathscr{J}&=\frac{dv}{dV}=\mathscr{J}_3^{\overset{\ll}{D}}=\mathscr{J}_3^{\overset{\gg}{D}}=\sqrt{\frac{g}{G}}\,|x^k_{,B}| \\
\mathscr{j}&=\frac{dV}{dv}=\mathscr{J}_3^{\overset{-1}{\overset{\gg}{D}}}=\mathscr{J}_3^{\overset{-1}{\overset{\ll}{D}}}=\sqrt{\frac{G}{g}}\,|X^M_{,l}|=\frac{1}{\mathscr{J}}
\end{aligned}
\tag{2.4.6}
$$

但由(2.5.1)式

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{J}_3^{\overset{\ll}{C}}=\mathscr{J}_3(\overset{\ll}{\mathbf{C}})=\mathscr{J}_3(\overset{\ll}{\mathbf{D}}^*)\mathscr{J}_3(\overset{\ll}{\mathbf{D}})=\mathscr{J}^2 \\
&\mathscr{J}_3^{\overset{-1}{\overset{\ll}{C}}}=\mathscr{J}_3(\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}})=\mathscr{J}_3(\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{D}}}{}^*)\mathscr{J}_3(\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{D}}}{}^*)=\mathscr{j}^2
\end{aligned}
\tag{2.5.17}
$$

及由(2.5.2)式

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{J}_3^{\overset{\gg}{c}}=\mathscr{J}_3(\overset{\gg}{\mathbf{c}})=\mathscr{J}_3(\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{D}}}{}^*)\mathscr{J}_3(\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{D}}})=\mathscr{j}^2 \\
&\mathscr{J}_3^{\overset{-1}{\overset{\gg}{c}}}=\mathscr{J}_3(\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{c}}})=\mathscr{J}_3(\overset{\gg}{\mathbf{D}})\mathscr{J}_3(\overset{\gg}{\mathbf{D}}{}^*)=\mathscr{J}^2
\end{aligned}
\tag{2.5.18}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\mathscr{J}&=\sqrt{\mathscr{J}_3(\overset{\ll}{\mathbf{C}})}=\sqrt{\mathscr{J}_3(\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{c}}})} \\
\mathscr{j}&=\sqrt{\mathscr{J}_3(\overset{\gg}{\mathbf{c}})}=\sqrt{\mathscr{J}_3(\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}})}
\end{aligned}
\tag{2.5.19}
$$

其值均由 Cauchy-Green 张量 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 或 $\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{c}}}$ 决定。

四、面积比

在构形 $\mathscr{R}$ 中取 $\mathbf{N}$ 为沿面元 $d\overset{\langle}{\mathbf{A}}$法线方向的单位矢量。面元 $d\overset{\langle}{\mathbf{A}}$ 变形后成为构形 $\mathscr{r}$ 中的 $d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}$，其法线方向单位矢量为 $\mathbf{n}$。定义面积比 $\sigma_{\mathbf{N}}$，或记作 $\sigma(\mathbf{N})$，为面元变形后与变形前面积之比：

$$\sigma_{\mathbf{N}} = \sigma(\mathbf{N}) = \frac{|d\mathbf{a}|}{|d\overset{\langle}{\mathbf{A}}|} = \frac{\sqrt{d\mathbf{a} \cdot d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}}}{|d\overset{\langle}{\mathbf{A}}|}$$

将(2.4.13)式 $d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}$ 代入以后，并利用(2.5.1)式，得

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathbf{N}} = \sigma(\mathbf{N}) &= \frac{\sqrt{(\mathscr{J}\overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot d\overset{\langle}{\mathbf{A}}) \cdot (\mathscr{J}\overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot d\overset{\langle}{\mathbf{A}})}}{|d\overset{\langle}{\mathbf{A}}|} \\
&= \mathscr{J}\sqrt{(\overset{-1}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot \mathbf{N}) \cdot (\overset{-1}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot \mathbf{N})} \\
&= \mathscr{J}\sqrt{\mathbf{N} \cdot \overset{-1}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{D}}} \cdot \overset{-1}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot \mathbf{N}} = \mathscr{J}\sqrt{\mathbf{N} \cdot \overset{-1}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{N}} \\
&= \mathscr{J}\sqrt{\overset{-1}{C}_{MN} N^M N^N} = \mathscr{J}|\overset{-1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{N}|
\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

特例，取 $\mathscr{R}$ 中 $\{X^A\}$ 坐标系的协变基矢量 $\mathbf{G}_{\mathrm{I}}$ 与 $\mathbf{G}_{\mathrm{II}}$ 构成的面元，其法线方向平行于逆变基矢量 $\mathbf{G}^{\mathrm{III}}$ 故

$$\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}} = \frac{1}{|\mathbf{G}^{\mathrm{III}}|} \mathbf{G}^{\mathrm{III}}$$

$$\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}} \cdot \overset{-1}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}} \cdot \overset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}} = \frac{1}{G^{\mathrm{III\,III}}} \mathbf{G}^{\mathrm{III}} \cdot \overset{-1}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{G}^{\mathrm{III}} = \frac{1}{G^{\mathrm{III\,III}}} \overset{-1}{C}{}^{\mathrm{III\,III}}$$

故由(2.5.20)式

$$\sigma(\overset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}) = \mathscr{J}\sqrt{\frac{1}{G_{\mathrm{III\,III}}} \overset{-1}{C}{}^{\mathrm{III\,III}}} \tag{2.5.21}$$

我们也可把面积比 σ 通过 κ 构形中的法向单位矢量 $\mathbf{n}$ 与张量 $\overset{-1}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}}$ 表示，这里

$$\mathbf{n} = \frac{d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}}{|d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}|}$$

利用(2.4.15)与(2.5.2)式，可得

$$\sigma_n = \sigma(\mathbf{n}) = \frac{|d\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}|}{|d\overset{\leftarrow}{\mathbf{A}}|} = \frac{|d\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}|}{\sqrt{d\overset{\leftarrow}{\mathbf{A}} \cdot d\overset{\leftarrow}{\mathbf{A}}}}$$

$$= \frac{|d\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}|}{\sqrt{(\mathscr{J}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{D}}{}^* \cdot d\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}) \cdot (\mathscr{J}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{D}}{}^* \cdot d\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}})}}$$

$$= \frac{1}{\mathscr{J}\sqrt{\mathbf{n} \cdot \overset{\Rightarrow}{\mathbf{D}} \cdot \overset{\Rightarrow}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \mathbf{n}}} = \frac{1}{\mathscr{J}\sqrt{\mathbf{n} \cdot \overset{-1}{\overset{\Rightarrow}{\mathbf{c}}} \cdot \mathbf{n}}}$$

$$= \frac{1}{\mathscr{J}\sqrt{\overset{-1}{c}{}^{rs} n_r n_s}} = \frac{1}{\mathscr{J}\left|\overset{-1/2}{\overset{\Rightarrow}{\mathbf{c}}} \cdot \mathbf{n}\right|} \tag{2.5.22}$$

特例，取 $\mathscr{r}$ 中 $\{x^i\}$ 坐标系的协变基矢量 $\mathbf{g}_1$ 与 $\mathbf{g}_2$ 构成的面元，其法线方向平行于逆变基矢量 $\mathbf{g}^3$，故

$$\overset{3}{\mathbf{n}} = \frac{1}{|\mathbf{g}^3|}\mathbf{g}^3$$

$$\overset{3}{\mathbf{n}} \cdot \overset{-1}{\overset{\Rightarrow}{\mathbf{c}}} \cdot \overset{3}{\mathbf{n}} = \frac{1}{g^{33}}\mathbf{g}^3 \cdot \overset{-1}{\overset{\Rightarrow}{\mathbf{c}}} \cdot \mathbf{g}^3 = \frac{1}{g^{33}}\overset{-1}{c}{}^{33}$$

故由(2.5.22)式

$$\sigma(\overset{3}{\mathbf{n}}) = \frac{1}{\mathscr{J}\sqrt{\frac{1}{g^{33}}\overset{-1}{c}{}^{33}}} \tag{2.5.23}$$

五、剪切

设构形 $\mathscr{R}$ 中有两线元 $d\underset{1}{\mathbf{P}}$ 与 $d\underset{2}{\mathbf{P}}$，沿线元方向的单位矢量为

$$\underset{1}{\mathbf{N}} = \frac{1}{|d\underset{1}{\mathbf{P}}|}d\underset{1}{\mathbf{P}}, \quad \underset{2}{\mathbf{N}} = \frac{1}{|d\underset{2}{\mathbf{P}}|}d\underset{2}{\mathbf{P}}$$

变形后，线元 $d\underset{1}{\mathbf{P}}$ 与 $d\underset{2}{\mathbf{P}}$ 变成构形 $\mathscr{r}$ 中的线元 $d\underset{1}{\mathbf{p}}$ 与 $d\underset{2}{\mathbf{p}}$，沿它们方

向的单位矢量为

$$\underset{1}{\mathbf{n}}=\frac{1}{|d\underset{1}{\mathbf{p}}|}d\underset{1}{\mathbf{p}},\quad \underset{2}{\mathbf{n}}=\frac{1}{|d\underset{2}{\mathbf{p}}|}d\underset{2}{\mathbf{p}}$$

设变形前 $\underset{1}{\mathbf{N}}$ 与 $\underset{2}{\mathbf{N}}$ 的夹角为 Θ，故

$$\cos\Theta=\underset{1}{\mathbf{N}}\cdot\underset{2}{\mathbf{N}}=\underset{1}{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{I}\cdot\underset{2}{\mathbf{N}}$$

变形后 $\underset{1}{\mathbf{n}}$ 与 $\underset{2}{\mathbf{n}}$ 的夹角为

$$\theta=\Theta-\gamma$$

式中 γ 为夹角的减小值，称为剪切角。 利用(2.3.11)与(2.5.1)式，可得

$$\begin{aligned}\cos\theta=\cos(\Theta-\gamma)&=\underset{1}{\mathbf{n}}\cdot\underset{2}{\mathbf{n}}=\frac{1}{|d\underset{1}{\mathbf{p}}||d\underset{2}{\mathbf{p}}|}d\underset{1}{\mathbf{p}}\cdot d\underset{2}{\mathbf{p}}\\
&=\frac{1}{|d\underset{1}{\mathbf{p}}||d\underset{2}{\mathbf{p}}|}(\mathbf{D}\cdot d\underset{1}{\mathbf{P}})\cdot(\mathbf{D}\cdot d\underset{2}{\mathbf{P}})\\
&=\frac{|d\underset{1}{\mathbf{P}}|}{|d\underset{1}{\mathbf{p}}|}\frac{|d\underset{2}{\mathbf{P}}|}{|d\underset{2}{\mathbf{p}}|}(\mathbf{D}\cdot\underset{1}{\mathbf{N}})(\mathbf{D}\cdot\underset{2}{\mathbf{N}})\\
&=\frac{1}{\lambda(\underset{1}{\mathbf{N}})\lambda(\underset{2}{\mathbf{N}})}\underset{1}{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{C}\cdot\underset{2}{\mathbf{N}}\\
&=\frac{1}{\lambda(\underset{1}{\mathbf{N}})\lambda(\underset{2}{\mathbf{N}})}C_{MN}\underset{1}{N^M}\underset{2}{N^N}\end{aligned}\tag{2.5.24}$$

特例

1. 若两线元 $d\underset{1}{\mathbf{P}}$ 与 $d\underset{2}{\mathbf{P}}$ 重合，则 $\underset{1}{\mathbf{N}}=\underset{2}{\mathbf{N}}$，$\Theta=0$，$\theta=0$，由(2.5.24)式可导出长度比(2.5.8)式。

2. 若两线元 $d\underset{1}{\mathbf{P}}$ 与 $d\underset{2}{\mathbf{P}}$ 互相垂直，即 $\Theta=\pi/2$，则由 (2.5.24)

式，

$$\cos\theta = \sin\gamma = \frac{1}{\lambda(\underset{1}{\mathbf{N}})\lambda(\underset{2}{\mathbf{N}})}\underset{1}{\mathbf{N}}\cdot\overset{((}{\mathbf{C}}\cdot\underset{2}{\mathbf{N}}$$

式中的 $\underset{1}{\mathbf{N}}\cdot\overset{((}{\mathbf{C}}\cdot\underset{2}{\mathbf{N}}$ 称为张量 $\mathbf{C}$ 在 $\underset{1}{\mathbf{N}}$，$\underset{2}{\mathbf{N}}$ 方向的剪分量。

若已知在变形后的构形 κ 中的两线元方向 $\underset{1}{\mathbf{n}}$ 与 $\underset{2}{\mathbf{n}}$ 和它们的夹角 θ，则利用(2.3.11)与(2.5.2)式可得

$$\begin{aligned}
\cos\Theta &= \cos(\theta+\gamma) = \underset{1}{\mathbf{N}}\cdot\underset{2}{\mathbf{N}} = \frac{1}{|d\underset{1}{\mathbf{P}}||d\underset{2}{\mathbf{P}}|}d\underset{1}{\mathbf{P}}\cdot d\underset{2}{\mathbf{P}} \\
&= \frac{1}{|d\underset{1}{\mathbf{P}}||d\underset{2}{\mathbf{P}}|}(\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot d\underset{1}{\mathbf{p}})\cdot(\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot d\underset{2}{\mathbf{p}}) \\
&= \frac{|d\underset{1}{\mathbf{p}}||d\underset{2}{\mathbf{p}}|}{|d\underset{1}{\mathbf{P}}||d\underset{2}{\mathbf{P}}|}(\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{D}}}\cdot\underset{1}{\mathbf{n}})\cdot(\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{D}}}\cdot\underset{2}{\mathbf{n}}) \\
&= \lambda(\underset{1}{\mathbf{n}})\lambda(\underset{2}{\mathbf{n}})\underset{1}{\mathbf{n}}\cdot\overset{))}{\mathbf{c}}\cdot\underset{2}{\mathbf{n}}
\end{aligned}\tag{2.5.25}$$

特例

1. 若两线元 $d\underset{1}{\mathbf{p}}$ 与 $d\underset{2}{\mathbf{p}}$ 重合，由 (2.5.25) 可得长度比 (2.5.13) 式。

2. 若两线元 $d\underset{1}{\mathbf{p}}$ 与 $d\underset{2}{\mathbf{p}}$ 互相垂直，即 $\theta=\pi/2$，则由(2.5.25)式

$$\cos\Theta = -\sin\gamma = \lambda(\underset{1}{\mathbf{n}})\lambda(\underset{2}{\mathbf{n}})\underset{1}{\mathbf{n}}\cdot\overset{))}{\mathbf{c}}\cdot\underset{2}{\mathbf{n}}$$

§2.6 Cauchy-Green 变形张量的主方向、主长度比

在构形 $\mathscr{R}$ 中的长度比 $\lambda(\mathbf{N})$ 随方向 $\mathbf{N}$ 而异。同样，在构形 $\mathscr{r}$ 中的长度比 $\lambda(\mathbf{n})$ 也随方向 $\mathbf{n}$ 而异。现在来研究沿着哪个方向的长度比为最大或最小。

先研究在构形 $\mathscr{R}$ 中 $\lambda(\mathbf{N})$ 随 $\mathbf{N}$ 的变化。由(2.5.8)式

$$\lambda^2(\mathbf{N})=C_{MN}N^MN^N \tag{2.6.1}$$

因 $\mathbf{N}$ 为单位矢量，故必有

$$G_{MN}N^MN^N-1=0 \tag{2.6.2}$$

现在问题就是在条件 (2.6.2) 的约束下求 (2.6.1) 式之极值。引入 Lagrange 乘子 C，则极值条件为

$$\frac{\partial}{\partial N^A}[C_{MN}N^MN^N-C(G_{MN}N^MN^N-1)]=0$$

即

$$C_{AN}N^N+C_{MA}N^M-C(G_{AN}N^N+G_{MA}N^M)=0$$

故

$$(C_{AM}-CG_{AM})N^M=0 \quad 或 \quad (C^A_{\cdot M}-C\delta^A_{\cdot M})N^M=0 \tag{2.6.3}$$

其抽象形式为

$$(\overset{\scriptscriptstyle\ll}{\mathbf{C}}-C\overset{\scriptscriptstyle\ll}{\mathbf{I}})\cdot\mathbf{N}=\mathbf{0} \quad 即 \quad \overset{\scriptscriptstyle\ll}{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{N}=C\mathbf{N} \tag{2.6.4}$$

(2.6.3)式为含三个未知量 N^M 的齐次线性代数方程组，它有非零解的条件是其系数行列式为零：

$$|C^A_{\cdot M}-C\delta^A_{\cdot M}|=0$$

即

$$\Delta(C)=C^3-\mathscr{J}^C_1C^2+\mathscr{J}^C_2C-\mathscr{J}^C_3=0 \tag{2.6.5}$$

式中系数为张量 $\overset{\scriptscriptstyle\ll}{\mathbf{C}}$ 的三个主不变量：

$$\mathscr{J}_1^C = \mathscr{J}_1(\overset{\ll}{\mathbf{C}}) = \frac{1}{1!}\delta^K_L C^{L}_{\cdot K} = C^{K}_{\cdot K}$$

$$\mathscr{J}_2^C = \mathscr{J}_2(\overset{\ll}{\mathbf{C}}) = \frac{1}{2!}\delta^{KM}_{LN} C^{L}_{\cdot K} C^{N}_{\cdot M} \tag{2.6.6}$$

$$\mathscr{J}_3^C = \mathscr{J}_3(\overset{\ll}{\mathbf{C}}) = \frac{1}{3!}\delta^{KMP}_{LNQ} C^{L}_{\cdot K} C^{N}_{\cdot M} C^{Q}_{\cdot P} = |C^{A}_{\cdot B}|$$

(2.6.5)式称为张量 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 的特征方程，它的三个根称为特征根，即张量 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 的三个主值 $\underset{\text{I}}{C}$，$\underset{\text{II}}{C}$，$\underset{\text{III}}{C}$。以 $\underset{\text{I}}{\mathbf{N}}$，$\underset{\text{II}}{\mathbf{N}}$，$\underset{\text{III}}{\mathbf{N}}$ 表示对应的互相正交的三个主方向(称为空间应变主向，或 Lagrange 方向)，则 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 和 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{-1}$ 的标准形为

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}} = \underset{\text{I}}{C}\underset{\text{I}}{\mathbf{N}}\underset{\text{I}}{\mathbf{N}} + \underset{\text{II}}{C}\underset{\text{II}}{\mathbf{N}}\underset{\text{II}}{\mathbf{N}} + \underset{\text{III}}{C}\underset{\text{III}}{\mathbf{N}}\underset{\text{III}}{\mathbf{N}} \tag{2.6.7}$$

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{-1} = \frac{1}{\underset{\text{I}}{C}}\underset{\text{I}}{\mathbf{N}}\underset{\text{I}}{\mathbf{N}} + \frac{1}{\underset{\text{II}}{C}}\underset{\text{II}}{\mathbf{N}}\underset{\text{II}}{\mathbf{N}} + \frac{1}{\underset{\text{III}}{C}}\underset{\text{III}}{\mathbf{N}}\underset{\text{III}}{\mathbf{N}}$$

由(2.5.8)式，沿主方向的长度比(主长度比)为

$$\underset{\Gamma}{\lambda} = \lambda(\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}) = \sqrt{\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{C}}\cdot\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}} = \sqrt{\underset{\Gamma}{C}} \quad \begin{pmatrix}\Gamma = \text{I, II, III} \\ \text{不对 } \Gamma \text{ 取和}\end{pmatrix} \tag{2.6.8}$$

故

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{1/2} = \underset{\text{I}}{\lambda}\underset{\text{I}}{\mathbf{N}}\underset{\text{I}}{\mathbf{N}} + \underset{\text{II}}{\lambda}\underset{\text{II}}{\mathbf{N}}\underset{\text{II}}{\mathbf{N}} + \underset{\text{III}}{\lambda}\underset{\text{III}}{\mathbf{N}}\underset{\text{III}}{\mathbf{N}} \tag{2.6.9}$$

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{1/2}\cdot\underset{\Gamma}{\mathbf{N}} = \underset{\Gamma}{\lambda}\underset{\Gamma}{\mathbf{N}} \quad (\Gamma = \text{I, II, III，不对 } \Gamma \text{ 取和}) \tag{2.6.10}$$

与此类似，我们也可来研究在构形 κ 中 $\lambda(\mathbf{n})$ 随 $\mathbf{n}$ 的变化，并得到张量 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}$ 的三个主值 $\underset{1}{c}$，$\underset{2}{c}$，$\underset{3}{c}$ 和对应的三个互相正交的主方向 $\underset{1}{\mathbf{n}}$，$\underset{2}{\mathbf{n}}$，$\underset{3}{\mathbf{n}}$(称为物质应变主向，或 Euler 方向)。张量 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}$ 和 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{-1}$ 的标

准形为

$$
\begin{aligned}
\overset{\gg}{\mathbf{c}} &= c_1\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1 + c_2\mathbf{n}_2\mathbf{n}_2 + c_3\mathbf{n}_3\mathbf{n}_3 \\
\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{-1} &= \frac{1}{c_1}\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1 + \frac{1}{c_2}\mathbf{n}_2\mathbf{n}_2 + \frac{1}{c_3}\mathbf{n}_3\mathbf{n}_3
\end{aligned}
\tag{2.6.11}
$$

由(2.5.13)式，沿主方向的长度比(主长度比)为

$$
\lambda_\gamma = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{n}_\gamma \cdot \overset{\gg}{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{n}_\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{c_\gamma}} \quad (\gamma = 1, 2, 3, \text{不对 } \gamma \text{ 取和})
\tag{2.6.12}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{1/2} &= \frac{1}{\lambda_1}\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1 + \frac{1}{\lambda_2}\mathbf{n}_2\mathbf{n}_2 + \frac{1}{\lambda_3}\mathbf{n}_3\mathbf{n}_3 \\
\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{-1/2} &= \lambda_1\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1 + \lambda_2\mathbf{n}_2\mathbf{n}_2 + \lambda_3\mathbf{n}_3\mathbf{n}_3
\end{aligned}
\tag{2.6.13}
$$

$$
\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{-1/2} \cdot \mathbf{n}_\gamma = \lambda_\gamma \mathbf{n}_\gamma \quad (\gamma = 1, 2, 3, \text{不对 } \gamma \text{ 取和})
\tag{2.6.14}
$$

在连续介质力学的有些文献中，常把 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{1/2}$ 记作 $\overset{\ll}{\mathbf{U}}$，称为右伸长张量(理由见后(2.8.4$b$)式)；常把左 Cauchy-Green 变形张量 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{-1}$ 记作 $\overset{\gg}{\mathbf{B}}$，其方根 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{-1/2}$ 记作 $\overset{\gg}{\mathbf{V}}$，称为左伸长张量(理由见后(2.8.5$a$)式)①。因此

---

① 左 Cauchy-Green 变形张量与左伸长张量均为构形 $\mathscr{B}(t)$ 中的张量，虽然用大写字母 $\overset{\gg}{\mathbf{B}}$ 与 $\overset{\gg}{\mathbf{V}}$ 表示不符合本书的习惯，但许多参考书与文献均用此。

$$\overset{\ll}{\mathbf{U}} = \overset{\ll}{\mathbf{C}}^{1/2} = \lambda_{1}\mathbf{N}_{1}\mathbf{N}_{1} + \lambda_{II}\mathbf{N}_{II}\mathbf{N}_{II} + \lambda_{III}\mathbf{N}_{III}\mathbf{N}_{III} \qquad (2.6.15)$$

$$\overset{\gg}{\mathbf{V}} = \overset{\gg}{\mathbf{B}}^{1/2} = \overset{\gg}{\mathbf{c}}^{-1/2} = \lambda_{1}\mathbf{n}_{1}\mathbf{n}_{1} + \lambda_{2}\mathbf{n}_{2}\mathbf{n}_{2} + \lambda_{3}\mathbf{n}_{3}\mathbf{n}_{3} \qquad (2.6.16)$$

在 $\mathscr{R}$ 中 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 的主值、主方向与在 $\mathscr{r}$ 中 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}$ 的主值、主方向的关系将于 § 2.8 中讨论(见(2.8.17)与(2.8.18)式)。

§ 2.7 应变椭球

变形前在构形 $\mathscr{R}$ 中的线元 $d\mathbf{P} = \mathbf{G}_A dX^A$ 在变形后成为构形 $\mathscr{r}$ 中的线元 $d\mathbf{p} = \mathbf{g}_i dx^i$，线元的长度则由 dS 变成 ds。由(2.2.3)与(2.2.30)式，

$$(dS)^2 = G_{AB}dX^A dX^B = c_{ij}dx^i dx^j \qquad (2.7.1)$$

式中 $C_{ij} = G_{ij}$，而由(2.2.18)与(2.2.6)式，

$$(ds)^2 = C_{AB}dX^A dX^B = g_{ij}dx^i dx^j \qquad (2.7.2)$$

式中 $C_{AB} = g_{AB}$。

在构形 $\mathscr{R}$ 中，以所研究的 $\mathbf{P}$ 点为中心，以 $dS = K$ 为半径作一圆球(图2.2)，则由(2.7.1)式，圆球面上各点的 dX^A 应满足以下方程：

$$G_{AB}dX^A dX^B = K^2 \qquad (2.7.3)$$

此一圆球面在变形后成为构形 $\mathscr{r}$ 中的椭球面，称为物质应变椭球，由(2.7.1)式椭球面的方程为

$$d\mathbf{p}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{c}}\cdot d\mathbf{p} = c_{ij}dx^i dx^j = K^2 \qquad (2.7.4)$$

与此类似，也可在构形 $\mathscr{r}$ 中以所研究的 $\mathbf{p}$ 点为中心，以 $ds = k$ 为半径作一圆球(图2.3)，则由(2.7.2)式，圆球面上各点的 dx^i 应满足以下方程

$$g_{ij}dx^i dx^j = k^2 \qquad (2.7.5)$$

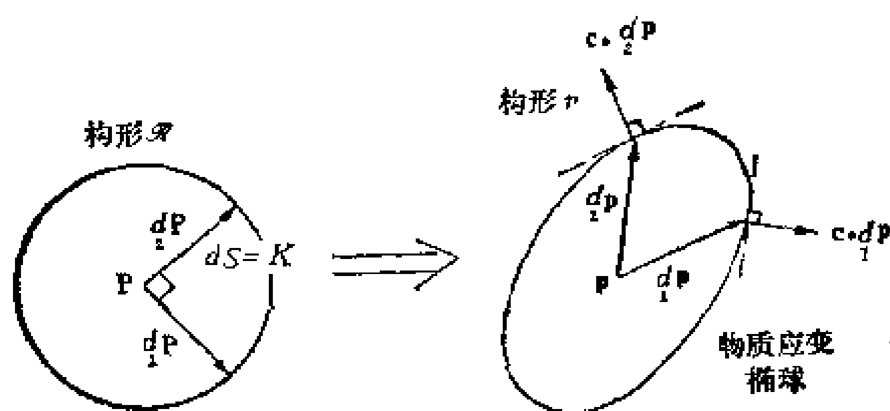


图 2.2

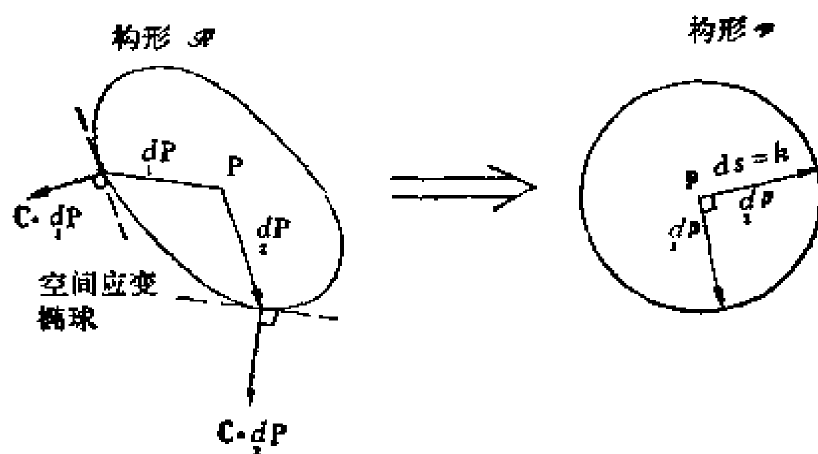


图 2.3

此一圆球面在变形前的形状为构形 $\mathscr{R}$ 中的椭球面，称为空间应变椭球，由(2.7.2)式椭球面的方程为

$$d\mathbf{P}\cdot\overset{-1}{\mathbf{C}}\cdot d\mathbf{P}=C_{AB}dX^{A}dX^{B}=k^{2}\tag{2.7.6}$$

Cauchy **定理**：$\mathbf{P}$ 点局部小圆球（图 2.2）的任意两个互相垂直的直径，变形后成为物质应变椭球的共轭直径。

证 设 $d\underset{1}{\mathbf{P}}$ 与 $d\underset{2}{\mathbf{P}}$ 为 $\mathbf{P}$ 点处小圆球两互相垂直的半径(矢量)，故

$$\underset{1}{d}\mathbf{P}\cdot\underset{2}{d}\mathbf{P}=0$$

将(2.3.11)的第二式代入，并利用(2.5.2)的第二式得

$$(\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot\underset{1}{d}\mathbf{p})\cdot(\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot\underset{2}{d}\mathbf{p})=\underset{1}{d}\mathbf{p}\cdot(\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^{*}\cdot\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}})\cdot\underset{2}{d}\mathbf{p}$$

$$=\underset{1}{d}\mathbf{p}\cdot\overset{))}{\mathbf{c}}\cdot\underset{2}{d}\mathbf{p}=0 \qquad (2.7.7)$$

(2.7.7)式表示 $\underset{1}{d}\mathbf{p}$ 与 $\underset{2}{d}\mathbf{p}$ 为应变椭球 (2.7.4) 的共轭直径；在 $\underset{2}{d}\mathbf{p}$ 端点处的椭球法向矢量为 $\overset{))}{\mathbf{c}}\cdot\underset{2}{d}\mathbf{p}$，故 $\underset{1}{d}\mathbf{p}$ 平行于在 $\underset{2}{d}\mathbf{p}$ 端点的切平面。同样 $\underset{2}{d}\mathbf{p}$ 亦平行于 $\underset{1}{d}\mathbf{p}$ 端点的切平面。

由于任何椭球必有三根互相垂直的共轭直径，称为主轴。物质应变椭球的主轴就是 Cauchy 变形张量 $\overset{))}{\mathbf{c}}$ 的主方向，在前节(§2.6) 中称为物质应变主向。

对于空间应变椭球亦有类似的结果。$\mathbf{P}$ 点空间应变椭球（图 2.3) 的任意两个共轭直径，变形后成为 $\mathbf{p}$ 点圆球的互相垂直的直径。空间应变椭球的三个主轴就是 Green 变形张量 $\overset{((}{\mathbf{C}}$ 的主方向，称为空间应变主向。三个主轴在变形后仍然互相垂直。

物质应变椭球的主方向与空间应变椭球的主方向的关系将于下节讨论。

§2.8 变形基本定理

在本节中我们来研究变形的机制，即把从构形 $\mathscr{R}$ 到 $\mathscr{r}$ 的变换(映射)分解为变形、旋转与平移三部分。所采用的方法是把变形梯度(两点张量) $\overset{)(}{\mathbf{D}}$ 化为一点张量，然后应用乘法分解(极分解)定理。

一、变形基本定理

由线元变换公式(2.3.11)式，有

$$d\mathbf{p}=\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot d\mathbf{P} \tag{2.8.1}$$

$$=\overset{)(}{\mathbf{I}}\cdot\overset{((}{\mathbf{D}}\cdot d\mathbf{P} \tag{2.8.2}$$

$$=\overset{))}{\mathbf{D}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{I}}\cdot d\mathbf{P} \tag{2.8.3}$$

(2.8.2)式中 $\overset{))}{\mathbf{D}}\cdot$ 表示先把线元 $d\mathbf{P}$ 在构形 $\mathscr{R}$ 中进行变换，$\overset{)(}{\mathbf{I}}\cdot$ 表示然后平移到构形 $\mathscr{r}$ 中；反之，(2.8.3)式则表示先平移到构形 $\mathscr{r}$ 中，然后在构形 $\mathscr{r}$ 中进行变换。

把(2.8.2)式中的张量 $\overset{((}{\mathbf{D}}$ 与(2.8.3)式中的张量 $\overset{))}{\mathbf{D}}$ 进行极分解(即乘法分解)，利用(2.5.1)与(2.5.2)式，得到

$$\overset{((}{\mathbf{D}}=(\overset{((}{\mathbf{D}}\cdot\overset{((*}{\mathbf{D}})^{1/2}\cdot\overset{((}{\mathbf{R}}=\overset{((}{\mathbf{c}}{}^{-1/2}\cdot\overset{((}{\mathbf{R}}=\overset{((}{\mathbf{V}}\cdot\overset{((}{\mathbf{R}} \tag{2.8.4a}$$

$$=\overset{((}{\mathbf{R}}\cdot(\overset{((*}{\mathbf{D}}\cdot\overset{((}{\mathbf{D}})^{1/2}=\overset{((}{\mathbf{R}}\cdot\overset{((}{\mathbf{C}}{}^{1/2}=\overset{((}{\mathbf{R}}\cdot\overset{((}{\mathbf{U}} \tag{2.8.4b}$$

上式经过平移以后，

$$\overset{))}{\mathbf{D}}=\overset{))}{\mathbf{c}}{}^{-1/2}\cdot\overset{))}{\mathbf{R}}=\overset{))}{\mathbf{V}}\cdot\overset{))}{\mathbf{R}} \tag{2.8.5a}$$

$$=\overset{))}{\mathbf{R}}\cdot\overset{))}{\mathbf{C}}{}^{1/2}=\overset{))}{\mathbf{R}}\cdot\overset{))}{\mathbf{U}} \tag{2.8.5b}$$

(2.8.4b) 式中的 $\overset{((}{\mathbf{C}}{}^{1/2}$ 称为右伸长张量，而(2.8.5a)式中的张量 $\overset{))}{\mathbf{c}}{}^{-1/2}$ 称为左伸长张量。$\mathbf{R}$ 为正交张量，并且为正常正交张量。这是因为由 (2.8.4b) 式

$$\mathscr{J}_3(\overset{((}{\mathbf{D}})=\mathscr{J}_3(\overset{((}{\mathbf{R}}\cdot\overset{((}{\mathbf{C}}{}^{1/2})=\mathscr{J}_3(\overset{((}{\mathbf{R}})\mathscr{J}_3(\overset{((}{\mathbf{C}}{}^{1/2})$$

而由(2.4.6)式，$\mathscr{J}_3(\overset{((}{\mathbf{D}})=\mathscr{J}$，及由(2.5.17)式

$$\mathscr{J}_3(\overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}}) = \sqrt{\mathscr{J}_3(\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}})} = \mathscr{J}$$

因此必有 $\mathscr{J}_3(\overset{\langle\langle}{\mathbf{R}}) = 1$，故 $\mathbf{R}$ 为正常的正交张量，表示旋转。由 (2.8.4b) 及 (2.8.5a) 式可得

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{R}} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{D}} \cdot \overset{-1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}}, \quad \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{R}} = \overset{1/2}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}} \cdot \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{D}} \tag{2.8.6}$$

将(2.8.4)与(2.8.5)式代入(2.8.2)与(2.8.3)式，得到

$$d\mathbf{p} = \overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{R}} \cdot \overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}} \cdot d\mathbf{P} = \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{R}} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} \cdot \overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}} \cdot d\mathbf{P} = \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{R}} \cdot \overset{1/2}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{C}}} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} \cdot d\mathbf{P} \tag{2.8.7}$$

$$= \overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} \cdot \overset{-1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{c}}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{R}} \cdot d\mathbf{P} = \overset{-1/2}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{R}} \cdot d\mathbf{P} = \overset{-1/2}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}} \cdot \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{R}} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} \cdot d\mathbf{P} \tag{2.8.8}$$

于是得到**变形基本定理**如下：

物体在任何点的变形由平移（以“$\mathbf{I}\cdot$”表示）、刚性转动（以“$\mathbf{R}\cdot$”表示）和纯变形（以“$\overset{1/2}{\mathbf{C}}\cdot$”或“$\overset{-1/2}{\mathbf{c}}\cdot$”表示）复合而成。

(2.8.7)与(2.8.8)式表示 $3! = 6$ 种不同的复合（或分解）顺序。由于(2.6.10)式，$\overset{1/2}{\mathbf{C}}$表示纯变形，而由于(2.6.14)式 $\overset{-1/2}{\mathbf{c}}$ 也表示纯变形。但在解决具体问题时，直接采用 $\mathbf{C}$ 与 $\mathbf{c}$ 更为方便，无需计算它们的方根，因而也无需计算它们的主方向与主值。

以上讨论的是从构形 $\mathscr{R}$ 到构形 $\mathscr{r}$ 的变换(正变换)的分解。同样，从构形 $\mathscr{r}$ 到构形 $\mathscr{R}$ 的变换(逆变换)亦可作类似的分解。由线元的逆变公式(2.3.11)：

$$d\mathbf{P} = \overset{-1}{\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}} \cdot d\mathbf{p} \tag{2.8.9}$$

$$= \overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} \cdot \overset{-1}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{D}}} \cdot d\mathbf{p} \tag{2.8.10}$$

$$= \overset{-1}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{D}}} \cdot \overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} \cdot d\mathbf{p} \tag{2.8.11}$$

(2.8.10) 式表示先在构形 $\mathscr{r}$ 中变换，然后平移到构形 $\mathscr{R}$ 中，而

(2.8.11)式表示先平移到构形 $\mathscr{R}$ 中，然后在构形 $\mathscr{R}$ 中变换。由张量的极分解定理，并利用(2.5.1)与(2.5.2)式，得到

$$\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{D}}} = (\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{D}}}\cdot\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{D}}}{}^*)^{1/2}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{R}}' = \overset{-1/2}{\overset{\gg}{\mathbf{C}}}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{R}}' \tag{2.8.12a}$$

$$= \overset{\gg}{\mathbf{R}}'\cdot(\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{D}}}{}^*\cdot\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{D}}})^{1/2} = \overset{\gg}{\mathbf{R}}'\cdot\overset{1/2}{\overset{\gg}{\mathbf{c}}} \tag{2.8.12b}$$

经过平移以后，

$$\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{D}}} = \overset{-1/2}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{R}}' \tag{2.8.13a}$$

$$= \overset{\ll}{\mathbf{R}}'\cdot\overset{1/2}{\overset{\ll}{\mathbf{c}}} \tag{2.8.13b}$$

可以证明 $\mathbf{R}'$ 为正常的正交张量，代表转动，因为

$$\mathscr{J}_3(\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{D}}}) = \mathscr{J}_3(\overset{\gg}{\mathbf{R}}'\cdot\overset{1/2}{\overset{\gg}{\mathbf{c}}}) = \mathscr{J}_3(\overset{\gg}{\mathbf{R}}')\mathscr{J}_3(\overset{1/2}{\overset{\gg}{\mathbf{c}}})$$

而由(2.4.6)式 $\mathscr{J}_3(\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{D}}}) = j$，及由(2.5.18)式 $\mathscr{J}_3(\overset{1/2}{\overset{\gg}{\mathbf{c}}}) = j$，故

$$\mathscr{J}_3(\overset{\gg}{\mathbf{R}}') = 1$$

现在证明 $\mathbf{R}'$ 与 $\mathbf{R}$ 互逆。由于 $\overset{-1}{\mathbf{D}}$ 与 $\mathbf{D}$ 互逆，利用(2.8.4)与(2.8.13)式得到

$$\overset{\ll}{\mathbf{I}} = \overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{D}}}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{D}} = \overset{\ll}{\mathbf{R}}'\cdot\overset{1/2}{\overset{\ll}{\mathbf{c}}}\cdot\overset{-1/2}{\overset{\ll}{\mathbf{c}}}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{R}} = \overset{\ll}{\mathbf{R}}'\cdot\overset{\ll}{\mathbf{R}}$$

$$\overset{\ll}{\mathbf{I}} = \overset{\ll}{\mathbf{D}}\cdot\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{D}}} = \overset{\ll}{\mathbf{R}}\cdot\overset{1/2}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}\cdot\overset{-1/2}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{R}}' = \overset{\ll}{\mathbf{R}}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{R}}'$$

故

$$\overset{\ll}{\mathbf{R}}' = \overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{R}}} \tag{2.8.14}$$

即 $\overset{\ll}{\mathbf{R}}'$ 与 $\overset{\ll}{\mathbf{R}}$ 互逆。将(2.8.12)与(2.8.13)式代入(2.8.10)与(2.8.11)式，得逆变换的分解公式：

$$d\mathbf{P} = \overset{\circ}{\mathbf{I}}\cdot\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{R}}}\cdot\overset{1/2}{\overset{\gg}{\mathbf{c}}}\cdot d\mathbf{p} = \overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{R}}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{I}}\cdot\overset{1/2}{\overset{\gg}{\mathbf{c}}}\cdot d\mathbf{p} = \overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{R}}}\cdot\overset{1/2}{\overset{\ll}{\mathbf{c}}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{I}}\cdot d\mathbf{p} \tag{2.8.15}$$

$$= \overset{()}{\mathbf{I}} \cdot \overset{-1/2}{\overset{))}{\mathbf{C}}} \cdot \overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{R}}} \cdot d\mathbf{p} = \overset{-1/2}{\overset{((}{\mathbf{C}}} \cdot \overset{()}{\mathbf{I}} \cdot \overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{R}}} \cdot d\mathbf{p} = \overset{-1/2}{\overset{((}{\mathbf{C}}} \cdot \overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{R}}} \cdot \overset{()}{\mathbf{I}} \cdot d\mathbf{p}$$

(2.8.16)

(2.8.15),(2.8.16)两式与(2.8.7),(2.8.8)两式类似，前者可由后者通过将 $\mathbf{C}$ 与 $\mathbf{c}$ 互换，$d\mathbf{P}$ 与 $d\mathbf{p}$ 互换，$\overset{)(}{\mathbf{I}}$ 改为 $\overset{()}{\mathbf{I}}$, $\mathbf{R}$ 改为 $\overset{-1}{\mathbf{R}}$ 而得。由(2.8.15) 与 (2.8.16) 式可以得到与前述相类似的逆变形的基本定理。

二、变形梯度 $\overset{)(}{\mathbf{D}}$ 与正交张量 $\overset{)(}{\mathbf{R}}$ 的主轴表示

以 $\mathbf{N}_{\mathrm{I}}, \mathbf{N}_{\mathrm{II}}, \mathbf{N}_{\mathrm{III}}$ 表示 $\overset{((}{\mathbf{C}}$ 或 $\overset{1/2}{\overset{((}{\mathbf{C}}}$ 的主方向，则 $\overset{((}{\mathbf{C}}, \overset{1/2}{\overset{((}{\mathbf{C}}}$ 的主轴表示式(即对角标准形表示) 已见(2.6.7)与(2.6.9)式。以 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ 表示 $\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{c}}}$ 的主方向，则 $\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{c}}}$, $\overset{-1/2}{\overset{))}{\mathbf{c}}}$ 的主轴表示式已见(2.6.11)与(2.6.13)式。现在来证明 $\overset{1/2}{\overset{((}{\mathbf{C}}}$ 与 $\overset{-1/2}{\overset{((}{\mathbf{c}}}$ 的主方向是旋转的关系：

$$\mathbf{n}_1 = \overset{)(}{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{N}_{\mathrm{I}}, \qquad \mathbf{n}_2 = \overset{)(}{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{N}_{\mathrm{II}}, \qquad \mathbf{n}_3 = \overset{)(}{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{N}_{\mathrm{III}}$$

记作

$$\mathbf{n}_\gamma = \overset{)(}{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{N}_\Gamma, \quad \gamma = \Gamma \tag{2.8.17}$$

而主值则相等：

$$\lambda_1 = \lambda_{\mathrm{I}}, \quad \lambda_2 = \lambda_{\mathrm{II}}, \quad \lambda_3 = \lambda_{\mathrm{III}}$$

记作

$$\lambda_\gamma = \lambda_\Gamma, \quad \gamma = \Gamma \tag{2.8.18}$$

证明如下：由(2.8.4)及(2.8.5)式，

$$\overset{)(}{\mathbf{D}} = \overset{)(}{\mathbf{R}} \cdot \overset{1/2}{\overset{((}{\mathbf{C}}} = \overset{-1/2}{\overset{))}{\mathbf{c}}} \cdot \overset{)(}{\mathbf{R}} \tag{2.8.19}$$

将上式点积 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}$，即(2.8.19)·$\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}$，得

$$\overset{)(}{\mathbf{R}}\cdot\overset{\overset{1/2}{((}}{\mathbf{C}}\cdot\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}=\overset{\overset{-1/2}{))}}{\mathbf{c}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{R}}\cdot\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}$$

将(2.6.9)式代入，因而上式左端变成 $\overset{)(}{\mathbf{R}}\cdot(\underset{\Gamma}{\lambda}\underset{\Gamma}{\mathbf{N}})$，故

$$\overset{\overset{-1/2}{))}}{\mathbf{c}}\cdot(\overset{)(}{\mathbf{R}}\cdot\underset{\Gamma}{\mathbf{N}})=\underset{\Gamma}{\lambda}(\overset{)(}{\mathbf{R}}\cdot\underset{\Gamma}{\mathbf{N}})\quad(\Gamma=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})\tag{2.8.20}$$

因此 $\overset{)(}{\mathbf{R}}\cdot\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}$ 是张量 $\overset{\overset{-1/2}{))}}{\mathbf{c}}$ 的特征矢量(或主方向)，对应的特征值(或主值)为 $\underset{\Gamma}{\lambda}(\Gamma=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})$。若三个特征值 $\underset{\Gamma}{\lambda}$ 互异，即 $\underset{\mathrm{I}}{\lambda}\neq\underset{\mathrm{II}}{\lambda}\neq\underset{\mathrm{III}}{\lambda}$，则 $\overset{\overset{-1/2}{))}}{\mathbf{c}}$ 的主方向必为

$$\underset{1}{\mathbf{n}}=\overset{)(}{\mathbf{R}}\cdot\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}},\quad\underset{2}{\mathbf{n}}=\overset{)(}{\mathbf{R}}\cdot\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}},\quad\underset{3}{\mathbf{n}}=\overset{)(}{\mathbf{R}}\cdot\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}\qquad\text{即(2.8.17)式}$$

而主值必为

$$\underset{1}{\lambda}=\underset{\mathrm{I}}{\lambda},\quad\underset{2}{\lambda}=\underset{\mathrm{II}}{\lambda},\quad\underset{3}{\lambda}=\underset{\mathrm{III}}{\lambda}\qquad\text{即(2.8.18)式}$$

同时 $\overset{\overset{-1/2}{))}}{\mathbf{c}}$ 可以表示成为标准形(2.6.13)式。如果特征根 $\underset{\Gamma}{\lambda}(\Gamma=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})$ 中有重根，那么只要 $\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}$，$\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}$，$\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}$ 构成张量 $\overset{\overset{1/2}{((}}{\mathbf{C}}$ 的一组主方向，取 $\underset{1}{\mathbf{n}}$，$\underset{2}{\mathbf{n}}$，$\underset{3}{\mathbf{n}}$ 如(2.8.17)式，$\underset{1}{\lambda}$，$\underset{2}{\lambda}$，$\underset{3}{\lambda}$ 如(2.8.18)式，它们必构成张量 $\overset{\overset{-1/2}{))}}{\mathbf{c}}$ 的一组主方向与主值，标准形(2.6.13)式仍旧成立。

由(2.8.17)式，$\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}$ 可通过 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}$ 表示：

$$\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}=\overset{\overset{-1}{)(}}{\mathbf{R}}\cdot\underset{\gamma}{\mathbf{n}},\quad\gamma=\Gamma\tag{2.8.17'}$$

由(2.8.17)式，可知 $\overset{)(}{\mathbf{R}}$ 的表示式

$$\overset{)(}{\mathbf{R}} = \underset{1}{\mathbf{n}}\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}} + \underset{2}{\mathbf{n}}\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}} + \underset{3}{\mathbf{n}}\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}} \tag{2.8.21}$$

由(2.8.17)′式,可知 $\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{R}}}$ 的表示式

$$\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{R}}} = \underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}\underset{1}{\mathbf{n}} + \underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}\underset{2}{\mathbf{n}} + \underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}\underset{3}{\mathbf{n}} \tag{2.8.22}$$

为了得到 $\mathbf{D}$ 的表示,可利用 (2.8.4),(2.8.5) 式,或直接由式 (2.8.19),并将式 (2.6.9)的 $\overset{1/2}{\overset{((}{\mathbf{C}}}$ 与式(2.6.13)的 $\overset{-1/2}{\overset{))}{\mathbf{c}}}$ 代入后,得

$$\overset{)(}{\mathbf{D}} = \overset{)(}{\mathbf{R}} \cdot \overset{1/2}{\overset{((}{\mathbf{C}}} = \overset{-1/2}{\overset{))}{\mathbf{c}}} \cdot \overset{)(}{\mathbf{R}} = \underset{\mathrm{I}}{\lambda}\underset{1}{\mathbf{n}}\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}} + \underset{\mathrm{II}}{\lambda}\underset{2}{\mathbf{n}}\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}} + \underset{\mathrm{III}}{\lambda}\underset{3}{\mathbf{n}}\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}} \tag{2.8.23}$$

而由(2.8.12)或(2.8.13)式,可得

$$\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} = \overset{-1/2}{\overset{((}{\mathbf{C}}} \cdot \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{R}}} = \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{R}}}\,\overset{1/2}{\overset{))}{\mathbf{c}}} = \underset{\mathrm{I}}{\lambda}^{-1}\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}\underset{1}{\mathbf{n}} + \underset{\mathrm{II}}{\lambda}^{-1}\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}\underset{2}{\mathbf{n}} + \underset{\mathrm{III}}{\lambda}^{-1}\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}\underset{3}{\mathbf{n}} \tag{2.8.24}$$

因此利用 $\underset{r}{\mathbf{n}}$ 与 $\underset{r}{\mathbf{N}}$ 之间的旋转关系(2.8.17)与 (2.8.17)′式,可建立 Cauchy-Green 变形张量(2.6.7)式 $\overset{((}{\mathbf{C}}$, $\overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{C}}}$ 与(2.6.11)式 $\overset{))}{\mathbf{c}}$, $\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{c}}}$ 之间的关系:

$$\begin{aligned} &\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{c}}} = \overset{)(}{\mathbf{R}} \cdot \overset{((}{\mathbf{C}} \cdot \overset{()}{\mathbf{R}}^*, \quad \overset{((}{\mathbf{C}} = \overset{()}{\mathbf{R}}^* \cdot \overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{c}}} \cdot \overset{)(}{\mathbf{R}} \\ &\overset{))}{\mathbf{c}} = \overset{)(}{\mathbf{R}} \cdot \overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{C}}} \cdot \overset{()}{\mathbf{R}}^*, \quad \overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{C}}} = \overset{()}{\mathbf{R}}^* \cdot \overset{))}{\mathbf{c}} \cdot \overset{)(}{\mathbf{R}} \end{aligned} \tag{2.8.25}$$

以及右伸长张量(2.6.15)式 $\overset{((}{\mathbf{U}} = \overset{1/2}{\overset{((}{\mathbf{C}}}$ 与左伸长张量 $\overset{))}{\mathbf{V}} = \overset{-1/2}{\overset{))}{\mathbf{c}}}$ 之间的关系:

$$\begin{aligned} &\overset{))}{\mathbf{V}} = \overset{)(}{\mathbf{R}} \cdot \overset{((}{\mathbf{U}} \cdot \overset{()}{\mathbf{R}}^*, \quad \overset{((}{\mathbf{U}} = \overset{()}{\mathbf{R}}^* \cdot \overset{))}{\mathbf{V}} \cdot \overset{)(}{\mathbf{R}} \\ &\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{V}}} = \overset{)(}{\mathbf{R}} \cdot \overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{U}}} \cdot \overset{()}{\mathbf{R}}^*, \quad \overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{U}}} = \overset{()}{\mathbf{R}}^* \cdot \overset{))}{\mathbf{V}} \cdot \overset{)(}{\mathbf{R}} \end{aligned} \tag{2.8.26}$$

§2.9 应变张量

上文中介绍过的变形张量，及其主方向与主值可见表 2.1

表 2.1 变形张量

名称	记号	主方向	主值
Green 变形张量，即右 Cauchy-Green 变形张量	$\overset{\ll}{\mathbf{C}}$	$\underset{I}{\mathbf{N}},\ \underset{II}{\mathbf{N}},\ \underset{III}{\mathbf{N}}$	$\underset{I}{\lambda}^2=\underset{1}{\lambda}^2,\ \underset{II}{\lambda}^2=\underset{2}{\lambda}^2,\ \underset{III}{\lambda}^2=\underset{3}{\lambda}^2$
右伸长张量	$\overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{1/2}$	$\underset{I}{\mathbf{N}},\ \underset{II}{\mathbf{N}},\ \underset{III}{\mathbf{N}}$	$\underset{I}{\lambda},\ \underset{II}{\lambda},\ \underset{III}{\lambda}$
Cauchy 变形张量	$\overset{\gg}{\mathbf{c}}$	$\underset{1}{\mathbf{n}},\ \underset{2}{\mathbf{n}},\ \underset{3}{\mathbf{n}}$	$\underset{1}{\lambda}^{-2},\ \underset{2}{\lambda}^{-2},\ \underset{3}{\lambda}^{-2}$
左 Cauchy-Green 变形张量	$\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{-1}$	$\underset{1}{\mathbf{n}},\ \underset{2}{\mathbf{n}},\ \underset{3}{\mathbf{n}}$	$\underset{1}{\lambda}^2,\ \underset{2}{\lambda}^2,\ \underset{3}{\lambda}^2$
左伸长张量	$\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{-1/2}$	$\underset{1}{\mathbf{n}},\ \underset{2}{\mathbf{n}},\ \underset{3}{\mathbf{n}}$	$\underset{1}{\lambda},\ \underset{2}{\lambda},\ \underset{3}{\lambda}$

张量 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 以及它的任意对称张量函数，均称为空间变形张量，而张量 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}$ 以及它的任意对称张量函数，均称为物质变形张量。显然，当无变形（例如只有刚体转动）时，$\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 与 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}$ 就等于度量张量

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}}=\overset{\ll}{\mathbf{I}},\quad \overset{\gg}{\mathbf{c}}=\overset{\gg}{\mathbf{I}}$$

在本节将讨论应变张量，它们也区分为空间应变张量与物质应变张量。

一、空间应变张量

由(2.2.34)式，线元长度平方的改变值为

$$(ds)^2-(dS^2)=d\mathbf{P}\cdot(\overset{\ll}{\mathbf{C}}-\overset{\ll}{\mathbf{I}})\cdot d\mathbf{P}=2d\mathbf{P}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{E}}\cdot d\mathbf{P}\quad(2.9.1)$$

这里，由 (2.2.35) 式，Green 应变张量 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}$ 定义为

$$\overset{\ll}{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\overset{\ll}{\mathbf{C}} - \overset{\ll}{\mathbf{I}}) = E_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B \tag{2.9.2}$$

其中

$$E_{AB} = \frac{1}{2}(C_{AB} - G_{AB}), \quad (C_{AB} = g_{AB}) \tag{2.9.3}$$

$\overset{\ll}{\mathbf{E}}$ 的主方向为 $\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}$，$\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}$，$\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}$，而主值为

$$\frac{1}{2}(\underset{\mathrm{I}}{\lambda}^2 - 1), \quad \frac{1}{2}(\underset{\mathrm{II}}{\lambda}^2 - 1), \quad \frac{1}{2}(\underset{\mathrm{III}}{\lambda}^2 - 1)$$

它的主轴表示为

$$\begin{aligned}\overset{\ll}{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\underset{\mathrm{I}}{\lambda}^2 - 1)\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}} + \frac{1}{2}(\underset{\mathrm{II}}{\lambda}^2 - 1)\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}} \\ + \frac{1}{2}(\underset{\mathrm{III}}{\lambda}^2 - 1)\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}\end{aligned} \tag{2.9.4}$$

由(2.5.8)式

$$\lambda_{\mathbf{N}}^2 = \lambda^2(\mathbf{N}) = \mathbf{N}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{N} = \frac{(ds)^2}{(dS)^2}$$

式中 dS 表示变形前在 $\mathscr{R}$ 构形中沿 $\mathbf{N}$ 方向的线元长度，ds 表示该线元变形后在 r 构形中的长度,故由(2.9.2)式

$$\begin{aligned}\mathbf{N}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{N} = \frac{1}{2}\mathbf{N}\cdot(\overset{\ll}{\mathbf{C}} - \overset{\ll}{\mathbf{I}})\cdot\mathbf{N} = \frac{1}{2}(\lambda_{\mathbf{N}}^2 - 1) \\ = \frac{(ds)^2 - (dS)^2}{2(dS)^2}\end{aligned} \tag{2.9.5}$$

此式说明 Green 应变张量 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}$的几何意义：$\overset{\ll}{\mathbf{E}}$ 沿方向 $\mathbf{N}$ 的法分量为沿 $\mathbf{N}$ 的线元长度平方的相对变化之半。

可定义工程应变张量 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}_{\text{工}}$ 如下：

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}_{I} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{C}}^{1/2} - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} = (\lambda_{\mathrm{I}} - 1)\mathbf{N}_{\mathrm{I}}\mathbf{N}_{\mathrm{I}} + (\lambda_{\mathrm{II}} - 1)\mathbf{N}_{\mathrm{II}}\mathbf{N}_{\mathrm{II}} + (\lambda_{\mathrm{III}} - 1)\mathbf{N}_{\mathrm{III}}\mathbf{N}_{\mathrm{III}} \tag{2.9.6}$$

由(2.5.9)式

$$\lambda_{\mathbf{N}} = \lambda(\mathbf{N}) = |\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{C}}^{1/2} \cdot \mathbf{N}| = |(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} + \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}_{I}) \cdot \mathbf{N}|$$

故

$$\frac{ds - dS}{dS} = \lambda_{\mathbf{N}} - 1 = |(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} + \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}_{I}) \cdot \mathbf{N}| - 1 \tag{2.9.7}$$

注意如果 $\mathbf{N}$ 不是 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{C}}$ 的主方向(因而不是 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}_{I}$ 的主方向),则

$$\lambda_{\mathbf{N}} - 1 \neq \mathbf{N} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}_{I} \cdot \mathbf{N}$$

在有限变形情况下 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}_{I}$ 的几何意义并不明显,使用起来也不方便。

定义对数应变张量 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{H}}$ 为

$$\begin{aligned}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{H}} &= \frac{1}{2}\ln\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{C}} = \ln\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{C}}^{1/2} = \ln(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} + \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}_{I}) \\ &= (\ln\lambda_{\mathrm{I}})\mathbf{N}_{\mathrm{I}}\mathbf{N}_{\mathrm{I}} + (\ln\lambda_{\mathrm{II}})\mathbf{N}_{\mathrm{II}}\mathbf{N}_{\mathrm{II}} + (\ln\lambda_{\mathrm{III}})\mathbf{N}_{\mathrm{III}}\mathbf{N}_{\mathrm{III}}\end{aligned} \tag{2.9.8}$$

它的几何意义如下:

$$\ln\frac{ds}{dS} = \ln\lambda_{\mathbf{N}} = \frac{1}{2}\ln(\mathbf{N} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{N}) = \frac{1}{2}\ln(\mathbf{N} \cdot e^{2\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{H}}} \cdot \mathbf{N}) \tag{2.9.9}$$

注意如果 $\mathbf{N}$ 不是 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{C}}$ 的主方向(因而不是 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{H}}$ 的主方向),则

$$\ln\lambda_{\mathbf{N}} \neq \mathbf{N} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{N}$$

由解析函数 $\ln(1 + z)$ 的幂级数形式:

$$\ln(1 + z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \cdots$$

相应地有(与(2.9.8)式类比):

$$\overset{\ll}{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}\ln(\overset{\ll}{\mathbf{I}} + 2\overset{\ll}{\mathbf{E}}) = \ln(\overset{\ll}{\mathbf{I}} + \overset{\ll}{\mathbf{E}}_{\mathrm{I}})$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\overset{\ll}{\mathbf{E}} - \frac{1}{2}(2\overset{\ll}{\mathbf{E}})^2 + \frac{1}{3}(2\overset{\ll}{\mathbf{E}})^3 + \cdots\right]$$

$$= \overset{\ll}{\mathbf{E}}_{\mathrm{I}} - \frac{1}{2}\overset{\ll}{\mathbf{E}}{}^2_{\mathrm{I}} + \frac{1}{3}\overset{\ll}{\mathbf{E}}{}^3_{\mathrm{I}} - \cdots \tag{2.9.10}$$

当物体无变形时(只有刚体旋转),所有的应变张量均为零。

二、物质应变张量

由(2.2.36)式,线元长度平方的改变值也可写作

$$(ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{p}\cdot(\overset{\gg}{\mathbf{I}} - \overset{\gg}{\mathbf{c}})\cdot d\mathbf{p} = 2d\mathbf{p}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{e}}\cdot d\mathbf{p} \tag{2.9.11}$$

式中由(2.2.37)式 Almansi 应变张量 $\overset{\gg}{\mathbf{e}}$ 定义为

$$\overset{\gg}{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\overset{\gg}{\mathbf{I}} - \overset{\gg}{\mathbf{c}}) = e_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j \tag{2.9.12}$$

其分量为

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - c_{ij}), \quad (c_{ij} = G_{ij}) \tag{2.9.13}$$

$\overset{\gg}{\mathbf{e}}$ 的主轴表示为

$$\overset{\gg}{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(1 - \lambda_1^{-2})\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1 + \frac{1}{2}(1 - \lambda_2^{-2})\mathbf{n}_2\mathbf{n}_2$$

$$+ \frac{1}{2}(1 - \lambda_3^{-2})\mathbf{n}_3\mathbf{n}_3 \tag{2.9.14}$$

由(2.5.13)式

$$\lambda_{\mathbf{n}}^2 = \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{n}}$$

故

$$\mathbf{n}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{\lambda_{\mathbf{n}}^2} = \frac{(dS)^2}{(ds)^2}$$

$$\mathbf{n}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{n}=\frac{1}{2}\mathbf{n}\cdot(\overset{\gg}{\mathbf{I}}-\overset{\gg}{\mathbf{c}})\cdot\mathbf{n}=\frac{1}{2}(1-\lambda_{\mathbf{n}}^{-2})$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(ds)^2-(dS)^2}{(ds)^2}\tag{2.9.15}$$

此式说明 Almansi 应变张量 $\overset{\gg}{\mathbf{e}}$ 的几何意义：$\overset{\gg}{\mathbf{e}}$ 沿方向 $\mathbf{n}$ 的法分量为沿 $\mathbf{n}$ 的线元长度平方的相对变化（以构形 κ 为基准）之半。

同样，可以定义在构形 κ 中的工程应变张量：

$$\overset{\gg}{\mathbf{e}}_{\mathrm{I}}=\overset{\gg}{\mathbf{I}}-\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{1/2}=(1-\lambda_1^{-1})\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1+(1-\lambda_2^{-1})\mathbf{n}_2\mathbf{n}_2$$

$$+(1-\lambda_3^{-1})\mathbf{n}_3\mathbf{n}_3\tag{2.9.16}$$

由(2.5.14)式

$$\frac{1}{\lambda_{\mathbf{n}}}=|\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{1/2}\cdot\mathbf{n}|=|(\overset{\gg}{\mathbf{I}}-\overset{\gg}{\mathbf{e}}_{\mathrm{I}})\cdot\mathbf{n}|$$

故

$$\frac{ds-dS}{ds}=1-\lambda_{\mathbf{n}}^{-1}=1-|\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{1/2}\cdot\mathbf{n}|$$

$$=1-|(\overset{\gg}{\mathbf{I}}-\overset{\gg}{\mathbf{e}}_{\mathrm{I}})\cdot\mathbf{n}|\tag{2.9.17}$$

注意如果 $\mathbf{n}$ 不是 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}$ 的主方向(因而不是 $\overset{\gg}{\mathbf{e}}_{\mathrm{I}}$ 的主方向)，则

$$1-\lambda_{\mathbf{n}}^{-1}\neq\mathbf{n}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{e}}_{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{n}。$$

对数应变张量 $\overset{\gg}{\mathbf{h}}$ 的定义为

$$\overset{\gg}{\mathbf{h}}=-\frac{1}{2}\ln\overset{\gg}{\mathbf{c}}=\ln\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{-1/2}=-\ln(\overset{\gg}{\mathbf{I}}-\overset{\gg}{\mathbf{e}}_{\mathrm{I}})$$

$$=(\ln\lambda_1)\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1+(\ln\lambda_2)\mathbf{n}_2\mathbf{n}_2+(\ln\lambda_3)\mathbf{n}_3\mathbf{n}_3\tag{2.9.18}$$

它的几何意义可由下式看出：

$$\ln\frac{ds}{dS}=\ln\lambda_{\mathbf{n}}=\frac{1}{2}\ln\lambda_{\mathbf{n}}^{2}=-\frac{1}{2}\ln(\mathbf{n}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{n})$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(\mathbf{n}\cdot e^{-2\overset{\gg}{\mathbf{h}}}\cdot\mathbf{n})\tag{2.9.19}$$

注意如果 $\mathbf{n}$ 不是 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}$ 的主方向(因而不是 $\overset{\gg}{\mathbf{h}}$ 的主方向),则

$$\ln\lambda_{\mathbf{n}}\neq\mathbf{n}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{h}}\cdot\mathbf{n}$$

三、Green 应变张量 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}$ 与 Almansi 应变张量 $\overset{\gg}{\mathbf{e}}$ 的关系

Green 应变张量 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}$ 已见(2.9.2)式，其分量 E_{AB} 见(2.9.3)式:

$$E_{AB}=\frac{1}{2}(C_{AB}-G_{AB}),\quad (C_{AB}=g_{AB})$$

Almansi 应变张量 $\overset{\gg}{\mathbf{e}}$ 已见(2.9.12)式,其分量 e_{ij} 见(2.9.13)式:

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(g_{ij}-c_{ij}),\quad (c_{ij}=G_{ij})$$

由 (2.2.17) 式，g_{ij} 与 g_{AB} (即 C_{AB}) 之间满足坐标转换关系;由(2.2.29)式，G_{ij} (即 c_{ij}) 与 G_{AB} 之间满足坐标转换关系，故 e_{ij} 与 E_{AB} 之间也满足坐标转换关系:

$$e_{ij}=E_{AB}\frac{\partial X^{A}}{\partial x^{i}}\frac{\partial X^{B}}{\partial x^{j}},\quad E_{AB}=e_{ij}\frac{\partial x^{i}}{\partial X^{A}}\frac{\partial x^{j}}{\partial X^{B}}\tag{2.9.20}$$

因此

$$\begin{aligned}\overset{\gg}{\mathbf{e}}&=e_{ij}\mathbf{g}^{i}\mathbf{g}^{j}=E_{AB}X^{A}_{,i}X^{B}_{,j}\mathbf{g}^{i}\mathbf{g}^{j}=(\partial_{i}X^{A})E_{AB}X^{B}_{,j}\mathbf{g}^{i}\mathbf{g}^{j}\\&=(\partial_{i}X^{A}\mathbf{g}^{i}\mathbf{G}_{A})\cdot(E_{MN}\mathbf{G}^{M}\mathbf{G}^{N})\cdot(X^{B}_{,j}\mathbf{G}_{B}\mathbf{g}^{j})\\&=(\overset{\rightarrow}{\nabla}\mathbf{P})\cdot\overset{\ll}{\mathbf{E}}\cdot(\mathbf{P}\overset{\rightarrow}{\nabla})\end{aligned}$$

即

$$\overset{\gg}{\mathbf{e}}=\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{*}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{E}}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}\tag{2.9.21a}$$

由此得

$$\overset{((}{\mathbf{E}} = \overset{()}{\mathbf{D}}^* \cdot \overset{))}{\mathbf{e}} \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}} \qquad (2.9.21b)$$

(2.9.21*a*) 与 (2.9.21*b*) 式就是 Green应变张量 $\overset{((}{\mathbf{E}}$ 与 Almansi 应变张量 $\overset{))}{\mathbf{e}}$ 的关系，其分量形式即为(2.9.20)的两式。

(2.9.21)式也可用另外的方法证明：

一种方法是比较 (2.9.1) 与(2.9.11) 式的 $(ds)^2-(dS)^2$。将 (2.3.11) 的 $d\mathbf{p}=\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot d\mathbf{P}$ 代入(2.9.11)式，得到

$$(ds)^2-(dS)^2 = 2d\mathbf{p}\cdot\overset{))}{\mathbf{e}}\cdot d\mathbf{p} = 2d\mathbf{P}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}^*\cdot\overset{))}{\mathbf{e}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot d\mathbf{P}$$

将此式与(2.9.1)式对比，并注意到 $d\mathbf{P}$ 为任意，且(2.9.1)式中的 $\overset{((}{\mathbf{E}}$ 与上式中的 $\overset{()}{\mathbf{D}}^*\cdot\overset{))}{\mathbf{e}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}$ 均为对称张量，故得

$$\overset{((}{\mathbf{E}} = \overset{()}{\mathbf{D}}^* \cdot \overset{))}{\mathbf{e}} \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}}$$

此即 (2.9.21*b*) 式。同理可导出 (2.9.21*a*) 式。

另一种方法是利用 $\overset{((}{\mathbf{E}}$ 与 $\overset{))}{\mathbf{e}}$ 的定义式(2.9.2)与(2.9.12) 式来证明(2.9.21)式。将(2.9.2)式代入 (2.9.21*a*) 式的右端，得

$$\overset{)(}{\mathbf{D}}^{*-1}\cdot\overset{((}{\mathbf{E}}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}^{-1} = \frac{1}{2}\overset{)(}{\mathbf{D}}^{*-1}\cdot(\overset{((}{\mathbf{C}}-\overset{((}{\mathbf{I}})\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}^{-1}$$

再将(2.5.1)之 $\overset{((}{\mathbf{C}}=\overset{()}{\mathbf{D}}^*\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}$ 式代入上式右端，并利用(2.9.12)，得

$$\overset{)(}{\mathbf{D}}^{*-1}\cdot\overset{((}{\mathbf{E}}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}^{-1} = \frac{1}{2}(\overset{))}{\mathbf{I}}-\overset{))}{\mathbf{c}}) = \overset{))}{\mathbf{e}}$$

此即 (2.9.21*a*) 式。同理可证 (2.9.21*b*) 式。

由(2.9.2)式，利用转换关系(2.9.20)式，可得 Green 应变张量 $\overset{((}{\mathbf{E}}$ 在坐标系 $\{x^i, t_0\}$ 中的表示：

$$\overset{((}{\mathbf{E}} = E_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B = \varepsilon_{ij}\mathbf{G}^i\mathbf{G}^j \qquad (2.9.22)$$

将 $\mathbf{G}^i$ 自构形 $\mathscr{R}$ 平移至构形 $\boldsymbol{\kappa}$ 中，记作 $\overset{-1}{\mathbf{c}^i}$ (见 § 2.2)，得到

$$\overset{\gg}{\mathbf{E}} = e_{ij}\overset{-1}{\mathbf{c}}{}^i\overset{-1}{\mathbf{c}}{}^j \tag{2.9.22$'$}$$

以上两式为 Green 应变张量的另一种表示形式。

同样，由(2.9.12)式，利用转换关系(2.9.20)式，可得 Almansi 应变张量 $\overset{\gg}{\mathbf{e}}$ 在坐标系 $\{X^A, t\}$ 中的表示:

$$\overset{\gg}{\mathbf{e}} = e_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j = E_{AB}\mathbf{g}^A\mathbf{g}^B \tag{2.9.23}$$

将 $\mathbf{g}^A$ 自构形 $\mathscr{r}$ 平移至构形 $\mathscr{R}$ 中，记作 $\overset{-1}{\mathbf{C}}{}^A$ (见 § 2.2)，得到

$$\overset{\ll}{\mathbf{e}} = E_{AB}\overset{-1}{\mathbf{C}}{}^A\overset{-1}{\mathbf{C}}{}^B \tag{2.9.23$'$}$$

以上两式为 Almansi 应变张量的另一种表示形式。

比较(2.9.22)与(2.9.23)式，可以看出应变分量 E_{AB} 配上变形前的 Lagrange 坐标基矢量 $\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B$ 后，成为 Green 应变张量 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}$，而配上变形后的 Lagrange 坐标基矢量 $\mathbf{g}^A\mathbf{g}^B$，则成为 Almansi 应变张量 $\overset{\gg}{\mathbf{e}}$。

习题 2.8 证明张量 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 与 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}$ 的不变量关系:

$$\mathscr{J}_1(\mathbf{C}) = \mathscr{J}_1(\overset{-1}{\mathbf{c}}), \quad \mathscr{J}_2(\mathbf{C}) = \mathscr{J}_2(\overset{-1}{\mathbf{c}}), \quad \mathscr{J}_3(\mathbf{C}) = \mathscr{J}_3(\overset{-1}{\mathbf{c}})$$

$$\mathscr{J}_1(\mathbf{c}) = \mathscr{J}_1(\overset{-1}{\mathbf{C}}), \quad \mathscr{J}_2(\mathbf{c}) = \mathscr{J}_2(\overset{-1}{\mathbf{C}}), \quad \mathscr{J}_3(\mathbf{c}) = \mathscr{J}_3(\overset{-1}{\mathbf{C}})$$

及

$$\mathscr{J}_1(\mathbf{c}) = \frac{\mathscr{J}_2(\mathbf{C})}{\mathscr{J}_3(\mathbf{C})}, \quad \mathscr{J}_2(\mathbf{c}) = \frac{\mathscr{J}_1(\mathbf{C})}{\mathscr{J}_3(\mathbf{C})},$$

$$\mathscr{J}_3(\mathbf{c}) = \frac{1}{\mathscr{J}_3(\mathbf{C})}$$

习题 2.9 证明张量 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 与 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}$ 的不变量关系:

$$\mathscr{J}_1(\mathbf{C}) = 3 + 2\mathscr{J}_1(\mathbf{E})$$

$$\mathscr{J}_2(\mathbf{C}) = 3 + 4\mathscr{J}_1(\mathbf{E}) + 4\mathscr{J}_2(\mathbf{E})$$

$$\mathscr{J}_3(\mathbf{C}) = 1 + 2\mathscr{J}_1(\mathbf{E}) + 4\mathscr{J}_2(\mathbf{E}) + 8\mathscr{J}_3(\mathbf{E})$$

及

$$2\mathscr{J}_1(\mathbf{E}) = -3 + \mathscr{J}_1(\mathbf{C})$$
$$4\mathscr{J}_2(\mathbf{E}) = 3 - 2\mathscr{J}_1(\mathbf{C}) + \mathscr{J}_2(\mathbf{C})$$
$$8\mathscr{J}_3(\mathbf{E}) = -1 + \mathscr{J}_1(\mathbf{C}) - \mathscr{J}_2(\mathbf{C}) + \mathscr{J}_3(\mathbf{C})$$

习题 2.10 证明张量 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}$ 与 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{e}}$ 的不变量关系

$$\mathscr{J}_1(\mathbf{c}) = 3 - 2\mathscr{J}_1(\mathbf{e})$$
$$\mathscr{J}_2(\mathbf{c}) = 3 - 4\mathscr{J}_1(\mathbf{e}) + 4\mathscr{J}_2(\mathbf{e})$$
$$\mathscr{J}_3(\mathbf{c}) = 1 - 2\mathscr{J}_1(\mathbf{e}) + 4\mathscr{J}_2(\mathbf{e}) - 8\mathscr{J}_3(\mathbf{e})$$

及

$$2\mathscr{J}_1(\mathbf{e}) = 3 - \mathscr{J}_1(\mathbf{c})$$
$$4\mathscr{J}_2(\mathbf{e}) = 3 - 2\mathscr{J}_1(\mathbf{c}) + \mathscr{J}_2(\mathbf{c})$$
$$8\mathscr{J}_3(\mathbf{e}) = 1 - \mathscr{J}_1(\mathbf{c}) + \mathscr{J}_2(\mathbf{c}) - \mathscr{J}_3(\mathbf{c})$$

四、应变张量通过位移矢量的表示

由(2.1.3)式，变形后的矢径 $\mathbf{p}$ 与变形前的矢径 $\mathbf{P}$ 之关系为

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{u} \qquad (2.1.3)$$

式中 $\mathbf{u}$ 为位移矢量，其分解式由(2.2.7)与(2.2.8)式为

$$\overset{\langle}{\mathbf{u}} = u^A \mathbf{G}_A, \quad \overset{\rangle}{\mathbf{u}} = u^i \mathbf{g}_i$$

式中 u^A 与 u^i 的关系见前 (2.2.9*b*) 式，即

$$u^A = g^A_r u^r, \quad u^i = g^i_M u^M \qquad (2.2.9b)$$

由(2.5.1)式，Green 变形张量为

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}} = \overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}} = (\overset{\langle}{\nabla}\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{p}\overset{\langle}{\nabla})$$
$$= \overset{\langle\langle}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{D}} = (\overset{\langle\langle}{\nabla\mathbf{p}}) \cdot (\overset{\langle\langle}{\mathbf{p}\nabla})$$

式中，由(2.1.3)式

$$\overset{\langle\langle}{\nabla\mathbf{p}} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{I}} + \overset{\langle\langle}{\nabla\mathbf{u}}$$

故

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}} = (\overset{\langle\langle}{\mathbf{I}} + \overset{\langle\langle}{\nabla\mathbf{u}}) \cdot (\overset{\langle\langle}{\mathbf{I}} + \overset{\langle\langle}{\mathbf{u}\nabla})$$

$$= \overset{\ll}{\mathbf{I}} + \mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla) \qquad (2.9.24)$$

$$\overset{\ll}{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\overset{\ll}{\mathbf{C}} - \overset{\ll}{\mathbf{I}}) = \frac{1}{2}[\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]$$

$$(2.9.25)$$

类似地，由(2.5.2)式，Cauchy 变形张量为

$$\overset{\gg}{\mathbf{c}} = \overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}} = (\nabla\mathbf{P})\cdot(\mathbf{P}\nabla)$$

$$= \overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot \overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{D}}} = (\nabla\mathbf{P})\cdot(\mathbf{P}\nabla)$$

式中，由(2.1.3)式，

$$\nabla\mathbf{P} = \overset{\gg}{\mathbf{I}} - \nabla\mathbf{u}$$

故

$$\overset{\gg}{\mathbf{c}} = (\overset{\gg}{\mathbf{I}} - \nabla\mathbf{u})\cdot(\overset{\gg}{\mathbf{I}} - \mathbf{u}\nabla)$$

$$= \overset{\gg}{\mathbf{I}} - \mathbf{u}\nabla - \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla) \qquad (2.9.26)$$

$$\overset{\gg}{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\overset{\gg}{\mathbf{I}} - \overset{\gg}{\mathbf{c}}) = \frac{1}{2}[\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u} - (\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)] \quad (2.9.27)$$

Green 应变张量 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}$ 的分量与 Almansi 应变张量 $\overset{\gg}{\mathbf{e}}$ 的分量通过位移分量的表达示可由(2.9.25)与(2.9.27)式得到：

$$E_{AB} = \frac{1}{2}[u_{A;B} + u_{B;A} + u_{M;A}u^{M}_{;B}] \qquad (2.9.25)'$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}[u_{i;j} + u_{j;i} - u_{k;i}u^{k}_{;j}] \qquad (2.9.27)'$$

五、Seth 应变度量类①

Green 应变张量 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}$，工程应变张量 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}_{\text{工}}$ 和对数应变张量 $\overset{\ll}{\mathbf{H}}$ 的

---

① Seth, B. R., Generalized strain measure with application to physical problems, Second-Order Effects in Elasticity. Plasticity and Fluid Dynamics, eds. M. Reiner and D. Abir, Macmillan, 1964.

主轴表示已见(2.9.4),(2.9.6)和(2.9.8)式。其实,可以作为应变度量的远远不止这些张量。任何主方向与 Lagrange 方向 $\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}, \underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}, \underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}$ 重合并且能唯一地确定对应的主长度比 $\underset{\mathrm{I}}{\lambda}, \underset{\mathrm{II}}{\lambda}, \underset{\mathrm{III}}{\lambda}$ 的张量均可作为应变度量。 Hill① 建议一种类型的应变度量:

$$\begin{aligned} \overset{\shortparallel}{\mathscr{E}} &= \underset{\mathrm{I}}{\mathscr{E}}\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}} + \underset{\mathrm{II}}{\mathscr{E}}\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}} + \underset{\mathrm{III}}{\mathscr{E}}\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}} \\ &= f(\underset{\mathrm{I}}{\lambda})\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}} + f(\underset{\mathrm{II}}{\lambda})\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}} + f(\underset{\mathrm{III}}{\lambda})\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}} \end{aligned} \tag{2.9.28}$$

式中

$$\underset{\Gamma}{\mathscr{E}} = f(\underset{\Gamma}{\lambda}), \quad \Gamma = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$$

$f(\lambda)$ 为任一光滑单调的"标量函数"。只要规定好这一函数 $f(\lambda)$,那么 (2.9.28)式就给出一个相应的应变度量 $\overset{\shortparallel}{\mathscr{E}}$。 如果 $f(\lambda)$ 是一个解析函数,(2.9.28)式还可写作以下形式:

$$\overset{\shortparallel}{\mathscr{E}} = f(\overset{\shortparallel}{\mathbf{U}}) \tag{2.9.29}$$

式中 $\overset{\shortparallel}{\mathbf{U}}$ 为右伸长张量(见 (2.6.15) 式)。 为了使在参考构形 (即 $\underset{\mathrm{I}}{\lambda} = \underset{\mathrm{II}}{\lambda} = \underset{\mathrm{III}}{\lambda} = 1$) $\overset{\shortparallel}{\mathscr{E}}$ 为零,且当主长度比 $\underset{\mathrm{I}}{\lambda}, \underset{\mathrm{II}}{\lambda}$ 与 $\underset{\mathrm{III}}{\lambda}$ 在 1 附近时 $\overset{\shortparallel}{\mathscr{E}}$ 与古典的小应变张量定义一致, $f(\lambda)$ 应满足

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1 \tag{2.9.30}$$

Seth 建议取

$$f(\lambda) = \frac{1}{2n}(\lambda^{2n} - 1) \tag{2.9.31}$$

显然,(2.9.31)式的 $f(\lambda)$ 满足(2.9.30)。而且当 $f(\lambda)$ 取(2.9.31)式时,(2.9.28)式的应变张量 $\overset{\shortparallel}{\mathscr{E}}$ 称为 Seth 应变度量类,并记作

---

① Hill, R., Aspects of invariance in solid mechanics. Advances in Appl. Mech., v. 18, 1978, 1—75.

$$\overset{\ll}{\mathbf{E}}{}^{(n)}=\frac{1}{2n}\sum_{\Gamma}(\underset{\Gamma}{\lambda}{}^{2n}-1)\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}=\frac{1}{2n}(\overset{\ll}{\mathbf{U}}{}^{2n}-\overset{\ll}{\mathbf{I}})\qquad(2.9.32a)$$

其主值为

$$\underset{\Gamma}{E}{}^{(n)}=\frac{1}{2n}(\underset{\Gamma}{\lambda}{}^{2n}-1)\quad(\Gamma=\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III})\qquad(2.9.32b)$$

研究几个 n 为特殊值的情况:

1. $n=1$, $\overset{\ll}{\mathbf{E}}{}^{(1)}$ 就是(2.9.2)式的 Green 应变张量 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}$, 因为(利用(2.6.15))

$$\overset{\ll}{\mathbf{E}}{}^{(1)}=\frac{1}{2}(\overset{\ll}{\mathbf{U}}{}^{2}-\overset{\ll}{\mathbf{I}})=\frac{1}{2}(\overset{\ll}{\mathbf{C}}-\overset{\ll}{\mathbf{I}})=\overset{\ll}{\mathbf{E}}\qquad(2.9.33a)$$

其协变分量为

$$E^{(1)}_{AB}=\frac{1}{2}(C_{AB}-G_{AB})=\frac{1}{2}(g_{AB}-G_{AB})\qquad(2.9.33b)$$

主值为

$$\underset{\Gamma}{E}{}^{(1)}=\frac{1}{2}(\underset{\Gamma}{\lambda}{}^{2}-1),\quad(\Gamma=\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III})\qquad(2.9.33c)$$

2. $n=-1$

$$\overset{\ll}{\mathbf{E}}{}^{(-1)}=\frac{1}{2(-1)}(\overset{\ll}{\mathbf{U}}{}^{-2}-\overset{\ll}{\mathbf{I}})=\frac{1}{2}(\overset{\ll}{\mathbf{I}}-\overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{-1})\qquad(2.9.34a)$$

其逆变分量为

$$E^{(-1)AB}=\frac{1}{2}(G^{AB}-\overset{-1}{C}{}^{AB})=\frac{1}{2}(G^{AB}-g^{AB})\qquad(2.9.34b)$$

主值为

$$\underset{\Gamma}{E}{}^{(-1)}=\frac{1}{2}(1-\underset{\Gamma}{\lambda}{}^{-2})\quad(\Gamma=\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III})\qquad(2.9.34c)$$

利用(2.8.25)的第四式,由上式可得 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}{}^{(-1)}$ 与(2.9.12)式的 Almansi 应变张量 $\overset{\gg}{\mathbf{e}}$ 的关系:

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}^{(-1)} = \overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}^* \cdot \frac{1}{2}(\overset{\rangle\langle}{\mathbf{I}} - \overset{\langle\langle}{\mathbf{c}}) \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}} = \overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}^* \cdot \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{e}} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}} \qquad (2.9.35)$$

因此 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}^{(-1)}$ 就是 Almansi 应变张量 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{e}}$ 经过旋转的结果，$\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}^{(-1)}$ 的主值与 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{e}}$ 的主值相同，但 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}^{(-1)}$ 的主方向则为 Lagrange 方向 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}$（注意 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{e}}$ 的主方向为 Euler 方向 $\underset{\Gamma}{\mathbf{n}}$）。以后称 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}^{(-1)}$ 为 Almansi 应变度量。

3. $n = 1/2$，$\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}^{(1/2)}$ 就是(2.9.6)式的工程应变张量：

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}^{(1/2)} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} - \overset{\langle\langle}{\mathbf{I}} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}^{1/2} - \overset{\langle\langle}{\mathbf{I}} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}_{\mathrm{I}} \qquad (2.9.36a)$$

其主值为

$$\underset{\Gamma}{E}^{(1/2)} = \underset{\Gamma}{\lambda} - 1 \quad (\Gamma = \mathrm{I, II, III}) \qquad (2.9.36b)$$

4. $n = 0$，当 $n = 0$ 时，设(2.9.31)式 $f(\lambda)$ 取其 $n \to 0$ 时的极限值，即

$$\lim_{n\to 0} f(\lambda) = \ln\lambda \qquad (2.9.37)$$

因此

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}^{(0)} = \ln\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} = \sum_{\Gamma}(\ln\underset{\Gamma}{\lambda})\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}\underset{\Gamma}{\mathbf{N}} \qquad (2.9.38a)$$

其主值为

$$\underset{\Gamma}{E}^{(0)} = \ln\underset{\Gamma}{\lambda} \quad (\Gamma = \mathrm{I, II, III}) \qquad (2.9.38b)$$

最后，我们来讨论对应于(2.9.28)式函数 $f(\lambda)$ 与 $\bar{f}(\lambda)$ 的两种不同的 Hill 应变度量 $\overset{\langle\langle}{\mathscr{E}}$ 与 $\overset{\langle\rangle}{\bar{\mathscr{E}}}$ 之间的关系。将 $f(\lambda)$ 在 $\lambda = 1$ 处展开成幂级数，并注意条件(2.9.30) $f(1) = 0$，$f'(1) = 1$，可得

$$f(\lambda) = (\lambda - 1) + \frac{1}{2}f''(1)(\lambda - 1)^2 + \cdots$$

因此 $\overset{\ll}{\mathscr{E}}$ 也可展成 $\overset{\ll}{\mathbf{U}} - \overset{\ll}{\mathbf{I}}$ 的幂级数：

$$\overset{\ll}{\mathscr{E}} = (\overset{\ll}{\mathbf{U}} - \overset{\ll}{\mathbf{I}}) + \frac{1}{2} f''(1)(\overset{\ll}{\mathbf{U}} - \overset{\ll}{\mathbf{I}})^2 + \cdots \qquad (2.9.39)$$

因此可知两种不同的应变度量 $\overset{\ll}{\mathscr{E}}$ 与 $\overset{\overline{\ll}}{\mathscr{E}}$ 之差可表示成

$$\overset{\overline{\ll}}{\mathscr{E}} - \overset{\ll}{\mathscr{E}} = m \overset{\ll}{\mathscr{E}} \cdot \overset{\ll}{\mathscr{E}} + \cdots \qquad (2.9.40)$$

$$m = \frac{1}{2}(\bar{f}''(1) - f''(1))$$

式中：…表示更高次（对于 $\overset{\ll}{\mathscr{E}}$）的项，由此可见 $\overset{\overline{\ll}}{\mathscr{E}}$ 与 $\overset{\ll}{\mathscr{E}}$ 所差的是二次及更高次的项。若取 $\overset{\ll}{\mathscr{E}} = \overset{\ll}{\mathbf{E}}^{(0)}$、$\overset{\overline{\ll}}{\mathscr{E}} = \overset{\ll}{\mathbf{E}}^{(n)}$，则(2.9.40)给出

$$\overset{\ll}{\mathbf{E}}^{(n)} - \overset{\ll}{\mathbf{E}}^{(0)} = n \overset{\ll}{\mathbf{E}}^{(0)} \cdot \overset{\ll}{\mathbf{E}}^{(0)} + \cdots \qquad (2.9.41)$$

§2.10 协 调 方 程

Riemann-Christoffel 张量的定义为

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(g_{il,jk} + g_{jk,il} - g_{ik,jl} - g_{jl,ik}) + g^{rs}(\Gamma_{il,r}\Gamma_{jk,s} - \Gamma_{ik,r}\Gamma_{jl,s}) \qquad (2.10.1)$$

式中 $\Gamma_{il,r}$ 等表示第一类 Christoffel 符号。此张量为零是欧氏空间的必要且充分条件。

Riemann-Christoffel 张量满足 Bianchi 恒等式：

$$R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0$$

上式虽然有五个自由指标，但实际上只包含三个独立式。上式可以利用在所研究的点处使所有的 Christoffel 符号都等于零（$\Gamma_{il,k} = 0$）的坐标来证明。

一、Green 变形张量 C_{AB} 所满足的协调条件

在构形 $\bar{\ast}$ 中以 x^i 为坐标，度量张量为 g_{ij}，g^{ij}；而在 $\{X^k, t\}$ 坐标系中，则度量张量为

$$g_{AB} = C_{AB}, \quad g^{AB} = \overset{-1}{C}{}^{AB}$$

由(2.10.1)式，由于变形后的物体构形处于欧氏空间中，在构形 $\bar{\ast}$ 中的 Riemann-Christoffel 张量

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{R}_{ijkl}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\mathbf{g}^k\mathbf{g}^l = \bar{R}_{ABCD}\mathbf{g}^A\mathbf{g}^B\mathbf{g}^C\mathbf{g}^D$$

恒为零，因此，式中的分量必为零，即

$$\bar{R}_{ijkl} = \frac{1}{2}(g_{il,jk} + g_{jk,il} - g_{ik,jl} - g_{jl,ik}) + g^{rs}(\bar{\Gamma}_{il,r}\bar{\Gamma}_{jk,s} - \bar{\Gamma}_{ik,r}\bar{\Gamma}_{jl,s}) = 0 \qquad (2.10.2)$$

$$\bar{R}_{ABCD} = \frac{1}{2}(g_{AD,BC} + g_{BC,AD} - g_{AC,BD} - g_{BD,AC}) + g^{RS}(\bar{\Gamma}_{AD,R}\bar{\Gamma}_{BC,S} - \bar{\Gamma}_{AC,R}\bar{\Gamma}_{BD,S}) = 0 \qquad (2.10.3)$$

式中 $\bar{\Gamma}_{AD,R}$ 等表示在构形 $\bar{\ast}$ 中的第一类 Christoffel 符号。由于 $g_{AB} = C_{AB}$，$g^{AB} = \overset{-1}{C}{}^{AB}$，(2.10.3)式可写作：

$$\bar{R}_{ABCD} = \frac{1}{2}(C_{AD,BC} + C_{BC,AD} - C_{AC,BD} - C_{BD,AC}) + \overset{-1}{C}{}^{RS}(\bar{\Gamma}_{AD,R}\bar{\Gamma}_{BC,S} - \bar{\Gamma}_{AC,R}\bar{\Gamma}_{BD,S}) = 0 \qquad (2.10.3)'$$

式中

$$\bar{\Gamma}_{AB,C} = \frac{1}{2}(C_{AC,B} + C_{BC,A} - C_{AB,C}) \qquad (2.10.4)$$

(2.10.3)′式称为 Green 变形张量 C_{AB} 所满足的协调条件，它包含形式不同的六个方程，但是这六个方程之间满足一定的关系(Bianchi 恒等式)。

二、Cauchy 变形张量 c_{ij} 所满足的协调条件

在构形 $\mathscr{R}$ 中以 X^A 为坐标，度量张量为 G_{AB}，G^{AB}；而在 $\{x^i, t_0\}$ 坐标系中，则度量张量为

$$G_{ij}=c_{ij},\quad G^{ij}=\overset{-1}{c}{}^{ij}$$

由(2.10.1)式，由于变形前的物体构形处于欧氏空间中，在构形 $\mathscr{R}$ 中的 Riemann-Christoffel 张量

$$\overset{\mathscr{R}}{\mathbf{R}}=\overset{\mathscr{R}}{R}_{ABCD}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B\mathbf{G}^C\mathbf{G}^D=\overset{\mathscr{R}}{R}_{ijkl}\mathbf{G}^i\mathbf{G}^j\mathbf{G}^k\mathbf{G}^l$$

恒为零，因此式中的分量必为零，即

$$\begin{aligned}\overset{\mathscr{R}}{R}_{ABCD}=&\frac{1}{2}(G_{AD,BC}+G_{BC,AD}-G_{AC,BD}-G_{BD,AC})\\&+G^{RS}(\overset{\mathscr{R}}{\Gamma}_{AD,R}\overset{\mathscr{R}}{\Gamma}_{BC,S}-\overset{\mathscr{R}}{\Gamma}_{AC,R}\overset{\mathscr{R}}{\Gamma}_{BD,S})=0\end{aligned}\tag{2.10.5}$$

$$\begin{aligned}\overset{\mathscr{R}}{R}_{ijkl}=&\frac{1}{2}(G_{il,jk}+G_{jk,il}-G_{ik,jl}-G_{jl,ik})\\&+G^{rs}(\overset{\mathscr{R}}{\Gamma}_{il,r}\overset{\mathscr{R}}{\Gamma}_{jk,s}-\overset{\mathscr{R}}{\Gamma}_{ik,r}\overset{\mathscr{R}}{\Gamma}_{jl,s})=0\end{aligned}\tag{2.10.6}$$

式中 $\overset{\mathscr{R}}{\Gamma}_{il,r}$ 等表示在构形 $\mathscr{R}$ 中的第一类 Chtistoffel 符号。 由于 $G_{ij}=c_{ij}$，$G^{ij}=\overset{-1}{c}{}^{ij}$，(2.10.6)式可写作

$$\begin{aligned}\overset{\mathscr{R}}{R}_{ijkl}=&\frac{1}{2}(c_{il,jk}+c_{jk,il}-c_{ik,jl}-c_{jl,ik})\\&+\overset{-1}{c}{}^{rs}(\overset{\mathscr{R}}{\Gamma}_{il,r}\overset{\mathscr{R}}{\Gamma}_{jk,s}-\overset{\mathscr{R}}{\Gamma}_{ik,r}\overset{\mathscr{R}}{\Gamma}_{jl,s})=0\end{aligned}\tag{2.10.6$'$}$$

式中

$$\overset{\mathscr{R}}{\Gamma}_{ij,k}=\frac{1}{2}(c_{ik,j}+c_{jk,i}+c_{ij,k})\tag{2.10.7}$$

(2.10.6)$'$ 式称为 Cauchy 变形张量 c_{ij} 所满足的协调条件，包含形式不同的六个方程，其间满足一定的关系 (Bianchi 恒等式)。

§2.11 例

例1 变形梯度 $\overset{)(}{\mathbf{D}}=$ 常张量

由(1.2.13)式，

$$d\overset{)(}{\mathbf{D}}=d\mathbf{P}\cdot\overset{(}{\square}\overset{)(}{\mathbf{D}}-(\overset{)(}{\mathbf{D}}\overset{(}{\square})\cdot d\mathbf{P}$$

因 $d\overset{)(}{\mathbf{D}}=\mathbf{0}$，故

$$\overset{)(}{\mathbf{D}}\overset{(}{\square}=\mathbf{0}$$

其分量形式为

$$(x^i_{,A})_{;M}=0 \quad 即 \quad x^i_{,A;M}+x^i_{,A;r}x^r_{,M}=0$$

若采用笛卡儿坐标，并将 x^i, X^A 记作 z^i, Z^A，则协变导数同普通导数。设 $z^i=z^i(Z^A)$，$z^i_{,A}$ 为 Z^A 的函数，$z^i_{,A;r}=0$，故上式成为

$$z^i_{,AM}=0, \quad 即 \quad z^i_{,A}=\mathrm{const}$$

因此 z^i 为 Z^A 的线性函数。

例2 均匀拉伸

设采用笛卡儿坐标 $x^i=z^i$, $X^A=Z^A$。且 z^i 系与 X^A 系的坐标轴平行，故基矢量相等①：

$$\mathbf{i}_1=\mathbf{I}_1 \quad \mathbf{i}_2=\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{i}_3=\mathbf{I}_3$$

设变形梯度 $\overset{)(}{\mathbf{D}}$ 的矩阵为

$$\|\overset{)(}{\mathbf{D}}\|=\|x^i_{,A}\|=\left\|\begin{matrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{matrix}\right\|$$

① 为简单起见，这里在 $\mathscr{R}$ 构形中的基矢量 $\mathbf{I}_{\mathrm{I}}$, $\mathbf{I}_{\mathrm{II}}$ $\mathbf{I}_{\mathrm{III}}$ 记作 $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$，不致引起角标的混淆。在不致引起混淆的情况下，以后 $\mathscr{R}$ 中的角标 I, II, III 记作 1, 2, 3。

则可计算得到

$$\|\overset{-1}{\overset{\circ}{\mathbf{D}}}\| = \|X^A_{\cdot i}\| = \begin{Vmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{Vmatrix}$$

$$\|\overset{((}{\mathbf{C}}\| = \|\overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}}\| = \|\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{c}}}\| = \|\overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^*\| = \begin{Vmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{Vmatrix}$$

$$\|\overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{C}}}\| = \|\overset{-1}{\overset{\circ}{\mathbf{D}}} \cdot \overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^*\| = \|\overset{))}{\mathbf{c}}\| = \|\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^* \cdot \overset{-1}{\overset{\circ}{\mathbf{D}}}\| = \begin{Vmatrix} \lambda_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-2} \end{Vmatrix}$$

变形张量的不变量为

$$\mathscr{I}_1(\mathbf{C}) = \mathscr{I}_1(\overset{-1}{\mathbf{c}}) = C^A_{\cdot A} = \overset{-1}{c}{}^r_{\cdot r} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$\mathscr{I}_2(\mathbf{C}) = \mathscr{I}_2(\overset{-1}{\mathbf{c}}) = \frac{1}{2!}\delta^{AB}_{KL} C^K_{\cdot A} C^L_{\cdot B} = \frac{1}{2!}\delta^{ij}_{rs} \overset{-1}{c}{}^r_{\cdot i} \overset{-1}{c}{}^s_{\cdot j}$$

$$= \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2$$

$$\mathscr{I}_3(\mathbf{C}) = \mathscr{I}_3(\overset{-1}{\mathbf{c}}) = |C^A_{\cdot B}| = |c^i_{\cdot j}| = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$$

例 3 简单剪切(或单剪)

设采用重合的笛卡儿 Lagrange 与 Euler 坐标系 Z^A 与 z^i。设 γ 为剪切角(图 2.4)，令 $S = \tan\gamma$。坐标变换关系为

$$z^1 = Z^1 + SZ^2, \quad z^2 = Z^2, \quad z^3 = Z^3$$

或

$$Z^1 = z^1 - Sz^2, \quad Z^2 = z^2, \quad Z^3 = z^3$$

则可计算得以下各张量的矩阵：

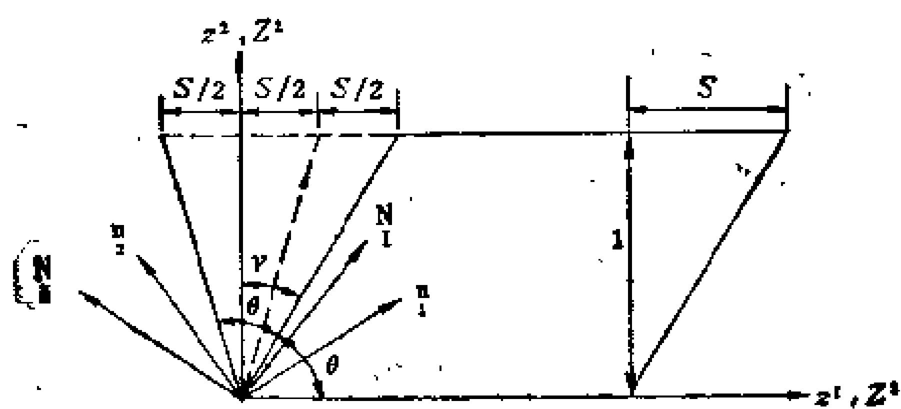


图 2.4

$$\|\overset{\times}{\mathbf{D}}\| = \|x^i_{,A}\| = \begin{Vmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\|\overset{-1}{\overset{\circ}{\mathbf{D}}}\| = \|X^A_{,i}\| = \begin{Vmatrix} 1 & -S & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\|\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}\| = \|\overset{\circ}{\mathbf{D}}^* \cdot \overset{\times}{\mathbf{D}}\| = \begin{Vmatrix} 1 & S & 0 \\ S & 1+S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\|\overset{-1}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}}\| = \|\overset{-1}{\overset{\circ}{\mathbf{D}}} \cdot \overset{-1}{\overset{\times}{\mathbf{D}}}{}^*\| = \begin{Vmatrix} 1+S^2 & -S & 0 \\ -S & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\|\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}\| = \left\|\frac{1}{2}(\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}} - \overset{\langle\langle}{\mathbf{I}})\right\| = \begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{S}{2} & 0 \\ \dfrac{S}{2} & \dfrac{S^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\|\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}\| = \|\overset{-1}{\overset{\times}{\mathbf{D}}}{}^* \cdot \overset{-1}{\overset{\circ}{\mathbf{D}}}\| = \begin{Vmatrix} 1 & -S & 0 \\ -S & 1+S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\|\overset{\gg -1}{\mathbf{c}}\| = \|\overset{\gg}{\mathbf{D}} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{D}}^*\| = \left\| \begin{matrix} 1+S^2 & S & 0 \\ S & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$\|\overset{\gg}{\mathbf{e}}\| = \left\| \frac{1}{2}(\overset{\gg}{\mathbf{I}} - \overset{\gg}{\mathbf{c}}) \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & \frac{S}{2} & 0 \\ \frac{S}{2} & -\frac{S^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

变形张量的不变量为

$$\mathscr{I}_1(\mathbf{C}) = \mathscr{I}_1(\overset{-1}{\mathbf{c}}) = 3 + S^2$$

$$\mathscr{I}_2(\mathbf{C}) = \mathscr{I}_2(\overset{-1}{\mathbf{c}}) = 3 + S^2$$

$$\mathscr{I}_3(\mathbf{C}) = \mathscr{I}_3(\overset{-1}{\mathbf{c}}) = 1$$

故单剪时体积不变。

Green 应变张量 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}$ 的不变量为

$$\mathscr{I}_1(\mathbf{E}) = \frac{S^2}{2} \quad \mathscr{I}_2(\mathbf{E}) = -\frac{S^2}{4}, \quad \mathscr{I}_3(\mathbf{E}) = 0$$

Almansi 应变张量 $\overset{\gg}{\mathbf{e}}$ 的不变量为

$$\mathscr{I}_1(\mathbf{e}) = -\frac{S^2}{2}, \quad \mathscr{I}_2(\mathbf{e}) = -\frac{S^2}{4} \quad \mathscr{I}_3(\mathbf{e}) = 0$$

现在来求张量 $\mathbf{C}$ 的三个主值 $\underset{\Gamma}{C} = \underset{\Gamma}{\lambda}^2$ $(\Gamma = \mathrm{I, II, III})$，与三个主方向 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}$。主方向 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}$ 应满足(2.6.4)与(2.6.3)式

$$(\overset{\ll}{\mathbf{C}} - C\overset{\ll}{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{N} = 0, \quad (C^A_{\cdot M} - C\delta^A_{\cdot M})N^M = 0$$

而主值 C 所满足的特征方程(2.6.5)在本例中成为

$$C^3 - \mathscr{I}_1^C C^2 + \mathscr{I}_2^C C - \mathscr{I}_3^C = 0$$

即

$$C^3 - (3 + S^2)C^2 + (3 + S^2)C - 1 = 0$$

或

$$(C-1)[C^2-(2+S^2)C+1]=0$$

故特征根即主值为①

$$\underset{\text{I}}{C}=\underset{\text{I}}{\lambda}^2=1+\frac{1}{2}S^2+S\sqrt{1+\frac{1}{4}S^2}$$

$$\underset{\text{II}}{C}=\underset{\text{II}}{\lambda}^2=1+\frac{1}{2}S^2-S\sqrt{1+\frac{1}{4}S^2}$$

$$\underset{\text{III}}{C}=\underset{\text{III}}{\lambda}^2=1$$

代入(2.6.3)式，得

$$\left\|\begin{matrix}1-C & S & 0\\ S & 1+S^2-C & 0\\ 0 & 0 & 1-C\end{matrix}\right\|\begin{bmatrix}N^1\\N^2\\N^3\end{bmatrix}=0$$

用 $\underset{\text{III}}{C}=1$ 代入 C，得

$$\underset{\text{III}}{N}^1=\underset{\text{III}}{N}^2=0,\quad \underset{\text{III}}{N}^3=1,\quad 故\quad \underset{\text{III}}{\mathbf{N}}=\mathbf{I}_3$$

用 $\underset{\text{I}}{C}$ 值代入 C，得

$$\underset{\text{I}}{N}^2/\underset{\text{I}}{N}^1=\frac{1}{2}S+\sqrt{1+\frac{1}{4}S^2},\quad \underset{\text{I}}{N}^3=0$$

故

$$\underset{\text{I}}{\mathbf{N}}=\left\{1+\left(\frac{1}{2}S+\sqrt{1+\frac{1}{4}S^2}\right)^2\right\}^{-1/2}\cdot\left[\mathbf{I}_1+\left(\frac{1}{2}S+\sqrt{1+\frac{1}{4}S^2}\right)\mathbf{I}_2\right]$$

$$=\left\{2+\frac{1}{2}S^2+S\sqrt{1+\frac{1}{4}S^2}\right\}^{-1/2}\cdot$$

① 三个主值各用下标 I, II, III 表示。

$$\cdot\left[\mathbf{i}_1+\left(\frac{1}{2}S+\sqrt{1+\frac{1}{4}S^2}\right)\mathbf{i}_2\right]$$

同理可得

$$\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}=\left\{2+\frac{1}{2}S^2-S\sqrt{1+\frac{1}{4}S^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left[-\mathbf{i}_1+\left(-\frac{1}{2}S+\sqrt{1+\frac{1}{4}S^2}\right)\mathbf{i}_2\right]$$

现在来求张量 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}$ 或 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{-1}$ 的主值与主方向。$\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{-1}$ 的主值 $\overset{-1}{\underset{1}{c}}$，$\overset{-1}{\underset{2}{c}}$，$\overset{-1}{\underset{3}{c}}$ 同 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 的主值 $\underset{\mathrm{I}}{C}$，$\underset{\mathrm{II}}{C}$，$\underset{\mathrm{III}}{C}$。以 $\mathbf{n}$ 表示主方向，则

$$(\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{-1}-\overset{-1}{c}\overset{\gg}{\mathbf{1}})\cdot\mathbf{n}=0,\quad 即\quad (\overset{-1}{c}{}^{i}{}_{\cdot j}-\overset{-1}{c}\delta^i_j)n^j=0$$

在本例中成为

$$\begin{Vmatrix}1+S^2-\overset{-1}{c} & S & 0\\ S & 1-\overset{-1}{c} & 0\\ 0 & 0 & 1-\overset{-1}{c}\end{Vmatrix}\begin{bmatrix}n^1\\ n^2\\ n^3\end{bmatrix}=0$$

主值 $\overset{-1}{\underset{1}{c}}$，$\overset{-1}{\underset{2}{c}}$，$\overset{-1}{\underset{3}{c}}$ 同 $\underset{\mathrm{I}}{C}$，$\underset{\mathrm{II}}{C}$，$\underset{\mathrm{III}}{C}$。将它们依次代入上式之 $\overset{-1}{c}$，可求得三个主方向为

$$\underset{1}{\mathbf{n}}=\left\{2+\frac{1}{2}S^2-S\sqrt{1+\frac{1}{4}S^2}\right\}^{-1/2}$$

$$\cdot\left[\mathbf{i}_1+\left(-\frac{1}{2}S+\sqrt{1+\frac{1}{4}S^2}\right)\mathbf{i}_2\right]$$

$$\underset{2}{\mathbf{n}}=\left\{2+\frac{1}{2}S^2+S\sqrt{1+\frac{1}{4}S^2}\right\}^{-1/2}$$

$$\cdot\left[-\mathbf{i}_1+\left(\frac{1}{2}S+\sqrt{1+\frac{1}{4}S^2}\right)\mathbf{i}_2\right]$$

$$\underset{3}{\mathbf{n}} = \mathbf{i}_3$$

图 2.4 中设 $\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}$ 与 Z^1 轴的夹角为 θ，由 $\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}$ 之表达式，可知

$$\tan\theta = \underset{\mathrm{I}}{N^2}/\underset{\mathrm{I}}{N^1} = \frac{1}{2}S + \sqrt{1+\frac{1}{4}S^2}$$

故

$$\tan 2\theta = -\frac{2}{S}$$

现在来求表示物体旋转的正交张量 $\overset{\asymp}{\mathbf{R}}$。由(2.8.21)式，

$$\overset{\asymp}{\mathbf{R}} = \underset{1}{\mathbf{n}}\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}} + \underset{2}{\mathbf{n}}\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}} + \underset{3}{\mathbf{n}}\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}} = R^k_{\cdot K}\mathbf{g}_k\mathbf{G}^K$$

因此

$$R^k_{\cdot K} = \underset{1}{n^k}\underset{\mathrm{I}}{N_K} + \underset{2}{n^k}\underset{\mathrm{II}}{N_K} + \underset{3}{n^k}\underset{\mathrm{III}}{N_K}$$

则计算可得

$$R^k_{\cdot K} = \underset{1}{n^k}\underset{\mathrm{I}}{N_K} + \underset{2}{n^k}\underset{\mathrm{II}}{N_K} + \underset{3}{n^k}\underset{\mathrm{III}}{N_K}$$

$$\|\overset{\asymp}{\mathbf{R}}\| = \|R^k_{\cdot K}\| = \begin{Vmatrix} \underset{1}{n^1} & \underset{2}{n^1} & \underset{3}{n^1} \\ \underset{1}{n^2} & \underset{2}{n^2} & \underset{3}{n^2} \\ \underset{1}{n^3} & \underset{2}{n^3} & \underset{3}{n^3} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \underset{\mathrm{I}}{N_1} & \underset{\mathrm{I}}{N_2} & \underset{\mathrm{I}}{N_3} \\ \underset{\mathrm{II}}{N_1} & \underset{\mathrm{II}}{N_2} & \underset{\mathrm{II}}{N_3} \\ \underset{\mathrm{III}}{N_1} & \underset{\mathrm{III}}{N_2} & \underset{\mathrm{III}}{N_3} \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} \left(1+\frac{1}{4}S^2\right)^{-1/2} & \frac{1}{2}S\left(1+\frac{1}{4}S^2\right)^{-1/2} & 0 \\ -\frac{1}{2}S\left(1+\frac{1}{4}S^2\right)^{-1/2} & \left(1+\frac{1}{4}S^2\right)^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

在小变形情况下，$S \ll 1$，则有

$$\underset{\mathrm{I}}{\lambda} \approx 1 + \frac{1}{2}S, \quad \underset{\mathrm{II}}{\lambda} \approx 1 - \frac{1}{2}S$$

$$\tan\theta \approx 1, \quad \theta \approx \frac{\pi}{4}$$

习题 2.11 设取 $\underset{\mathrm{II'}}{\mathbf{N}}$ 平分两主方向 $\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}$, $\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}$, 且其垂直方向为 $\underset{\mathrm{I'}}{\mathbf{N}}$:

$$\underset{\mathrm{I'}}{\mathbf{N}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}} - \underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}), \quad \underset{\mathrm{II'}}{\mathbf{N}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}} + \underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}})$$

在变形前，$\underset{\mathrm{I'}}{\mathbf{N}}$ 与 $\underset{\mathrm{II'}}{\mathbf{N}}$ 夹成 $\pi/2$ 角，设在变形后夹成 $\pi/2-\gamma'$ 角。证明

$$\sin\gamma' = \frac{\underset{\mathrm{I}}{\lambda}^2 - \underset{\mathrm{II}}{\lambda}^2}{\underset{\mathrm{I}}{\lambda}^2 + \underset{\mathrm{II}}{\lambda}^2}, \quad \tan\gamma' = \frac{\underset{\mathrm{I}}{\lambda}^2 - \underset{\mathrm{II}}{\lambda}^2}{2\underset{\mathrm{I}}{\lambda}\underset{\mathrm{II}}{\lambda}}$$

在图 2.4 的单剪变形情况下，

$$\tan\gamma' = S\sqrt{1+\frac{1}{4}S^2}$$

例 4 圆柱体扭转

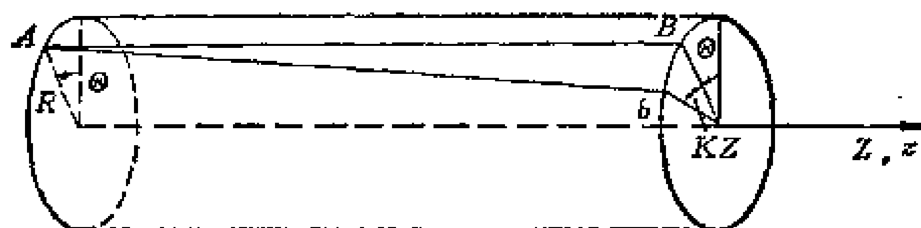


图 2.5

取 Lagrange 坐标系 X^A 与 Euler 坐标系 x^i 为重合的圆柱坐标系(图 2.5):

$$X^1 = R, \quad X^2 = \Theta, \quad X^3 = Z$$

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = z$$

在扭转情况下，坐标变换的关系为:

$$r = R, \quad \theta = \Theta + KZ, \quad z = Z$$

即

$$x^1 = X^1, \quad x^2 = X^2 + KX^3, \quad x^3 = X^3$$

其逆为

$$X^1 = x^1, \quad X^2 = x^2 - Kx^3, \quad X^3 = x^3$$

易求得

$$\|G_{AB}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \|G^{AB}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \|g^{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\|x^i_{,A}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & K \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \|X^A_{,i}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -K \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

由(2.5.3)及(2.5.6)式，写成矩阵形式(以 * 号表示转置)

$$\|C_{AB}\| = \|x^i_{,A}\|^* \|g_{ij}\| \|x^j_{,B}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & KR^2 \\ 0 & KR^2 & 1 + K^2R^2 \end{Vmatrix}$$

$$\|\overset{-1}{c}{}^{ij}\| = \|x^i_{,A}\| \|G^{AB}\| \|x^j_{,B}\|^* = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} + K^2 & K \\ 0 & K & 1 \end{Vmatrix}$$

现在来求变形张量的物理分量。

$$\overset{\circ}{\mathbf{C}} = C_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B = C^A_{\cdot B}\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B = \sum_A \sum_B C^{\langle A\rangle}_{\cdot\langle B\rangle} \frac{\mathbf{G}_A}{\sqrt{G_{AA}}} \sqrt{G_{BB}}\,\mathbf{G}^B$$

故物理分量为

$$C^{\langle A\rangle}_{\cdot\langle B\rangle} = C^A_{\cdot B}\sqrt{\frac{G_{AA}}{G_{BB}}} \qquad (\text{不对指标 } A, B \text{ 求和})$$

因为

$$\|C^A_{\cdot B}\| = \|G^{AM}\|\|C_{MB}\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & K \\ 0 & KR^2 & 1+K^2R^2 \end{matrix}\right\|$$

故

$$\|C^{(A)}_{\cdot(B)}\| = \left\| C^A_{\cdot B}\sqrt{\frac{G_{AA}}{G_{BB}}}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & KR \\ 0 & KR & 1+K^2R^2 \end{matrix}\right\|$$

这相当于在例 3 的单剪中取 $Z^1/\!/\Theta$, $Z^2/\!/Z$, $Z^3/\!/R$, 及 $S=KR$。

同样,由

$$\overset{-1}{c}{}^{(i)}_{\cdot(j)} = \overset{-1}{c}{}^{i}_{\cdot j}\sqrt{\frac{g_{ii}}{g_{jj}}} \qquad (\text{不对 } i, j \text{ 求和})$$

及

$$\|\overset{-1}{c}{}^{i}_{\cdot j}\| = \|\overset{-1}{c}{}^{ik}\|\|g_{kj}\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+r^2K^2 & K \\ 0 & Kr^2 & 1 \end{matrix}\right\|$$

可得

$$\|\overset{-1}{c}{}^{(i)}_{\cdot(j)}\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+r^2K^2 & Kr \\ 0 & Kr & 1 \end{matrix}\right\|$$

这相当于在例 3 的单剪中取 $z^1/\!/\theta$, $z^2/\!/z$, $z^3/\!/r$ 及 $S=Kr$。

例 5 立方体的纯弯曲

取 Lagrange 坐标为笛卡儿坐标 $\{X^A\}=\{X, Y, Z\}$, Euler 坐标为柱坐标 $\{x^i\}=\{r, \theta, z\}$, 并设 z 与 Z 轴平行, $\theta=0$ 射线与 X 轴重合,如图 2.6。坐标变换关系设为

$$r=r(X), \quad \theta=\theta(Y), \quad z=z(Z)$$

其逆为

$$X=X(r), \quad Y=Y(\theta), \quad Z=Z(z)$$

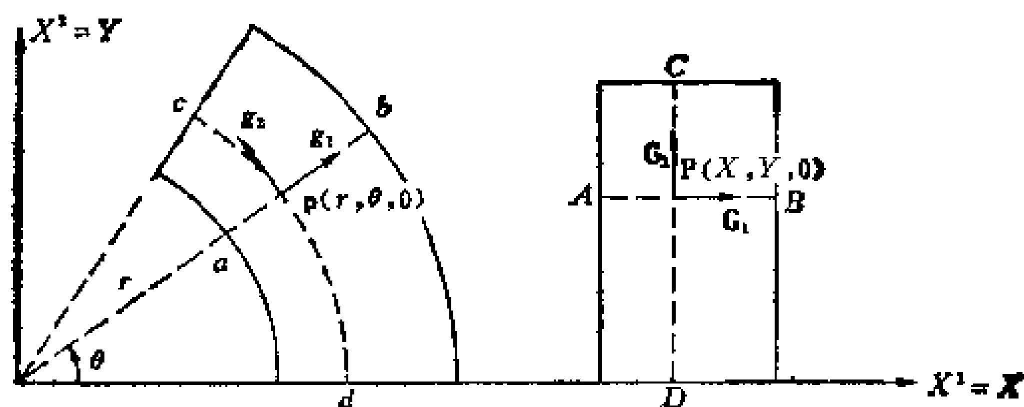


图 2.6

计算结果如下：

$$\|G_{AB}\| = \|G^{AB}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \|g^{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\|x^i_{,A}\| = \begin{Vmatrix} r' & 0 & 0 \\ 0 & \theta' & 0 \\ 0 & 0 & z' \end{Vmatrix}, \quad \|X^A_{,i}\| = \begin{Vmatrix} X' & 0 & 0 \\ 0 & Y' & 0 \\ 0 & 0 & Z' \end{Vmatrix}$$

式中一撇“′”表示对各自的自变量求导。

由(2.5.3)与(2.5.6)式，得

$$\|C^A_{\cdot B}\| = \|C_{AB}\| = \|x^i_{,A}\|^* \|g_{ij}\| \|x^j_{,B}\| = \begin{Vmatrix} r'^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\theta'^2 & 0 \\ 0 & 0 & z'^2 \end{Vmatrix}$$

$$\|\overset{-1}{c}{}^{ij}\| = \|x^i_{,A}\| \|G^{AB}\| \|x^j_{,B}\|^* = \begin{Vmatrix} r'^2 & 0 & 0 \\ 0 & \theta'^2 & 0 \\ 0 & 0 & z'^2 \end{Vmatrix}$$

$$\|\overset{-1}{c}{}^{i}_{\cdot j}\| = \|\overset{-1}{c}{}^{ik}\|\|g_{kj}\| = \begin{Vmatrix} r'^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\theta'^2 & 0 \\ 0 & 0 & z'^2 \end{Vmatrix}$$

变形张量的主不变量：

$$\mathscr{I}_1(\mathbf{C}) = \mathscr{I}_1(\overset{-1}{\mathbf{c}}) = r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2$$

$$\mathscr{I}_2(\mathbf{C}) = \mathscr{I}_2(\overset{-1}{\mathbf{c}}) = (rr'\theta')^2 + (r\theta'z')^2 + (z'r')^2$$

$$\mathscr{I}_3(\mathbf{C}) = \mathscr{I}_3(\overset{-1}{\mathbf{c}}) = (rr'\theta'z')^2$$

主长度比：

$$\underset{1}{\lambda} = r' \quad \underset{2}{\lambda} = r\theta' \quad \underset{3}{\lambda} = z'$$

变形张量的主方向，均为沿坐标轴方向：

$$\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}} = \mathbf{G}_1 \quad \underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}} = \mathbf{G}_2 \quad \underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}} = \mathbf{G}_3$$

$$\underset{1}{\mathbf{n}} = \mathbf{g}_1 \quad \underset{2}{\mathbf{n}} = \frac{1}{r}\mathbf{g}_2 \quad \underset{3}{\mathbf{n}} = \mathbf{g}_3$$

因此（以 K 为 g_l^K 的行指标，l 为列指标）

$$\|g_l^K\| = \begin{Vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

由(2.8.21)式，可求出

$$\|R^{k}_{\cdot K}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\|R^{k}_{\cdot l}\| = \|R^{k}_{\cdot K}\|\|g_l^K\| = \begin{Vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \dfrac{1}{r}\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

物理分量的矩阵为

$$\|R^{(k)}_{\cdot(l)}\| = \left\| R^{k}_{\cdot l}\sqrt{\frac{g_{kk}}{g_{ll}}} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

（不对指标 k, l 求和）

$$\|R^{(L)}_{\cdot(K)}\| = \|R^{L}_{\cdot K}\| = \|g^{L}_{k}\|\|R^{k}_{\cdot K}\| = \left\| \begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

习题 2.12 设立方体弯曲成为一球体：

$$r = r(X), \quad \theta = \theta(Y), \quad \varphi = \varphi(Z)$$

式中 r, θ, φ 为球坐标(图 2.7)，试计算 $\overset{(i)}{\mathbf{C}}$, $\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{R}$。

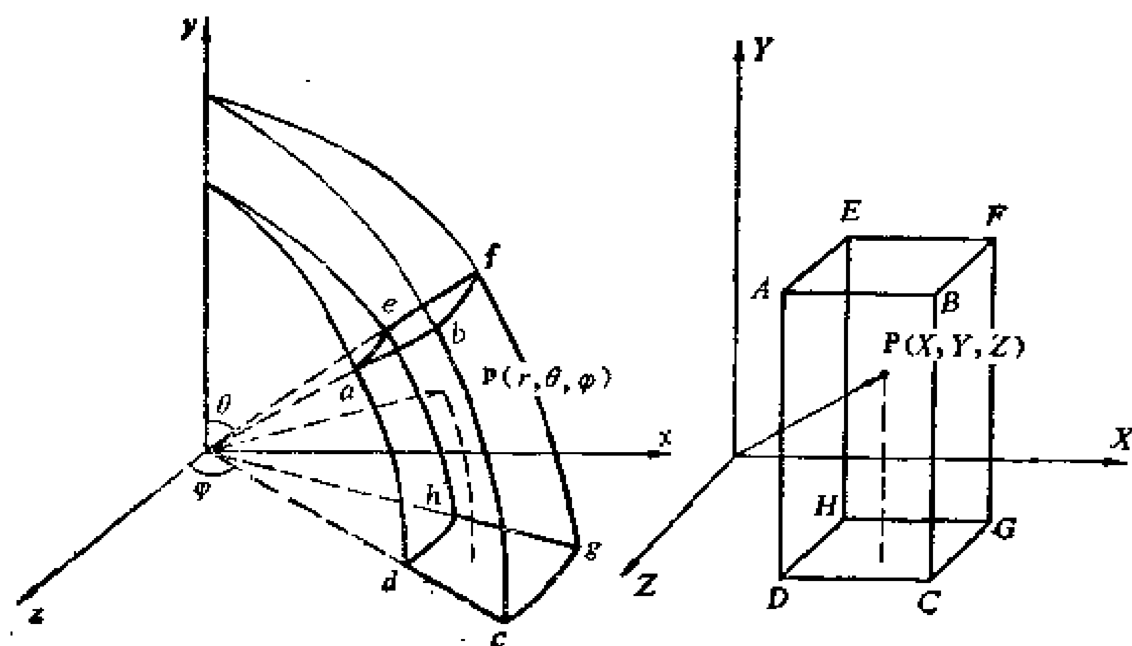


图 2.7

§2.12 相对变形

在本章的以上各节中，我们只研究了物体的一个初始构形 $\mathscr{R}$（在时刻 t_0）与一个终构形 κ（在时刻 t），即 t 取某一定值。实际上，物体的构形是随着时间而变化的，我们可以 τ 表示变化的时间参

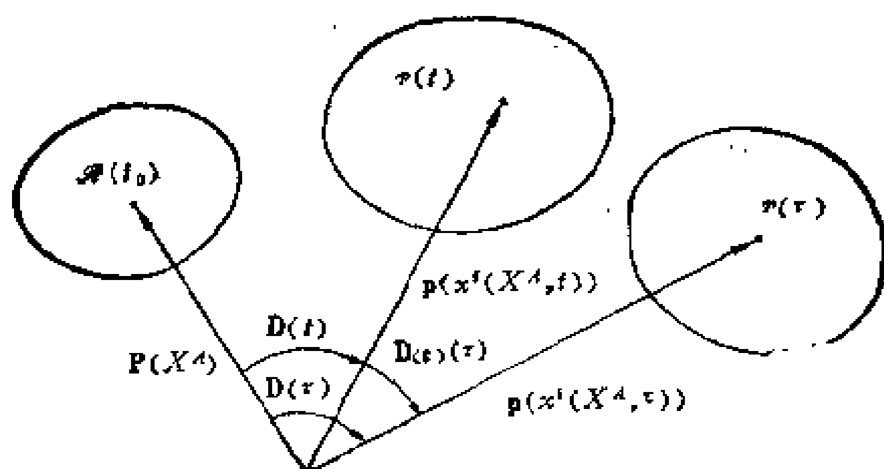


图 2.8

数，对应的构形记作 $\mathscr{r}(\tau)$。图 2.8 示物体在时刻 t_0，t 与 τ 的三个构形 $\mathscr{R}(t_0)$，$\mathscr{r}(t)$，$\mathscr{r}(\tau)$，则矢径 $\mathbf{p}$ 与质点 $\mathbf{P}$（即初始构形 $\mathscr{R}$ 中的矢径）、时间 τ 的关系（相当于(2.1.1)与(2.1.2)式）为

$$\mathbf{p}=\mathbf{p}(\mathbf{P},\tau) \quad 或 \quad x^i=x^i(X^A,\tau) \tag{2.12.1}$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{p},\tau) \quad 或 \quad X^A=X^A(x^i,\tau) \tag{2.12.2}$$

函数(2.12.1)可称为变形函数。

在(2.12.1)式中令 $\tau=t$（t 指某一特定时刻），并以 $\bar{\mathbf{P}}$ 表示 t 时刻的矢径，$\bar{x}^i$ 表示 t 时刻质点的 Euler 坐标，则有

$$\bar{\mathbf{p}}=\mathbf{p}(\mathbf{P},t), \quad 或 \quad \bar{x}^i=x^i(X^A,t) \tag{2.12.3}$$

我们选初始时刻 t_0 的构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 作参考构形，并以 $\mathbf{D}_{(t_0)}(t)$ 表示从参考构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 变换到 t 时刻的构形 $\mathscr{r}(t)$ 的变形梯度，即按(2.3.14)式，

$$\mathbf{D}_{(t_0)}(t)=\bar{\mathbf{p}}\overset{\langle}{\nabla}=\bar{x}^i_{,A}\bar{\mathbf{g}}_i\mathbf{G}^A$$

$\mathbf{D}_{(t_0)}(t)$ 是一个两点张量，前矢量在构形 $\mathscr{r}(t)$ 中（以在上面加一横表示），而后矢量在初始构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中（以在上面加“〈”号表示）。反之，从构形 $\mathscr{r}(t)$ 变换到初始构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 的变形梯度记作 $\mathbf{D}_{(t)}(t_0)$，显然它是 $\mathbf{D}_{(t_0)}(t)$ 之逆，可记作 $\overset{-1}{\mathbf{D}}_{(t_0)}(t)$。它也是一个两点张量，但前矢量在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中，而后矢量在构形 $\mathscr{r}(t)$

中。以后，当以 t_0 时刻的构形为初始构形时，则往往把下标“(t_0)”省去不写，即把 $\mathbf{D}_{(t_0)}(t)$ 简记为 $\mathbf{D}(t)$，把 $\overset{-1}{\mathbf{D}}_{(t_0)}(t)$ 简记为 $\overset{-1}{\mathbf{D}}(t)$。

我们也可以不以 $\mathscr{R}(t_0)$，而以 $\mathscr{r}(t)$ 作为参考构形，同时把 t 时刻的 Euler 坐标 $\bar{x}^i$ 当作随体的 Lagrange 坐标使用。那么变形函数可以求出如下：

由(2.12.3)式解出 $\mathbf{P}$, X^A，或者直接由(2.12.2)式(令 $\tau = t$)，得到

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}, t), \quad X^A = X^A(\bar{x}^i, t) \tag{2.12.4}$$

将(2.12.4)代入(2.12.1)式，得

$$\begin{aligned} &\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}, t), \tau), \quad \text{记作} \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_{(t)}(\bar{\mathbf{p}}, \tau) \\ &x^i = x^i(X^A(\bar{x}^i, t), \tau), \quad \text{记作} \quad x^i = x^i_{(t)}(\bar{x}^i, \tau) \end{aligned} \tag{2.12.5}$$

式中下标“(t)”表示以 t 时刻的构形 $\mathscr{r}(t)$ 作为参考构形。因此，这里的“初始”构形中的矢径为 $\bar{\mathbf{p}}$，Lagrange 坐标为 $\bar{x}^i$，而“终”构形中的矢径为 $\mathbf{p}$，Euler 坐标为 x^i。在以前的几节中，我们用大写字母表示初始构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的量，以区别于用小写字母表示的终构形 $\mathscr{r}(\tau)$ 中的量。这里我们只好在“初始”构形 $\mathscr{r}(t)$ 中的量上面加一横以示区别了。

本来，在 t 时刻构形 $\mathscr{r}(t)$ 与 τ 时刻构形 $\mathscr{r}(\tau)$ 中可以用不同的曲线坐标系，但是为了简单起见，仍用相同的 Euler 坐标系。但要注意，同一质点在不同的时刻 t 与时刻 τ 的位置的坐标 $\bar{x}^i$ 与 x^i 是不同的。

上文中既然已经把从 t_0 时刻构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 变换到 t 时刻构形 $\mathscr{r}(t)$ 的变形梯度记作 $\mathbf{D}(t)$，那么类似地，从 t_0 时刻构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 变换到 τ 时刻构形 $\mathscr{r}(\tau)$ 的变形梯度可记作 $\mathbf{D}(\tau)$。$\mathbf{D}(t)$ 表示以矢径 $\mathbf{P}$ 为自变量时，矢径 $\bar{\mathbf{p}}$ 的梯度（即 $\bar{\mathbf{p}}$ 对 $\mathbf{P}$ 的导数），而 $\mathbf{D}(\tau)$ 则表示以矢径 $\mathbf{P}$ 为自变量时，矢径 $\mathbf{p}$ 的梯度（即 $\mathbf{p}$ 对 $\mathbf{P}$ 的导数）。于是，从 t 时刻构形 $\mathscr{r}(t)$ 变换到 τ 时刻构形 $\mathscr{r}(\tau)$ 的变

形梯度可记作 $\mathbf{D}_{(t)}(\tau)$，它表示以矢径 $\bar{\mathbf{p}}$ 为自变量时，矢径 $\mathbf{p}$ 的梯度(即 $\mathbf{p}$ 对 $\bar{\mathbf{p}}$ 的导数)。 $\mathbf{D}_{(t)}(\tau)$ 称为相对变形梯度，它也是一个两点张量，其前矢量在构形 $\mathscr{R}(\tau)$ 中，而后矢量在构形 $\mathscr{R}(t)$ 中。

现在我们来研究变形梯度 $\mathbf{D}(t)$，$\mathbf{D}(\tau)$，$\mathbf{D}_{(t)}(\tau)$ 三者间的关系。由(2.3.11)式，可写

$$
\begin{aligned}
d\bar{\mathbf{p}} &= \mathbf{D}(t)\cdot d\mathbf{P} \\
d\mathbf{p} &= \mathbf{D}(\tau)\cdot d\mathbf{P} \\
d\mathbf{p} &= \mathbf{D}_{(t)}(\tau)\cdot d\bar{\mathbf{p}}
\end{aligned}
\tag{2.12.6}
$$

将上式的前两式代入第三式，得

$$\mathbf{D}(\tau)\cdot d\mathbf{P} = \mathbf{D}_{(t)}(\tau)\cdot \mathbf{D}(t)\cdot d\mathbf{P}$$

因 $d\mathbf{P}$ 为任意，故

$$\mathbf{D}(\tau) = \mathbf{D}_{(t)}(\tau)\cdot \mathbf{D}(t) \tag{2.12.7}$$

把变形梯度看作矢量对矢量(矢径)的导数，则(2.12.7)式类似于微积分学中的复合函数求导法则(链法则)，在图 2.8 中用箭头表示变形梯度的“始”与“终”。 但要注意(2.12.7)式右端，写在后面的 $\mathbf{D}(t)$ 发生在先，而写在前面的 $\mathbf{D}_{(t)}(\tau)$ 发生在后。

我们用$(\overset{-1}{\ })$表示某量(　)之逆，则由(2.12.6)式，可得

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{P} &= \overset{-1}{\mathbf{D}}(t)\cdot d\bar{\mathbf{p}} \\
d\mathbf{P} &= \overset{-1}{\mathbf{D}}(\tau)\cdot d\mathbf{p} \\
d\bar{\mathbf{p}} &= \overset{-1}{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau)\cdot d\mathbf{p}
\end{aligned}
\tag{2.12.8}
$$

将(2.12.6)第一式代入(2.12.8)第一式，或反之，将(2.12.8)第一式代入(2.12.6)第一式，得到

$$\overset{-1}{\mathbf{D}}(t)\cdot \mathbf{D}(t) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{D}(t)\cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}(t) = \mathbf{I} \tag{2.12.9a}$$

上式中第一式的 $\mathbf{I}$ 表示在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的度量张量，而第二式的 $\mathbf{I}$ 则表示在构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的度量张量。 以后我们对各构形中的度量张量 $\mathbf{I}$ 不加区分，因为它们可以相互通过平移而得，类似于

(2.12.9a) 式，可以得到

$$\overset{-1}{\mathbf{D}}(\tau)\cdot\mathbf{D}(\tau)=\mathbf{I},\quad \mathbf{D}(\tau)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}(\tau)=\mathbf{I} \tag{2.12.9b}$$

$$\overset{-1}{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau)\cdot\mathbf{D}_{(t)}(\tau)=\mathbf{I},\quad \mathbf{D}_{(t)}(\tau)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau)=\mathbf{I} \tag{2.12.9c}$$

在(2.12.6)第三式中，相对变形梯度 $\mathbf{D}_{(t)}(\tau)$ 的逆为

$$\mathbf{D}_{(\tau)}(t)=\overset{-1}{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau)$$

故

$$d\bar{\mathbf{p}}=\mathbf{D}_{(\tau)}(t)\cdot d\mathbf{p}=\overset{-1}{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau)\cdot d\mathbf{p} \tag{2.12.10}$$

我们以 $\mathbf{C}_{(t)}(\tau)$，$\overset{-1}{\mathbf{c}}_{(t)}(\tau)$ 与 $\mathbf{R}_{(t)}(\tau)$ 表示从 t 时刻构形 $\kappa(t)$ 变换到 τ 时刻构形 $\kappa(\tau)$ 的右 Cauchy-Green 相对变形张量，左 Cauchy-Green 相对变形张量与表示转动的正交张量，则当 $\tau=t$ 时，显然有

$$\mathbf{C}_{(t)}(t)=\overset{-1}{\mathbf{c}}_{(t)}(t)=\mathbf{R}_{(t)}(t)=\mathbf{I} \tag{2.12.11}$$

现在我们来研究有关相对变形张量的一些关系式。由(2.5.1)式，有

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(t)&=\mathbf{D}(t)^*\cdot\mathbf{D}(t)\\ \mathbf{C}(\tau)&=\mathbf{D}(\tau)^*\cdot\mathbf{D}(\tau)\\ \mathbf{C}_{(t)}(\tau)&=\mathbf{D}_{(t)}(\tau)^*\cdot\mathbf{D}_{(t)}(\tau)\end{aligned} \tag{2.12.12}$$

而由(2.5.2)式，则有

$$\begin{aligned}\overset{-1}{\mathbf{c}}(t)&=\mathbf{D}(t)\cdot\mathbf{D}(t)^*\\ \overset{-1}{\mathbf{c}}(\tau)&=\mathbf{D}(\tau)\cdot\mathbf{D}(\tau)^*\\ \overset{-1}{\mathbf{c}}_{(t)}(\tau)&=\mathbf{D}_{(t)}(\tau)\cdot\mathbf{D}_{(t)}(\tau)^*\end{aligned} \tag{2.12.13}$$

(2.12.12)与(2.12.13)式之逆各为

$$\begin{aligned}\overset{-1}{\mathbf{C}}(t)&=\overset{-1}{\mathbf{D}}(t)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}(t)^*\\ \overset{-1}{\mathbf{C}}(\tau)&=\overset{-1}{\mathbf{D}}(\tau)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}(\tau)^*\end{aligned} \tag{2.12.14}$$

$$\overset{-1}{\mathbf{C}}_{(t)}(\tau) = \overset{-1}{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau) \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau)^*$$

与

$$\begin{aligned} \overset{-1}{\mathbf{c}}(t) &= \overset{-1}{\mathbf{D}}(t)^* \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}(t) \\ \overset{-1}{\mathbf{c}}(\tau) &= \overset{-1}{\mathbf{D}}(\tau)^* \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}(\tau) \\ \overset{-1}{\mathbf{c}}_{(t)}(\tau) &= \overset{-1}{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau)^* \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau) \end{aligned} \tag{2.12.15}$$

将(2.12.7)代入(2.12.12)的第二式，得

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\tau) &= \mathbf{D}(\tau)^* \cdot \mathbf{D}(\tau) \\ &= (\mathbf{D}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{D}(t))^* \cdot (\mathbf{D}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{D}(t)) \\ &= \mathbf{D}(t)^* \cdot \mathbf{D}_{(t)}(\tau)^* \cdot \mathbf{D}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{D}(t) \end{aligned}$$

因此，利用(2.12.12)第三式，上式可写作

$$\mathbf{C}(\tau) = \mathbf{D}(t)^* \cdot \mathbf{C}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{D}(t) \tag{2.12.16}$$

式中左端 $\mathbf{C}(\tau)$ 为构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的张量，右端 $\mathbf{C}_{(t)}(\tau)$ 为构形 $\varkappa(t)$ 中的张量，但前后各点积 $\mathbf{D}(t)^*$ 与 $\mathbf{D}(t)$ 后也成为构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的张量。(2.12.16)式也可另法证明如下：将(2.2.18)式用于从构形 $\varkappa(t)$ 到 $\varkappa(\tau)$ 的变换，得到

$$(ds)^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{p} = d\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{C}_{(t)}(\tau) \cdot d\bar{\mathbf{p}}$$

将(2.12.6)第一式的 $d\bar{\mathbf{p}}$ 代入，得

$$(ds)^2 = d\mathbf{P} \cdot \mathbf{D}(t)^* \cdot \mathbf{C}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{D}(t) \cdot d\mathbf{P}$$

但(2.2.18)式直接用于从构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 到 $\varkappa(\tau)$ 的变换，将给出

$$(ds)^2 = d\mathbf{P} \cdot \mathbf{C}(\tau) \cdot d\mathbf{P}$$

将以上两式加以比较，即得(2.12.16)式。(2.12.16)式表示 $\mathbf{C}(\tau)$ 与 $\mathbf{C}_{(t)}(\tau)$ 的关系，其逆为

$$\overset{-1}{\mathbf{C}}(\tau) = \overset{-1}{\mathbf{D}}(t) \cdot \overset{-1}{\mathbf{C}}_{(t)}(\tau) \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}(t)^* \tag{2.12.17}$$

类似于(2.12.16)式的推导，可得 $\overset{-1}{\mathbf{c}}(\tau)$ 的表示式。将(2.12.7)式代入(2.12.13)的第二式，得

$$\overset{-1}{\mathbf{c}}(\tau) = \mathbf{D}(\tau) \cdot \mathbf{D}(\tau)^* = \mathbf{D}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{D}(t) \cdot (\mathbf{D}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{D}(t))^*$$
$$= \mathbf{D}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{D}(t)^* \cdot \mathbf{D}_{(t)}(\tau)^*$$

利用(2.5.2)式，上式可写作

$$\overset{-1}{\mathbf{c}}(\tau) = \mathbf{D}_{(t)}(\tau) \cdot \overset{-1}{\mathbf{c}}(t) \cdot \mathbf{D}_{(t)}(\tau)^* \qquad (2.12.18)$$

其逆为

$$\mathbf{c}(\tau) = \overset{-1}{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau)^* \cdot \mathbf{c}(t) \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau) \qquad (2.12.19)$$

(2.12.19) 式也可用以下的方法证明：将 (2.2.30) 式用于从构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 到 $\kappa(t)$ 的变换，得到

$$(dS)^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = d\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{c}(t) \cdot d\bar{\mathbf{p}}$$

将(2.12.10)式的 $d\bar{\mathbf{p}}$ 代入，得

$$(dS)^2 = d\mathbf{p} \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau)^* \cdot \mathbf{c}(t) \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau) \cdot d\mathbf{p}$$

将此式与

$$(dS)^2 = d\mathbf{p} \cdot \mathbf{c}(\tau) \cdot d\mathbf{p}$$

作比较，即得(2.12.19)式。

可以对相对变形 $\mathbf{D}_{(t)}(\tau)$ 进行极分解

$$\mathbf{D}_{(t)}(\tau) = \mathbf{R}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{U}_{(t)}(\tau) = \mathbf{V}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{R}_{(t)}(\tau) \qquad (2.12.20)$$

式中 $\mathbf{U}_{(t)}(\tau)$ 与 $\mathbf{V}_{(t)}(\tau)$ 为从 t 时刻构形 $\kappa(t)$ 变换到 τ 时刻构形 $\kappa(\tau)$ 的右伸长张量与左伸长张量：

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{U}_{(t)}(\tau) &= \overset{1/2}{\mathbf{C}}_{(t)}(\tau) \\ \mathbf{V}_{(t)}(\tau) &= \overset{-1/2}{\mathbf{c}}_{(t)}(\tau) \end{aligned}\right\} \qquad (2.12.21)$$

取(2.12.11)式之方根，得到当 $\tau = t$ 时

$$\mathbf{U}_{(t)}(t) = \mathbf{V}_{(t)}(t) = \mathbf{I} \qquad (2.12.22)$$

第三章 运 动 学

§ 3.1 场的描述方法，对时间 t 的两种导数——物质导数与空间导数

在图 2.1 中我们讨论物体的 $\mathscr{R}(t_0)$ 与 $r(t)$ 两种构形，在本章中将把 t 当作变化的时间参数。Lagrange 坐标 X^A 是构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的固定坐标，换言之，在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中质点的矢径 $\mathbf{P}$ 只依赖于坐标 X^A；作为坐标 X^A 的函数 $\mathbf{P}(X^A)$ 与时间 t 无关，因而基矢量 $\mathbf{G}_A(X^B)=\partial\mathbf{P}/\partial X^A$ 也与时间 t 无关，即不随 t 变化。线元 $d\mathbf{P}$ 可表示为(2.2.2)式，即

$$d\mathbf{P}=dX^A\mathbf{G}_A(X^B)$$

我们假定 Euler 坐标 x^i 是构形 $r(t)$ 中的固定坐标，换言之，空间点的矢径 $\mathbf{p}$ 只依赖于坐标 $x^i(i=1,2,3)$，而不显含时间参数 t；$\mathbf{p}$ 作为坐标 x^i 的函数 $\mathbf{p}(x^i)$ 是与时间 t 无关的，因而基矢量 $\mathbf{g}_i(x^j)=\partial\mathbf{p}/\partial x^i$ 也只依赖于坐标 $x^j(j=1,2,3)$，而不显含时间参数 t。线元 $d\mathbf{p}$ 可表示为(2.2.5)式，即

$$d\mathbf{p}=dx^i\mathbf{g}_i(x^j)$$

物体的运动或变形由(2.1.1)或(2.1.2)式来描写，即

$$\mathbf{p}=\mathbf{p}(\mathbf{P},t),\quad x^i=x^i(X^A,t) \tag{3.1.1a}$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{p},t),\quad X^A=X^A(x^i,t) \tag{3.1.1b}$$

如果在构形 $r(t)$ 中采用 Lagrange 随体坐标 X^A，那么这个坐标系是随时间 t 而变化的，记作 $\{X^A,t\}$。由 (3.1.1a) 式，对应于一定的质点 $\mathbf{P}$ 因而一定的 X^A，$\mathbf{p}$ 因而 x^i 是随时间 t 变

化的，在 $\mathscr{R}(t)$ 中坐标曲线(即 X^A 线，$A=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}$) 也是随着时间 t 而变化的。

同样，若在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中采用 x^i 坐标，那么这个坐标系也是随时间 t 而变化的，记作 $\{x^i, t_0\}$。由 (3.1.1b) 式，对应于一定的$\mathbf{p}$ 因而一定的 x^i，$\mathbf{P}$ 因而 X^A 是随时间 t 而变化的，在 $\mathscr{R}(t_0)$ 中坐标曲线(即 x^i 线，$i=1, 2, 3$) 也是随时间 t 而变化的。

由于可以采用上述两种不同的坐标，对场的描述也有两种不同的方法。

一、场的描述方法

采用 $\mathbf{P}$ 与 t 为自变量，而 $\mathbf{p}$ 为它们的函数，也就是采用 X^A 与 t 为自变量，而 x^i 为它们的函数(见 (3.1.1a) 式)，这种描述方法称为物质描述法。

采用 $\mathbf{p}$ 与 t 为自变量，而 $\mathbf{P}$ 为它们的函数；也就是采用 x^i 与 t 为自变量，而 X^A 为它们的函数(见 (3.1.1b) 式)，这种描述方法称为空间描述法。

既然有两种不同的描述方法，相应地就有两种不同意义的对时间 t 的导数。

在物质描述法中，当 $\mathbf{P}$ 固定(即对应于一定的质点)，任一物理量(标量、矢量或张量)对时间 t 的导数，称为该物理量的物质导数，记作①

$$\left(\frac{\partial\cdots}{\partial t}\right)_{\mathbf{P}}=(\cdots)^{\cdot}=\left(\frac{\partial\cdots}{\partial t}\right)_{X^A}=\frac{d\cdots}{dt} \tag{3.1.2}$$

特例：取 (3.1.1a) 式矢径 $\mathbf{p}$ 的物质导数，则得到质点的位移速度(简称速度)

$$\mathbf{v}=\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}\right)_{\mathbf{P}}=\frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{3.1.3}$$

---

① 在物质描述法中，局部导数(见下文)的表示式见(3.1.28)。

在空间描述法中，当 $\mathbf{p}$ 固定（即对应于一定的空间位置），任一物理量（标量、矢量或张量）对时间的导数，称为该物理量的局部导数，记作①

$$\left(\frac{\partial \cdots}{\partial t}\right)_{\mathbf{p}} = \left(\frac{\partial \cdots}{\partial t}\right)_{x^i}，有时简记为 \frac{\partial \cdots}{\partial t}$$

特例：取(3.1.2)式矢径 $\mathbf{P}$ 的局部导数，则得到在某空间位置 $\mathbf{p}$ 处质点先后换班的速度

$$\mathbf{V} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right)_{\mathbf{p}} \equiv \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \tag{3.1.4}$$

应该注意，物质导数是力学中的本质量，而局部导数则是观测量，即在空间位置处观测到的量。

现在来求(3.1.3)$\mathbf{v}$ 与(3.1.4) $\mathbf{V}$ 的分解式。由(2.2.5) $d\mathbf{p}$ 的分解式和(3.1.3)式，可得

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_{X^A} \mathbf{g}_i = v^i \mathbf{g}_i \tag{3.1.5}$$

式中

$$v^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_{X^A} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_{\mathbf{P}} \equiv \frac{dx^i}{dt} \tag{3.1.6}$$

而由(2.2.2) $d\mathbf{P}$ 的分解式和(3.1.4)式，可得

$$\mathbf{V} = \left(\frac{\partial X^A}{\partial t}\right)_{x^i} \mathbf{G}_A = V^A \mathbf{G}_A \tag{3.1.7}$$

式中

$$V^A = \left(\frac{\partial X^A}{\partial t}\right)_{x^i} = \left(\frac{\partial X^A}{\partial t}\right)_{\mathbf{p}} \equiv \frac{\partial X^A}{\partial t} \tag{3.1.8}$$

例：均匀速度场。取 $x^i(i=1,2,3)$ 与 $X^A(A=1,2,3)$ 为重合的笛卡儿坐标。它们之间的变换关系为

$$x^1 = X^1 + v_0 t,\quad x^2 = X^2,\quad x^3 = X^3$$

① 在空间描述法中，物质导数的表示式见(3.1.27)。

式中 v_0 = 常数。对于笛卡儿坐标:

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{G}_1 = \mathbf{I}_1$$
$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{G}_2 = \mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{G}_3 = \mathbf{I}_3$$

物质速度与换班速度各为

$$\mathbf{v} = v_0\mathbf{I}_1, \quad \mathbf{V} = -v_0\mathbf{I}_1$$

习题 3.1 证明

$$V^A = -v^i \frac{\partial X^A}{\partial x^i}$$

[提示] 利用

$$dX^A = \left(\frac{\partial X^A}{\partial x^i}\right)_t dx^i + \left(\frac{\partial X^A}{\partial t}\right)_{x^i} dt = 0$$

为了便于今后研究矢量或张量的两种导数(物质导数与局部导数),我们必须先来研究基矢量的两种导数。

在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 与构形 $\mathscr{r}(t)$ 中各有两种协变基矢量,见表 3.1

表 3.1 协变基矢量

	构形 $\mathscr{R}(t_0)$	构形 $\mathscr{r}(t)$
Lagrange 坐标 X^A	$\mathbf{G}_A(X^M) = \dfrac{\partial \mathbf{P}(X^M)}{\partial X^A}$	$\mathbf{g}_A(X^M, t) = \dfrac{\partial \mathbf{p}(X^M, t)}{\partial X^A}$
Euler 坐标 x^i	$\mathbf{G}_i(X^M, t) = \dfrac{\partial \mathbf{P}(X^M(x^j, t))}{\partial x^i}$	$\mathbf{g}_i(x^r) = \dfrac{\partial \mathbf{p}(x^r)}{\partial x^i}$

在 §2.2 中曾把 $\mathbf{g}_A$ 平移到构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中,并记作 $\mathbf{C}_A$,及把 $\mathbf{G}_i$ 平移到构形 $\mathscr{r}(t)$ 中,并记作 $\mathbf{c}_i$。以后为了强调基矢量 $\mathbf{g}_A(X^M, t)$ 为随体的,有时把它记作 $\hat{\mathbf{g}}_A$

$$\hat{\mathbf{g}}_A(X^M, t) = \mathbf{g}_A(X^M, t) = \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^A}\right)_t \tag{3.1.9}$$

同时把矢量 $\mathbf{a}$ 沿 $\mathbf{g}_A$(即 $\hat{\mathbf{g}}_A$)分解的分量,记作 $\hat{a}^A$,以免与矢

量沿构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中 $\mathbf{G}_A$ 分解的分量 u^A 相混淆。通常很少使用 $\mathbf{G}_i(X^A, t)$，一般将两点张量 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 按基矢量 $\mathbf{G}_A, \mathbf{G}^B$ 与 $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j$ 分解，例如

$$\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} = \varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j \tag{3.1.10}$$

式中，若采用物质描述法，有

$$\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j} = \varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}(X^M, t)$$

$$\mathbf{G}_A = \mathbf{G}_A(X^M), \quad \mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i(x^r(X^M, t)) \tag{3.1.11a}$$

而若采用空间描述法，则有

$$\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j} = \varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}(x^r, t)$$

$$\mathbf{G}_A = \mathbf{G}_A(X^M(x^r, t)), \quad \mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i(x^r) \tag{3.1.11b}$$

对于构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的一点张量 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$，除了使用 Euler 坐标的基矢量 $\mathbf{g}_i$，$\mathbf{g}^j$ 以外，在采用物质描述法时，有时也使用 Lagrange 坐标的随体协变基矢量 $\hat{\mathbf{g}}_A$，$\hat{\mathbf{g}}^B$，例如

$$\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} = \varphi^i_{\cdot j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j = \hat{\varphi}^A_{\cdot B}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}^B \tag{3.1.12}$$

式中

$$\hat{\varphi}^A_{\cdot B} = \hat{\varphi}^A_{\cdot B}(X^M, t)$$

$$\hat{\mathbf{g}}_A = \hat{\mathbf{g}}_A(X^M, t)$$

为了研究任意矢量场或张量场对时间的导数，我们先来计算基矢量的两种导数——物质导数与局部导数。

二、基矢量的物质导数

根据物质导数的定义，由计算可得：

$$\frac{d\mathbf{G}_A}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{G}^A}{dt} = 0 \tag{a}$$

$$\frac{d\sqrt{G}}{dt} = \frac{dG_{AB}}{dt} = \frac{dG^{AB}}{dt} = 0 \tag{b}$$

$$\frac{d\mathbf{g}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\mathbf{g}_i(x^j(X^A, t))$$

$$= \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt} = v^j\Gamma^k_{ij}\mathbf{g}_k \tag{c}$$

$$\frac{d\mathbf{g}^i}{dt} = \frac{d}{dt}\mathbf{g}^i(x^j(X^A, t))$$

$$= \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt} = -v^j\Gamma^i_{jl}\mathbf{g}^l \tag{d}$$

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} = v^k(\Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}) \tag{e}$$

或

$$= \frac{d}{dt}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) = \frac{d\mathbf{g}_i}{dt} \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot \frac{d\mathbf{g}_j}{dt}$$

$$= v^k\Gamma^r_{ki}\mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot (v^k\Gamma^r_{kj}\mathbf{g}_r) = v^k(\Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i})$$

$$\frac{dg^{ij}}{dt} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} = -v^k(g^{lj}\Gamma^i_{lk} + g^{il}\Gamma^j_{lk}) \tag{f}$$

或

$$= \frac{d}{dt}(\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j) = \frac{d\mathbf{g}^i}{dt} \cdot \mathbf{g}^j + \mathbf{g}^i \cdot \frac{d\mathbf{g}^j}{dt}$$

$$= -v^k\Gamma^i_{lk}\mathbf{g}^l \cdot \mathbf{g}^j - \mathbf{g}^i \cdot (v^k\Gamma^j_{lk}\mathbf{g}^l)$$

$$= -v^k(\Gamma^i_{lk}g^{lj} + \Gamma^j_{lk}g^{il})$$

$$\frac{d\sqrt{g}}{dt} = \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} = v^i\Gamma^j_{ij}\sqrt{g} \tag{g}$$

这里曾利用了等式

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i} = \Gamma^j_{ij}$$

$$\frac{dg^A_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{G}^A \cdot \mathbf{g}_i)$$

$$= \mathbf{G}^A \cdot \frac{d\mathbf{g}_i}{dt} = \mathbf{G}^A \cdot (v^j \Gamma^k_{ji} \mathbf{g}_k) = v^j \Gamma^k_{ji} g^A_k \tag{h}$$

$$\frac{dg^i_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{G}_A) = \frac{d\mathbf{g}^i}{dt} \cdot \mathbf{G}_A = -v^j \Gamma^i_{jl} \mathbf{g}^l \cdot \mathbf{G}_A$$

$$= -v^j \Gamma^i_{jl} g^l_A \tag{i}$$

利用(1.1.20)式可得行列式 $|g^A_i|$ 与 $|g^i_A|$ 的物质导数:

$$\frac{d}{dt}|g^A_i| = \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{g}{G}} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{g}}{dt}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{G}} v^i \Gamma^j_{ij} \sqrt{g} = v^i \Gamma^j_{ij} |g^M_k| \tag{j}$$

$$\frac{d}{dt}|g^i_A| = \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{G}{g}} = \sqrt{G}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{G}}{g}\frac{d\sqrt{g}}{dt} = -\frac{\sqrt{G}}{g} v^i \Gamma^j_{ij} \sqrt{g}$$

$$= -\sqrt{\frac{G}{g}} v^i \Gamma^j_{ij} = -v^i \Gamma^j_{ij} |g^k_M| \tag{k}$$

度量张量、转移张量与 Eddington 张量的物质导数均为零，推导如下:

$$\frac{d\overset{\text{``}}{\mathbf{I}}}{dt} = \frac{d}{dt}(G_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B) = 0 \tag{l}$$

$$\frac{d\overset{\text{''}}{\mathbf{I}}}{dt} = \frac{d}{dt}(g_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j) = \frac{dg_{ij}}{dt}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j + g_{ij}\frac{d\mathbf{g}^i}{dt}\mathbf{g}^j$$

$$+ g_{ij}\mathbf{g}^i\frac{d\mathbf{g}^j}{dt} = v^k(\Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i})\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j$$

$$+ g_{ij}(-v^k\Gamma^i_{kl}\mathbf{g}^l)\mathbf{g}^j + g_{ij}\mathbf{g}^i(-v^k\Gamma^j_{kl}\mathbf{g}^l)$$

$$= v^k[(\Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i})\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j - \Gamma_{kl,j}\mathbf{g}^l\mathbf{g}^j$$

$$- \Gamma_{kl,i}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^l] = 0 \tag{m}$$

$$\frac{d\overset{)(}{\mathbf{I}}}{dt} = \frac{d}{dt}(g^i_A \mathbf{g}_i \mathbf{G}^A) = \frac{dg^i_A}{dt}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A + g^i_A \frac{d\mathbf{g}_i}{dt}\mathbf{G}^A$$

$$= -v^j\Gamma^i_{jl} g^l_A \mathbf{g}_i \mathbf{G}^A + g^i_A(v^j\Gamma^k_{ji}\mathbf{g}_k)\mathbf{G}^A = 0 \qquad (n)$$

$$\frac{d\overset{()}{\mathbf{I}}}{dt} = \frac{d}{dt}(g^A_i \mathbf{G}_A \mathbf{g}^i) = \frac{dg^A_i}{dt}\mathbf{G}_A\mathbf{g}^i + g^A_i\mathbf{G}_A\frac{d\mathbf{g}^i}{dt}$$

$$= v^j\Gamma^k_{ji}g^A_k\mathbf{G}_A\mathbf{g}^i + g^A_i\mathbf{G}_A(-v^j\Gamma^i_{jl}\mathbf{g}^l) = 0 \qquad (o)$$

$$\frac{d\overset{(((}{\boldsymbol{\varepsilon}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\varepsilon_{ABC}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B\mathbf{G}^C) = \frac{d}{dt}([\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B\mathbf{G}_C]\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B\mathbf{G}^C) = 0 \qquad (p)$$

$$\frac{d\overset{)))}{\boldsymbol{\varepsilon}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\varepsilon_{ijk}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\mathbf{g}^k) = \frac{d}{dt}([\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k]\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\mathbf{g}^k)$$

$$= \left[\frac{d\mathbf{g}_i}{dt}\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\right]\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\mathbf{g}^k + \cdots$$

$$+ [\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k]\frac{d\mathbf{g}^i}{dt}\mathbf{g}^j\mathbf{g}^k + \cdots$$

$$= v^r\Gamma^s_{ri}[\mathbf{g}_s\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k]\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\mathbf{g}^k$$

$$+ \cdots - [\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k]v^r\Gamma^i_{rs}\mathbf{g}^s\mathbf{g}^j\mathbf{g}^k - \cdots = 0 \qquad (q)$$

构形 $\kappa(t)$ 中 Lagrange 坐标系的基矢量物质导数为

$$\frac{d\hat{\mathbf{g}}_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^A}\right)_t = \frac{\partial}{\partial X^A}\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}\right)_{X^M} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X^A}$$

$$= \frac{\partial}{\partial X^A}(v^M\hat{\mathbf{g}}_M) = \hat{\nabla}_A v^M\hat{\mathbf{g}}_M = \hat{\mathbf{g}}_A\cdot\overset{)}{\nabla}\mathbf{v}$$

$$= (\mathbf{v}\overset{(}{\nabla})\cdot\hat{\mathbf{g}}_A = v^M_{,A}\hat{\mathbf{g}}_M \qquad (r)$$

利用上式及对偶条件 $\hat{\mathbf{g}}_B\cdot\hat{\mathbf{g}}^A = \delta^A_B$，可得

$$\frac{d\hat{\mathbf{g}}_B}{dt}\cdot\hat{\mathbf{g}}^A + \hat{\mathbf{g}}_B\cdot\frac{d\hat{\mathbf{g}}^A}{dt} = 0$$

将 (r) 式代入，上式成为

$$\hat{\mathbf{g}}_B \cdot \left[(\overset{\rightarrow}{\nabla}\mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{g}}^A + \frac{d\hat{\mathbf{g}}^A}{dt}\right] = 0$$

故

$$\frac{d\hat{\mathbf{g}}^A}{dt} = -(\overset{\rightarrow}{\nabla}\mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{g}}^A = -\hat{\mathbf{g}}^A \cdot (\mathbf{v}\overset{\leftarrow}{\nabla}) = -\theta^A_{;M}\hat{\mathbf{g}}^M$$

$$= -(\hat{\nabla}_M \theta^A)\hat{\mathbf{g}}^M \tag{s}$$

$$\frac{d\hat{g}_{AB}}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{g}}_A \cdot \hat{\mathbf{g}}_B) = \frac{d\hat{\mathbf{g}}_A}{dt} \cdot \hat{\mathbf{g}}_B + \hat{\mathbf{g}}_A \cdot \frac{d\hat{\mathbf{g}}_B}{dt}$$

$$= \hat{\nabla}_A \theta^M \hat{\mathbf{g}}_M \cdot \hat{\mathbf{g}}_B + \hat{\mathbf{g}}_A \cdot (\hat{\nabla}_B \theta^M \hat{\mathbf{g}}_M)$$

$$= (\hat{\nabla}_A \theta^M)\hat{g}_{MB} + (\hat{\nabla}_B \theta^M)\hat{g}_{AM} = \hat{\nabla}_A \theta_B + \hat{\nabla}_B \theta_A \tag{t}$$

$$\frac{d\hat{g}^{AB}}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{g}}^A \cdot \hat{\mathbf{g}}^B) = \frac{d\hat{\mathbf{g}}^A}{dt} \cdot \hat{\mathbf{g}}^B + \hat{\mathbf{g}}^A \cdot \frac{d\hat{\mathbf{g}}^B}{dt}$$

$$= -(\hat{\nabla}_M \theta^A)\hat{\mathbf{g}}^M \cdot \hat{\mathbf{g}}^B - \hat{\mathbf{g}}^A \cdot ((\hat{\nabla}_M \theta^B)\hat{\mathbf{g}}^M)$$

$$= (-\hat{\nabla}_M \theta^A)\hat{g}^{MB} - (\hat{\nabla}_M \theta^B)\hat{g}^{AM}$$

$$= -(\hat{\nabla}^B \theta^A + \hat{\nabla}^A \theta^B) \tag{u}$$

(3.1.13)

$\frac{d\hat{g}_{AB}}{dt}$ 与 $\frac{d\hat{g}^{AB}}{dt}$ 可以通过下文中的变形率张量的分量表示，见后(3.3.15)″式。

习题 3.2 利用基矢量 $\hat{\mathbf{g}}_A$ 与 $\hat{\mathbf{g}}^A$ 的物质导数的公式验证

$$\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{g}}_A \cdot \hat{\mathbf{g}}^B) = 0 \text{ 与 } \frac{d\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}}{dt} = \mathbf{0}$$

三、基矢量的局部导数

根据局部导数的定义，由计算可得：

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial t}\right)_\mathbf{P} = 0, \left(\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial t}\right)_\mathbf{P} = 0 \tag{a}$$

$$\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}\right)_P=\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\right)_P=\left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial t}\right)_P=0 \qquad (b)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{G}_A}{\partial t}\right)_P=\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{G}_A(X^B(x^i,t))\right]_{x^i}$$

$$=\frac{\partial \mathbf{G}_A}{\partial X^B}\left(\frac{\partial X^B}{\partial t}\right)_{x^i}=V^B\Gamma^C_{BA}\mathbf{G}_C \qquad (c)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{G}^A}{\partial t}\right)_P=\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{G}^A(X^B(x^i,t))\right]_{x^i}$$

$$=\frac{\partial \mathbf{G}^A}{\partial X^B}\left(\frac{\partial X^B}{\partial t}\right)_{x^i}=-V^B\Gamma^A_{BC}\mathbf{G}^C \qquad (d)$$

$$\left(\frac{\partial G_{AB}}{\partial t}\right)_P=\left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{G}_A\cdot\mathbf{G}_B)\right]_P$$

$$=\left(\frac{\partial \mathbf{G}_A}{\partial t}\right)_P\cdot\mathbf{G}_B+\mathbf{G}_A\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{G}_B}{\partial t}\right)_P$$

$$=V^M\Gamma^C_{MA}\mathbf{G}_C\cdot\mathbf{G}_B+\mathbf{G}_A\cdot(V^M\Gamma^C_{MB}\mathbf{G}_C)$$

$$=V^M(\Gamma_{MA,B}+\Gamma_{MB,A}) \qquad (e)$$

$$\left(\frac{\partial G^{AB}}{\partial t}\right)_P=\left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{G}^A\cdot\mathbf{G}^B)\right]_P$$

$$=\left(\frac{\partial \mathbf{G}^A}{\partial t}\right)_P\cdot\mathbf{G}^B+\mathbf{G}^A\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{G}^B}{\partial t}\right)_P$$

$$=-V^M\Gamma^A_{MC}\mathbf{G}^C\cdot\mathbf{G}^B-\mathbf{G}^A\cdot(V^M\Gamma^B_{MC}\mathbf{G}^C)$$

$$=-V^M(\Gamma^A_{MC}G^{BC}+\Gamma^B_{MC}G^{AC}) \qquad (f)$$

$$\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial t}\right)_P=\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial X^A}\left(\frac{\partial X^A}{\partial t}\right)_{x^i}=V^A\Gamma^B_{AB}\sqrt{G} \qquad (g)$$

这里曾利用了公式

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial X^A}=\Gamma^B_{AB}$$

$$\left(\frac{\partial g^i_A}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}} = \left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{G}_A)\right]_{\mathrm{p}}$$

$$= \mathbf{g}^i \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{G}_A}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}} = \mathbf{g}^i \cdot (V^B \Gamma^C_{BA} \mathbf{G}_C) = V^B \Gamma^C_{BA} g^i_C \qquad (h)$$

$$\left(\frac{\partial g^A_i}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}} = \left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{G}^A \cdot \mathbf{g}_i)\right]_{\mathrm{p}}$$

$$= \left(\frac{\partial \mathbf{G}^A}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}} \cdot \mathbf{g}_i = -V^B \Gamma^A_{BC} \mathbf{G}^C \cdot \mathbf{g}_i = -V^B \Gamma^A_{BC} g^C_i \qquad (i)$$

利用(1.1.20)式,可得行列式 $|g^i_A|$ 与 $|g^A_i|$ 的局部导数:

$$\left(\frac{\partial |g^i_A|}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\frac{G}{g}}\right)_{\mathrm{p}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} V^A \Gamma^B_{AB} \sqrt{G} = V^A \Gamma^B_{AB} |g^k_M| \qquad (j)$$

$$\left(\frac{\partial |g^A_i|}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\frac{g}{G}}\right)_{\mathrm{p}} = \sqrt{g}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{G}}\right)_{\mathrm{p}}$$

$$= -\frac{\sqrt{g}}{G}\left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}} = -\frac{\sqrt{g}}{G} V^A \Gamma^B_{AB} \sqrt{G}$$

$$= -\sqrt{\frac{g}{G}} V^A \Gamma^B_{AB} = -V^A \Gamma^B_{AB} |g^M_k| \qquad (k)$$

度量张量、转移张量与 Eddington 张量的局部导数为零，推导如下:

$$\left(\frac{\partial \overset{\gg}{\mathbf{I}}}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}} = \frac{\partial}{\partial t}(g_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j)_{\mathrm{p}} = 0 \qquad (l)$$

$$\left(\frac{\partial \overset{\ll}{\mathbf{I}}}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}} = \left[\frac{\partial}{\partial t}(G_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B)\right]_{\mathrm{p}} = \left(\frac{\partial G_{AB}}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B$$

$$+ G_{AB}\left(\frac{\partial \mathbf{G}^A}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}}\mathbf{G}^B + G_{AB}\mathbf{G}^A\left(\frac{\partial \mathbf{G}^B}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}}$$

$$
\begin{aligned}
&= V^{M}(\Gamma_{MA,B} + \Gamma_{MB,A})\mathbf{G}^{A}\mathbf{G}^{B} \\
&\quad - G_{AB}V^{M}\Gamma^{A}_{MC}\mathbf{G}^{C}\mathbf{G}^{B} - G_{AB}\mathbf{G}^{A}(V^{M}\Gamma^{B}_{MC}\mathbf{G}^{C}) \\
&= V^{M}[(\Gamma_{MA,B} + \Gamma_{MB,A})\mathbf{G}^{A}\mathbf{G}^{B} - \Gamma_{MC,B}\mathbf{G}^{C}\mathbf{G}^{B} \\
&\quad - \Gamma_{MC,A}\mathbf{G}^{A}\mathbf{G}^{C}] = 0 \qquad (m)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \overset{)(}{\mathbf{I}}}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}} &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\,(g^{i}_{A}\mathbf{g}_{i}\mathbf{G}^{A})\right]_{\mathrm{p}} \\
&= \left(\frac{\partial g^{i}_{A}}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}}\mathbf{g}_{i}\mathbf{G}^{A} + g^{i}_{A}\mathbf{g}_{i}\left(\frac{\partial \mathbf{G}^{A}}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}} \\
&= V^{B}\Gamma^{C}_{BA}g^{i}_{C}\mathbf{g}_{i}\mathbf{G}^{A} + g^{i}_{A}\mathbf{g}_{i}(-V^{B}\Gamma^{A}_{BC}\mathbf{G}^{C}) = 0 \qquad (n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \overset{()}{\mathbf{I}}}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}} &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\,(g^{A}_{i}\mathbf{G}_{A}\mathbf{g}^{i})\right]_{\mathrm{p}} \\
&= \left(\frac{\partial g^{A}_{i}}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}}\mathbf{G}_{A}\mathbf{g}^{i} + g^{A}_{i}\left(\frac{\partial \mathbf{G}_{A}}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}}\mathbf{g}^{i} \\
&= -V^{B}\Gamma^{A}_{BC}g^{C}_{i}\mathbf{G}_{A}\mathbf{g}^{i} + g^{A}_{i}V^{B}\Gamma^{C}_{BA}\mathbf{G}_{C}\mathbf{g}^{i} = 0 \qquad (o)
\end{aligned}
$$

$$
\left(\frac{\partial \overset{)))}{\boldsymbol{\epsilon}}}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}} = 0 \qquad (p)
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \overset{(((}{\boldsymbol{\epsilon}}}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}} &= \left[\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_{ABC}\mathbf{G}^{A}\mathbf{G}^{B}\mathbf{G}^{C})\right]_{\mathrm{p}} \\
&= \left\{\frac{\partial}{\partial t}\,([\mathbf{G}_{A}\mathbf{G}_{B}\mathbf{G}_{C}]\mathbf{G}^{A}\mathbf{G}^{B}\mathbf{G}^{C})\right\}_{\mathrm{p}} \\
&= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{G}_{A}}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}}\mathbf{G}_{B}\mathbf{G}_{C}\right]\mathbf{G}^{A}\mathbf{G}^{B}\mathbf{G}^{C} + \cdots \\
&\quad + [\mathbf{G}_{A}\mathbf{G}_{B}\mathbf{G}_{C}]\left(\frac{\partial \mathbf{G}^{A}}{\partial t}\right)_{\mathrm{p}}\mathbf{G}^{B}\mathbf{G}^{C} + \cdots \\
&= V^{M}\Gamma^{N}_{MA}[\mathbf{G}_{N}\mathbf{G}_{B}\mathbf{G}_{C}]\mathbf{G}^{A}\mathbf{G}^{B}\mathbf{G}^{C} + \cdots \\
&\quad - [\mathbf{G}_{A}\mathbf{G}_{B}\mathbf{G}_{C}]V^{M}\Gamma^{A}_{MN}\mathbf{G}^{N}\mathbf{G}^{B}\mathbf{G}^{C} - \cdots \\
&= 0 \qquad (q)
\end{aligned}
$$

至于 $\hat{\mathbf{g}}_A$ 与 $\hat{\mathbf{g}}^A$ 的局部导数，很少用到，但可计算如下：

$$\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{g}}_A}{\partial t}\right)_{\mathbf{p}} = \left[\frac{\partial}{\partial t}\ \hat{\mathbf{g}}_A(X^B(x^i,\ t),\ t)\right]_{x^i}$$

$$= \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{g}}_A}{\partial t}\right)_{X^B} + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{g}}_A}{\partial X^B}\right)_t \left(\frac{\partial X^B}{\partial t}\right)_{x^i}$$

$$= (\mathbf{v}\overset{)}{\nabla})\cdot \hat{\mathbf{g}}_A + V^B \hat{\Gamma}^C_{BA} \hat{\mathbf{g}}_C \qquad (r)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{g}}^A}{\partial t}\right)_{\mathbf{p}} = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{g}}^A}{\partial t}\right)_{x^i} = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{g}}^A}{\partial t}\right)_{X^B} + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{g}}^A}{\partial X^B}\right)_t \left(\frac{\partial X^B}{\partial t}\right)_{x^i}$$

$$= -(\overset{)}{\nabla}\mathbf{v})\cdot \hat{\mathbf{g}}^A - V^B \hat{\Gamma}^A_{BC} \hat{\mathbf{g}}^C \qquad (s)$$

$$(3.1.14)$$

式中 $\hat{\Gamma}^A_{BC}$ 等表示在构形 $\mathscr{R}(t)$ 的 Lagrange 坐标系 $\{X^A,\ t\}$ 中的第二类 Christoffel 符号。

四、矢量的物质导数

设 $\mathbf{u}$ 为任一矢量场。若采用物质描述法，即以 $\mathbf{P}$，t 或 X^M，t 为自变量，则矢量 $\mathbf{u}$ 有以下几种分解形式：

$$\mathbf{u} = \overset{(}{\mathbf{u}}(\mathbf{P},\ t) = u^A(X^M,\ t)\mathbf{G}_A(X^M)$$
$$= u_A(X^M,\ t)\mathbf{G}^A(X^M) \qquad (3.1.15)$$

$$\mathbf{u} = \overset{)}{\mathbf{u}}(\mathbf{P},\ t) = u^i(X^M,\ t)\mathbf{g}_i(x^r(X^M,\ t))$$
$$= u_i(X^M,\ t)\mathbf{g}^i(x^r(X^M,\ t)) \qquad (3.1.16)$$

$$\mathbf{u} = \overset{)}{\mathbf{u}}(\mathbf{P},\ t) = \hat{u}^A(X^M,\ t)\hat{\mathbf{g}}_A(X^M,\ t)$$
$$= \hat{u}_A(X^M,\ t)\hat{\mathbf{g}}^A(X^M,\ t) \qquad (3.1.17)$$

(3.1.15)式的 $\overset{(}{\mathbf{u}}$ 表示在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的矢量场，而 (3.1.16) 与 (3.1.17)式的 $\overset{)}{\mathbf{u}}$ 则表示在构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的矢量场。$\overset{(}{\mathbf{u}}$ 与 $\overset{)}{\mathbf{u}}$ 是互相经过平移的结果。注意在(3.1.17)中的分量 $\hat{u}^A$ 与(3.1.15)式中的分量 u^A 的区别。

若采用空间描述法，即以 $\mathbf{p}$, t 或 x^r, t 为自变量，则矢量 $\mathbf{u}$ 通常有以下两种分解形式：

$$\mathbf{u} = \overset{\rangle}{\mathbf{u}}(\mathbf{p}, t) = u^i(x^r, t)\mathbf{g}_i(x^r) = u_i(x^r, t)\mathbf{g}^i(x^r) \qquad (3.1.18)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = \overset{\langle}{\mathbf{u}}(\mathbf{p}, t) &= u^A(x^r, t)\mathbf{G}_A(X^M(x^r, t)) \\ &= u_A(x^r, t)\mathbf{G}^A(X^M(x^r, t))\end{aligned} \qquad (3.1.19)$$

(3.1.8)式的 $\overset{\rangle}{\mathbf{u}}$ 表示在构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的矢量场，而(3.1.19)式的 $\overset{\langle}{\mathbf{u}}$ 表示在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的矢量场。

(3.1.15)与(3.1.19)式之间，(3.1.16)与(3.1.18)式之间，差异只在于自变量作了转换。

现在分别讨论按物质描述法与按空间描述法矢量场 $\mathbf{u}$ 的物质导数。

1. 按物质描述法求矢量 $\mathbf{u}$ 的物质导数

按(3.1.15)—(3.1.17)三种分解形式分别计算如下：

(1) 由(3.1.15)式，

$$\frac{d\overset{\langle}{\mathbf{u}}}{dt} = \frac{du^A}{dt}\mathbf{G}_A(X^M) = \frac{du_A}{dt}\mathbf{G}^A(X^M) \qquad (3.1.20)$$

因此 du^A/dt 与 du_A/dt 为构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中矢量 $d\overset{\langle}{\mathbf{u}}/dt$ 的逆变与协变分量。

(2) 由(3.1.16)式，

$$\begin{aligned}\frac{d\overset{\rangle}{\mathbf{u}}}{dt} &= \frac{du^i}{dt}\mathbf{g}_i + u^i\frac{d\mathbf{g}_i}{dt} = \left(\frac{du^i}{dt} + u^r v^s \Gamma^i_{sr}\right)\mathbf{g}_i \\ &= \frac{du_i}{dt}\mathbf{g}^i + u_i\frac{d\mathbf{g}^i}{dt} = \left(\frac{du_i}{dt} - u_r v^s \Gamma^r_{si}\right)\mathbf{g}^i\end{aligned} \qquad (3.1.21)$$

利用

$$u^i = g^{ij}u_j, \quad u_i = g_{ij}u^j$$

及(3.1.13)式中的 (e) 式，即 dg_{ij}/dt 式，与 (f) 式，即 dg^{ij}/dt

式，可以验证(3.1.21)式中的逆变与协变分量满足指标升降关系

$$\begin{aligned}\frac{du_i}{dt}-u_r v^s \Gamma^r_{si}&=g_{ij}\left(\frac{du^j}{dt}+u^r v^s \Gamma^j_{sr}\right)\\ \frac{du^i}{dt}+u^r v^s \Gamma^i_{sr}&=g^{ij}\left(\frac{du_j}{dt}-u_r v^s \Gamma^r_{sj}\right)\end{aligned}\tag{3.1.22}$$

注意在(3.1.21)式中 du^i/dt 与 du_i/dt 并非矢量分量。

(3) 由(3.1.17)式，并利用 (3.1.13r，s) 式得：

$$\begin{aligned}\frac{d\overset{\rangle}{\mathbf{u}}}{dt}&=\frac{d\hat{u}^A}{dt}\hat{\mathbf{g}}_A+\hat{u}^A\frac{d\hat{\mathbf{g}}_A}{dt}=\left(\frac{d\hat{u}^A}{dt}+\hat{u}^M\hat{\nabla}_M\theta^A\right)\hat{\mathbf{g}}_A\\ &=\frac{d\hat{u}_A}{dt}\hat{\mathbf{g}}^A+\hat{u}_A\frac{d\hat{\mathbf{g}}^A}{dt}=\left(\frac{d\hat{u}_A}{dt}-\hat{u}_M\hat{\nabla}_A\theta^M\right)\hat{\mathbf{g}}^A\end{aligned}\tag{3.1.23}$$

利用

$$\hat{u}^A=\hat{g}^{AB}\hat{u}_B,\quad \hat{u}_A=\hat{g}_{AB}\hat{u}^B$$

及(3.1.13)式中的 (t) 即 $d\hat{g}_{AB}/dt$ 式与 (u) 即 $d\hat{g}^{AB}/dt$ 式，可以验证(3.1. 23)式中的逆变与协变分量满足指标升降关系：

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{u}_A}{dt}-\hat{u}_M\hat{\nabla}_A\theta^M&=\hat{g}_{AB}\left(\frac{d\hat{u}^B}{dt}+\hat{u}^M\hat{\nabla}_M\theta^B\right)\\ \frac{d\hat{u}^A}{dt}+\hat{u}^M\nabla_M\theta^A&=\hat{g}^{AB}\left(\frac{d\hat{u}_B}{dt}-\hat{u}_M\hat{\nabla}_B\theta^M\right)\end{aligned}\tag{3.1.24}$$

注意 $d\hat{u}^A/dt$ 与 $d\hat{u}_A/dt$ 不是同一矢量的分量。

习题 3.3 证明(3.1.20)与(3.1.21)式满足平移关系

$$\frac{d\overset{\langle}{\mathbf{u}}}{dt}=\overset{\circ}{\mathbf{I}}\cdot\frac{d\overset{\rangle}{\mathbf{u}}}{dt}$$

即证

$$\frac{du^A}{dt}=\left(\frac{du^i}{dt}+u^r v^s \Gamma^i_{sr}\right)g^A_i$$

【提示】 利用 $u^A = u^i g_i^A$ 及(3.1.13) 式中的 (h) 即 $dg_i^A/\partial t$ 式

习题 3.4 证明(3.1.21)与(3.1.23) 式的分量满足矢量分量的坐标转换关系,即证:

$$\frac{du^i}{dt} + u^r v^s \Gamma^i_{sr} = \left(\frac{d\hat{u}^A}{dt} + \hat{u}^M \hat{\nabla}_M \hat{v}^A\right)\frac{\partial x^i}{\partial X^A}$$

【提示】 上式可改写为

$$\frac{du^i}{dt} + u^r v^s \Gamma^i_{sr} = \frac{d\hat{u}^A}{dt}\frac{\partial x^i}{\partial X^A} + u^r \nabla_r v^i$$

即

$$\frac{du^i}{dt} = \frac{d\hat{u}^A}{dt}\frac{\partial x^i}{\partial X^A} + u^r\frac{\partial v^i}{\partial x^r}$$

然后利用 $u^i = \hat{u}^A(\partial x^i/\partial X^A)$ 式证明。

2. 按空间描述法求矢量 $\vec{\mathbf{u}}$ 的物质导数

按(3.1.18)与(3.1.19)两种分解形式分别计算如下:

(1) 由(3.1.18)式求 $d\vec{\mathbf{u}}/dt$,也可以把(3.1.18) 式中的 x^r 看作 X^M 与 t 的函数,即 $x^r(X^M, t)$,然后利用由(3.1.16)式求导的结果(3.1.21)式,故

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} &= \left(\frac{du^i}{dt} + u^r v^s \Gamma^i_{sr}\right)\mathbf{g}_i \\
&= \left[\left(\frac{\partial u^i}{\partial t}\right)_{x^r} + \frac{\partial u^i}{\partial x^s}\frac{dx^s}{dt} + u^r v^s \Gamma^i_{sr}\right]\mathbf{g}_i \\
&= \left[\left(\frac{\partial u^i}{\partial t}\right)_{x^r} + v^s \nabla_s u^i\right]\mathbf{g}_i = \frac{Du^i}{Dt}\mathbf{g}_i \qquad (3.1.25a)
\end{aligned}$$

及

$$\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} = \left(\frac{du_i}{dt} - u_r v^s \Gamma^r_{si}\right)\mathbf{g}^i$$

$$= \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)_{x^r} + \frac{\partial u_i}{\partial x^s}\frac{dx^s}{dt} - u_r v^s \Gamma^r_{si}\right]\mathbf{g}^i$$

$$= \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)_{x^r} + v^s \nabla_s u_i\right]\mathbf{g}^i = \frac{Du_i}{Dt}\mathbf{g}^i \qquad (3.1.25b)$$

式中

$$\frac{Du^i}{Dt} = \left(\frac{\partial u^i}{\partial t}\right)_{x^r} + v^s \nabla_s u^i$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)_{x^r} + v^s \nabla_s u_i \qquad (3.1.26)$$

称为 u^i 与 u_i 的全导数。注意 $(\partial u^i/\partial t)_{x^r}$ 与 $(\partial u_i/\partial t)_{x^r}$ 是矢量分量，而且是同一矢量的分量。

(3.1.25)式亦可写作

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)_{\mathbf{p}} + v^s\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^s} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)_{\mathbf{p}} + \mathbf{v}\cdot(\overset{)}{\nabla}\mathbf{u}) \qquad (3.1.25)'$$

式中右端第一项 $(\partial \mathbf{u}/\partial t)_{\mathbf{p}}$ 称为 $\mathbf{u}$ 的局部导数，而第二项 $\mathbf{v}\cdot(\overset{)}{\nabla}\mathbf{u})$ 称为对流导数，或迁移导数。实际上，对于任意的物理量 $\overset{)\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$，按复合函数求导规则，物质导数与局部导数有以下的关系：

$$\frac{d\overset{)\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{dt} = \left(\frac{\partial \overset{)\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{p},t)}{\partial t}\right)_{\mathbf{P}} = \left(\frac{\partial \overset{)\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t}\right)_{\mathbf{p}} + \frac{dx^r}{dt}\frac{\partial \overset{)\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial x^r}$$

$$= \left(\frac{\partial \overset{)\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t}\right)_{\mathbf{p}} + v^r\frac{\partial \overset{)\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial x^r}$$

$$= \left(\frac{\partial \overset{)\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t}\right)_{\mathbf{p}} + \mathbf{v}\cdot(\overset{))\cdot)}{\nabla\boldsymbol{\varphi}}) \qquad (3.1.27)$$

式中 $\overset{)\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 可为标量、矢量或张量，$\mathbf{p}$ 理解为 $\mathbf{P}$ 与 t 的函数，见(3.1.1a)式。(3.1.27)式右端的第一项为 $\overset{)\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的局部导数，第二项为对流导数。(3.1.25)′就是(3.1.27)式的特例(当 $\overset{)\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 为 $\mathbf{u}$)。同样，有

$$\left(\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{P},t)}{\partial t}\right)_{\mathbf{p}} = \left(\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\Phi}}}{\partial t}\right)_{\mathbf{P}} + \left(\frac{\partial X^M}{\partial t}\right)_{x^i} \frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\Phi}}}{\partial X^M}$$

$$= \left(\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\Phi}}}{\partial t}\right)_{\mathbf{P}} + V^M \frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\Phi}}}{\partial X^M}$$

$$= \left(\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\Phi}}}{\partial t}\right)_{\mathbf{P}} + \overset{(}{\mathbf{V}} \cdot (\overset{(}{\nabla} \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\Phi}}) \qquad (3.1.28)$$

式中 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\Phi}}$ 可为标量、矢量或张量，$\mathbf{P}$ 理解为 $\mathbf{p}$ 与 t 的函数，见(3.1.1b) 式，$\mathbf{V}$ 为换班速度，见(3.1.4)式。

(2) (3.1.19)式可以看作是在(3.1.15)式中把 X^M 换成 x^r 与 t 的函数的结果。故可利用(3.1.20)式得到

$$\frac{d\overset{(}{\mathbf{u}}}{dt} = \frac{du^A}{dt}\mathbf{G}_A(X^M)$$

$$= \left[\left(\frac{\partial u^A}{\partial t}\right)_{x^r} + v^r \frac{\partial u^A(x^r, t)}{\partial x^r}\right]\mathbf{G}_A(X^M)$$

五、张量的物质导数

设有两点张量场

$$\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} = \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P}, \mathbf{p}, t)$$

$$= \varphi^{A}{}_{\cdot B}{}^{i}{}_{\cdot j}(X^M, x^r, t)\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B(X^M)\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j(x^r) \qquad (3.1.10)'$$

式中假定 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$可以依赖于两个构形 $\mathscr{R}(t_0)$, $r(t)$ 中的矢径 $\mathbf{P}$, $\mathbf{p}$ 以及时间 t，因此分量 $\varphi^{A}{}_{\cdot B}{}^{i}{}_{\cdot j}$ 可以是两组坐标 X^M, x^r 以及时间 t 的函数。

1. 物质描述法

把 $\mathbf{P}$ 与 t 当作自变量，$\mathbf{p}$ 为 $\mathbf{P}$ 与 t 的函数，x^r 为 X^M 与 t 的函数(见(3.1.1a)式)，故

$$\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} = \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P}, \mathbf{p}(\mathbf{P}, t), t)$$
$$= \varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}(X^M, x^r(X^M, t), t)\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B(X^M)\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j(x^r(X^M, t)) \tag{3.1.29}$$

将上式求物质导数，得

$$\frac{d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{dt} = \left(\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t}\right)_{\mathbf{P}}$$
$$= \left[\frac{d\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}}{dt} + v^s(\varphi^{A\cdot r}_{\cdot B\cdot j}\Gamma^i_{sr} - \varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot r}\Gamma^r_{sj})\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j\right. \tag{3.1.30}$$

式中

$$\frac{d\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}}{dt} = \left(\frac{\partial\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}}{\partial t}\right)_{X^M}$$
$$= \left(\frac{\partial\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}}{\partial t}\right)_{X^M, x^r} + v^s\left(\frac{\partial\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}}{\partial x^s}\right)_{X^M, t} \tag{3.1.31}$$

因为 x^r 与 X^M 之间存在着 (3.1.1a)或 (3.1.1b) 式的关系，所以(3.1.31) 式右端的两项的值并非唯一的；例如，如果把 x^r 都利用 (3.1.1a) 式代之以 $x^r(X^M, t)$ 并重新加以整理后得到 $\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}$ 表示成 X^M 与 t 的函数：

$$\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}(X^M, t)$$

即函数中不显含 x^r，则(3.1.31)式右端末项为零。 但不管 x^r 与 X^M 怎样互相替换 (利用 (3.1.1a) 或 (3.1.1b) 式)，(3.1.31)式右端两项之和却是一样的。

矢量的物质导数(3.1.20)和(3.1.21)式都是这里的 (3.1.30) 式的特例。

2.空间描述法

把 $\mathbf{p}$ 与 t 当作自变量，$\mathbf{P}$ 为 $\mathbf{p}$ 与 t 的函数，X^M为 x^r 与 t 的函数(见(3.1.2)式)，故

$$\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} = \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P}(\mathbf{p}, t), \mathbf{p}, t)$$
$$= \varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}(X^M(x^r, t), x^r, t)\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B(X^M)\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j(x^r) \tag{3.1.32}$$

对上式求物质导数,或者直接利用(3.1.30)式,并将(3.1.31)式代入后,得

$$\frac{d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{dt} = \frac{D\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}}{Dt}\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j \tag{3.1.33}$$

式中 $D\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}/Dt$ 称为 $\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}$ 的全导数,

$$\frac{D\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}}{Dt} = \left(\frac{\partial\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}}{\partial t}\right)_{X^M, x^r} + v^s\nabla_s\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j} \tag{3.1.34a}$$

$$\nabla_s\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j} = \left(\frac{\partial\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}}{\partial x^s}\right)_{X^M, t} + \varphi^{A\cdot r}_{\cdot B\cdot j}\Gamma^i_{sr} - \varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot r}\Gamma^r_{sj} \tag{3.1.34b}$$

类似于上面的(3.1.31)式,(3.1.34a)式右端的两项的值也并非唯一的;例如,如果把 X^M 都利用(3.1.2)式代之以 $X^M(x^r, t)$ 并重新加以整理后,得到 $\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}$ 表示成 x^r 与 t 的函数:

$$\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}(x^r, t)$$

即函数中不显含 X^M, 则(3.1.34)式成为

$$\frac{D\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}}{Dt} = \left(\frac{\partial\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}}{\partial t}\right)_{x^r} + v^s\nabla_s\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j} \tag{3.1.34a)'$$

式中

$$\nabla_s\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j} = \left(\frac{\partial\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}}{\partial x^s}\right)_t + \varphi^{A\cdot r}_{\cdot B\cdot j}\Gamma^i_{sr} - \varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot r}\Gamma^r_{sj} \tag{3.1.34b)'$$

但不管 x^r 与 X^M 怎样互相替换 (利用 (3.1.1) 或 (3.1.2) 式),(3.1.34a)式右端两项之和却是一样的。(3.1.34a)′式就是(3.1.27)式的分量形式。

矢量的物质导数(3.1.26)式就是 (3.1.34a)′ 式的特例。

利用全导数的定义式(3.1.33),可以证明算符 D/Dt 服从普通

的求导规则，例如：

$$\frac{D}{Dt}(\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}+\phi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j})=\frac{D}{Dt}\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}+\frac{D}{Dt}\phi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}$$

$$\frac{D}{Dt}(\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}\phi^{C\cdot k}_{\cdot D\cdot l})=\left(\frac{D}{Dt}\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}\right)\phi^{C\cdot k}_{\cdot D\cdot l}$$

$$+\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}\frac{D}{Dt}\phi^{C\cdot k}_{\cdot D\cdot l}$$

对于构形 $\kappa(t)$ 中的一点张量 $\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{\boldsymbol{\varphi}}$，除了上述的描述方法以外，还经常采用一种按 Lagrange 坐标系 $\{X^A, t\}$ 的基矢量 $\hat{\mathbf{g}}_A$，$\hat{\mathbf{g}}^A$ 分解的物质描述法（相当于矢量的分解式(3.1.17)式），以二阶张量为例，即

$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{\boldsymbol{\varphi}}=\hat{\varphi}^{A}_{\cdot B}(X^M, t)\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}^B(X^M, t) \tag{3.1.35}$$

于是，$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的物质导数有以下几种不同的表达式。

采用物质描述法的按 Euler 坐标系基矢量的分解式(3.1.29)：

$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{\boldsymbol{\varphi}}=\varphi^{i}_{\cdot j}(X^M, t)\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j(x^r(X^M, t))$$

则由(3.1.30)式，物质导数为

$$\frac{d\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{\boldsymbol{\varphi}}}{dt}=\left[\frac{d\varphi^{i}_{\cdot j}}{dt}+v^s(\varphi^{r}_{\cdot j}\Gamma^i_{sr}-\varphi^{i}_{\cdot r}\Gamma^r_{sj})\right]\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j \tag{3.1.36}$$

式中

$$\frac{d\varphi^{i}_{\cdot j}}{dt}=\left(\frac{\partial\varphi^{i}_{\cdot j}}{\partial t}\right)_{X^M}$$

采用空间描述法的按 Euler 坐标系基矢量的分解式(3.1.32)：

$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{\boldsymbol{\varphi}}=\varphi^{i}_{\cdot j}(x^r, t)\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j(x^r)$$

则由(3.1.33)与(3.1.34)′式，物质导数为

$$\frac{d\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{\boldsymbol{\varphi}}}{dt}=\frac{D\varphi^{i}_{\cdot j}}{Dt}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j=\left(\frac{\partial\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}}+\overset{\rightharpoonup}{\mathbf{v}}\cdot(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup\rightharpoonup}{\nabla\boldsymbol{\varphi}}) \tag{3.1.37}$$

式中

$$\frac{D\varphi^{i}{}_{\cdot j}}{Dt}=\left(\frac{\partial\varphi^{i}{}_{\cdot j}}{\partial t}\right)_{x^{i}}+v^{s}\nabla_{s}\varphi^{i}{}_{\cdot j}$$

(3.1.37)式就是以前的(3.1.27)式。

若采用物质描述法的按 Lagrange 坐标系 $\{X^{A}, t\}$基矢量分解式(3.1.35)，则 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的物质导数为

$$\frac{d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{dt}=\left(\frac{d\hat{\varphi}^{A}{}_{\cdot B}}{dt}+\hat{\varphi}^{M}{}_{\cdot B}\hat{\nabla}_{M}\hat{v}^{A}-\hat{\varphi}^{A}{}_{\cdot M}\hat{\nabla}_{B}\hat{v}^{M}\right)\hat{\mathbf{g}}_{A}\hat{\mathbf{g}}^{B}\quad(3.1.38)$$

式中

$$\frac{d\hat{\varphi}^{A}{}_{\cdot B}}{dt}=\left(\frac{\partial\hat{\varphi}^{A}{}_{\cdot B}}{\partial t}\right)_{X^{M}}$$

习题 3.5

(1) 采用物质描述法，设

$$\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}=\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P},\mathbf{p}(\mathbf{P},t),t)$$

证明 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的物质导数为

$$\frac{d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{dt}=\left.\frac{\partial\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P},\mathbf{p},t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{P},\mathbf{p}}+(\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\nabla}})\cdot\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}}\quad(3.1.39a)$$

[提示]

$$d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}=\left.\frac{\partial\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P},\mathbf{p},t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{P},\mathbf{p}}dt+\left.\frac{\partial\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P},\mathbf{p},t)}{\partial\mathbf{p}}\right|_{\mathbf{P},t}\cdot d\mathbf{p}$$

式中右端第二项的

$$\left.\frac{\partial\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P},\mathbf{p},t)}{\partial\mathbf{p}}\right|_{\mathbf{P},t}$$

由于与在其后的 $d\mathbf{p}$ 相点积，故应理解为偏梯度 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\nabla}}$，$\overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\nabla}}$ 应在 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的后面。下文中类似情况也作同样的理解。

(2) 采用空间描述法，设

$$\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} = \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P}(\mathbf{p},\ t),\ \mathbf{p},\ t) = \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{p},\ t)$$

证明 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的物质导数为

$$\frac{d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{dt} = \left.\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{p},\ t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{p}} + (\overset{(\cdot)\rightarrow}{\boldsymbol{\varphi}\Box}) \cdot \overset{\rightarrow}{\mathbf{v}} \qquad (3.1.39b)$$

[提示]

$$d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} = \left.\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{p},\ t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{p}} dt + \left.\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P},\ \mathbf{p},\ t)}{\partial \mathbf{p}}\right|_{\mathbf{P}t} \cdot d\mathbf{p}$$

$$+ \left.\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P},\ \mathbf{p},\ t)}{\partial \mathbf{P}}\right|_{\mathbf{p}t} \cdot \left.\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{p},\ t)}{\partial \mathbf{p}}\right|_{t} \cdot d\mathbf{p}$$

$$= \left.\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{p},\ t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{p}} dt + (\overset{(\cdot)\rightarrow}{\boldsymbol{\varphi}\nabla}) \cdot \overset{\rightarrow}{\mathbf{v}}dt$$

$$+ (\overset{(\cdot)\leftarrow}{\boldsymbol{\varphi}\nabla}) \cdot (\overset{\rightarrow}{\mathbf{P}\nabla}) \cdot \overset{\rightarrow}{\mathbf{v}}dt$$

利用(1.2.17)第二式,上式可写作

$$d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} = \left[\left.\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{p},\ t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{p}} + (\overset{(\cdot)\rightarrow}{\boldsymbol{\varphi}\Box}) \cdot \overset{\rightarrow}{\mathbf{v}} \right] dt$$

(3) 证明 (3.1.39a) 与 (3.1.39b) 两式右端相等。

[提示] (3.1.39b) 式右端第一项可写作

$$\left.\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{p},\ t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{p}} = \left.\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P},\ \mathbf{p},\ t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{P},\mathbf{p}}$$

$$+ \left.\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P},\ \mathbf{p},\ t)}{\partial \mathbf{P}}\right|_{\mathbf{p}t} \cdot \left.\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{p},\ t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{p}}$$

式中右端末项的

$$\left.\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{p},\ t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{p}}$$

就是(3.1.4)式的换班速度 $\overset{\leftarrow}{\mathbf{V}}$。故

$$\left.\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{p},t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{p}} = \left.\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P},\mathbf{p},t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{P},\mathbf{p}} + (\overset{(\cdot)\,(}{\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\nabla}})\cdot\overset{(}{\mathbf{V}} \qquad (a)$$

(3.1.39b) 的第二项则可写作

$$(\overset{(\cdot)\,)}{\boldsymbol{\varphi}\square})\cdot\overset{)}{\mathbf{v}} = (\overset{(\cdot)\,)}{\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\nabla}})\cdot\overset{)}{\mathbf{v}} + (\overset{(\cdot)\,(}{\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\nabla}})\cdot(\mathbf{P}\overset{)}{\boldsymbol{\nabla}})\cdot\overset{)}{\mathbf{v}} \qquad (b)$$

将 (a), (b) 代入 (3.1.39b) 得到

$$\left.\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{p},t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{p}} + (\overset{(\cdot)\,)}{\boldsymbol{\varphi}\square})\cdot\overset{)}{\mathbf{v}} = \left.\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P},\mathbf{p},t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{P},\mathbf{p}}$$

$$+ (\overset{(\cdot)\,)}{\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\nabla}})\cdot\overset{)}{\mathbf{v}} + (\overset{(\cdot)\,(}{\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\nabla}})\cdot[\overset{(}{\mathbf{V}} + (\mathbf{P}\overset{)}{\boldsymbol{\nabla}})\cdot\overset{)}{\mathbf{v}}] \qquad (c)$$

但因在求物质导数时

$$d\mathbf{P}(\mathbf{p},t) = \left.\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{p},t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{p}} dt + \left.\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{p},t)}{\partial \mathbf{p}}\right|_{t}\cdot d\mathbf{p} = \mathbf{0}$$

即
$$\overset{(}{\mathbf{V}} + (\mathbf{P}\overset{)}{\boldsymbol{\nabla}})\cdot\overset{)}{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$$

因此,由 (c) 式可见 (3.1.39a) 与 (3.1.39b) 两式右端相等。

§3.2 速度梯度、线元、面元与体元的物质导数

一、速度梯度

在构形 $\mathscr{r}(t)$ 中的速度场为

$$\mathbf{v} = v^i\mathbf{g}_i = \hat{v}^A\hat{\mathbf{g}}_A \qquad (3.2.1)$$

式中,由(3.1.6)式及由矢量分量的坐标转换关系

$$v^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_{X^M}$$

$$\hat{v}^A = \frac{\partial X^A}{\partial x^i}v^i$$

定义速度梯度为

$$\overset{\gg}{\mathbf{L}} = \mathbf{v}\overset{\leftarrow}{\nabla} = \mathbf{v}_{,j}\mathbf{g}^j = v^i_{;j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j$$

$$= \mathbf{v}_{,B}\hat{\mathbf{g}}^B = v^A_{;B}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}^B \tag{3.2.2a}$$

其转置张量为

$$\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^* = \overset{\rightarrow}{\nabla}\mathbf{v} = \mathbf{g}^i\mathbf{v}_{,i} = \nabla_i v^j\mathbf{g}^i\mathbf{g}_j = \hat{\mathbf{g}}^A\mathbf{v}_{,A} = \hat{\nabla}_A v^B\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}_B \tag{3.2.2b}$$

在构形 $\kappa(t)$ 相邻两点 $\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{p}+d\mathbf{p}$ 之速度差为

$$d\mathbf{v} = (\mathbf{v}\overset{\leftarrow}{\nabla})\cdot d\mathbf{p} = \overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot d\mathbf{p}$$

$$= d\mathbf{p}\cdot(\overset{\rightarrow}{\nabla}\mathbf{v}) = d\mathbf{p}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^* \tag{3.2.3}$$

二、变形梯度的物质导数

由于线元、面元及体元的变换均是通过变形梯度 $\overset{)(}{\mathbf{D}}$ 表示的，故首先讨论变形梯度的物质导数。以后为简单起见，常用在物理量上面加一点“·”的记号来表示该物理量的物质导数①，见(3.1.2)式。

由定义(2.3.7)及(2.3.14)式：

$$\overset{)(}{\mathbf{D}} = \mathbf{p}\overset{\leftarrow}{\nabla} = \mathbf{p}_{,A}\mathbf{G}^A = x^i_{,A}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A \tag{3.2.4}$$

对(3.2.4)式求物质导数，并利用(3.1.13)之(c)式，得

$$\dot{\overset{)(}{\mathbf{D}}} = \frac{d}{dt}(x^i_{,A}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A) = \left(\frac{dx^i_{,A}}{dt}\mathbf{g}_i + x^i_{,A}\frac{d\mathbf{g}_i}{dt}\right)\mathbf{G}^A$$

$$= (v^i_{,A} + x^j_{,A}v^r\Gamma^i_{rj})\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A = (v^i_{,j} + v^r\Gamma^i_{rj})x^j_{,A}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A$$

$$= v^i_{;j}x^j_{,A}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A \tag{3.2.5a}$$

利用 (3.2.2a) 与(3.2.4)式，(3.2.5a) 式可写作

$$\dot{\overset{)(}{\mathbf{D}}} = \overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}} \tag{3.2.5b}$$

如果我们利用 (2.3.18a)，将 $\overset{)(}{\mathbf{D}}$ 写成

① 加一点“·”的记号只用于标量、矢量或张量，而不用于非笛卡儿坐标中矢量或张量的分量，以免出现混淆或错误。

$$\overset{)(}{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{g}}_A \mathbf{G}^A \tag{3.2.4)'$$

并利用（3.1.13r）式，即

$$\frac{d\hat{\mathbf{g}}_A}{dt} = \overset{))}{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{g}}_A$$

可立即导出（3.2.5b）式。将（3.2.2a）的 $\overset{))}{\mathbf{L}}$ 与(3.2.4)'的 $\overset{)(}{\mathbf{D}}$ 代入(3.2.5b)，可得 $\dot{\overset{)(}{\mathbf{D}}}$ 的分解形式：

$$\dot{\overset{)(}{\mathbf{D}}} = \theta^M_{,A} \hat{\mathbf{g}}_M \mathbf{G}^A \tag{3.2.5c}$$

我们也可以按空间描述法求(3.2.4) $\overset{)(}{\mathbf{D}}$ 的物质导数，但应注意因 X^A 与$\mathbf{G}^A$ 保持不变，在构形 $\mathscr{r}(t)$ 中 $x^i_{,A}$ 表现如一矢量的逆变分量，其全导数应按(3.1.26)式定义，故

$$\dot{\overset{)(}{\mathbf{D}}} = \frac{Dx^i_{,A}}{Dt} \mathbf{g}_i \mathbf{G}^A \tag{3.2.5d}$$

式中

$$\frac{Dx^i_{,A}}{Dt} = \left(\frac{\partial x^i_{,A}}{\partial t}\right)_o + v^s \nabla_s x^i_{,A}$$

$$= \left(\frac{\partial x^i_{,A}}{\partial t}\right)_{x^r} + v^s \nabla_s x^i_{,A}$$

$$\nabla_s x^i_{,A} = \left(\frac{\partial x^i_{,A}}{\partial x^s}\right)_t + x^r_{,A} \Gamma^i_{rs}$$

本来 $x^i_{,A}$ 是 X^M 与 t 的函数(见（3.1.1a）式)：

$$x^i_{,A} = \frac{\partial x^i}{\partial X^A} = x^i_{,A}(X^M, t)$$

但是由于这里采用的是空间描述法，把 x^r 与 t 当作自变量，所以

$$x^i_{,A} = x^i_{,A}(X^M(x^r, t), t)$$

被当作是 x^r 与 t 的函数，因此

$$\left(\frac{\partial x^i_{,A}}{\partial t}\right)_{x^r} = \frac{\partial x^i_{,A}}{\partial X^M}\left(\frac{\partial X^M}{\partial t}\right)_{x^r} + \left(\frac{\partial x^i_{,A}}{\partial t}\right)_{X^M} = x^i_{,AM}V^M + v^i_{,A}$$

$$\left(\frac{\partial x^i_{,A}}{\partial x^s}\right)_t = \frac{\partial x^i_{,A}}{\partial X^M}\left(\frac{\partial X^M}{\partial x^s}\right)_t = x^i_{,AM}X^M_{,s}$$

比较（3.2.5a，c，d），可得①

$$\frac{Dx^i_{,A}}{Dt} = v^i_{;j}x^j_{,A} = \vartheta^M_{;A}x^i_{,M} \qquad (3.2.5e)$$

取（3.2.5b）式之转置，得

$$\dot{\overset{()}{\mathbf{D}}}{}^* = \overset{()}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}{}^* \qquad (3.2.6)$$

其分解形式为(利用(3.2.5d，c，a))

$$\dot{\overset{()}{\mathbf{D}}}{}^* = \frac{D}{Dt}(\partial_A x^i)\mathbf{G}^A\mathbf{g}_i = \hat{\nabla}_A\vartheta^M\mathbf{G}^A\hat{\mathbf{g}}_M \qquad (3.2.6a)'$$

$$\frac{D}{Dt}(\partial_A x^i) = (\partial_A x^j)\nabla_j v^i = (\hat{\nabla}_A\vartheta^M)\partial_M x^i \qquad (3.2.6b)'$$

式中 $\partial_A x^i = x^i_{,A}$。

由定义(2.3.9)，(2.3.16)及(2.3.21)式：

$$\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} = \mathbf{P}\overset{\rangle}{\nabla} = \mathbf{P}_{,i}\mathbf{g}^i = X^A_{;i}\mathbf{G}_A\mathbf{g}^i = \mathbf{G}_A\hat{\mathbf{g}}^A \qquad (3.2.7)$$

为了求逆变形梯度 $\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}$ 的物质导数，可以利用等式

$$\overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} = \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}}$$

求物质导数后，得

$$\dot{\overset{)(}{\mathbf{D}}} \cdot \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} + \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \dot{\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}} = \mathbf{0}$$

因此

---

① (3.2.5e)的第二等式实际上就是张量分量的坐标转换关系：

$$v^i_{;j} = \vartheta^M_{;A}x^i_{;M}X^A_{;j}$$

$$\dot{\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}} = -\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot\dot{\overset{)(}{\mathbf{D}}}\cdot\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}$$

将(3.2.5)式代入，得

$$\dot{\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}} = -\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot\overset{))}{\mathbf{L}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} = -\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot\overset{))}{\mathbf{L}} \tag{3.2.8}$$

将 (2.3.21a) 与 (3.2.2a) 式代入上式，可得其分解形式为①

$$\dot{\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}} = \frac{DX^A_{;i}}{Dt}\mathbf{G}_A\mathbf{g}^i = -X^A_{;r}v^r_{;i}\mathbf{G}_A\mathbf{g}^i = -\hat{v}^A_{;M}\mathbf{G}_A\hat{\mathbf{g}}^M \qquad (3.2.8a)'$$

$$\frac{DX^A_{;i}}{Dt} = -X^A_{;r}v^r_{;i} = -\hat{v}^A_{;M}X^M_{;i} \qquad (3.2.8b)'$$

式中

$$\frac{DX^A_{;i}}{Dt} = \left(\frac{\partial X^A_{;i}}{\partial t}\right)_{x^r} + v^s\nabla_s X^A_{;i}$$

$$\nabla_s X^A_{;i} = \frac{\partial X^A_{;i}}{\partial x^s} - X^A_{;r}\Gamma^r_{si}$$

取(3.2.8)式之转置，得

$$\dot{\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}}{}^* = -\overset{))}{\mathbf{L}}{}^*\cdot\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^* \tag{3.2.9}$$

其分解形式为

$$\dot{\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}}{}^* = \frac{D}{Dt}(\partial_i X^A)\mathbf{g}^i\mathbf{G}_A = -\hat{\nabla}_M\hat{v}^A\hat{\mathbf{g}}^M\mathbf{G}_A$$

$$\frac{D}{Dt}(\partial_i X^A) = -(\nabla_i v^r)\partial_r X^A = -(\partial_i X^M)\hat{\nabla}_M\hat{v}^A \qquad (3.2.9)'$$

式中 $\partial_i X^A = X^A_{;i}$

习题 3.6 直接利用 (2.3.21a) $\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}$ 式证明(3.2.8)式。

---

① (3.2.8)′的第二等式实际上就是张量分量的坐标转换关系：

$$v^r_{;i} = \hat{v}^A_{;M}x^r_{;A}X^M_{;i}$$

[提示] 利用下式

$$X^A_{;i} x^i_{,B} = \delta^A_B$$

对 t 求导，可证

$$\frac{d}{dt} X^A_{;i} = - X^A_{;j} v^j_{;i}$$

然后由 (2.3.21a) 对 t 求导，并利用上式与 (3.1.13d)，得

$$\overset{\overset{\triangle}{1}}{\underset{0}{\mathbf{D}}} = \frac{d}{dt}(X^A_{;i} \mathbf{G}_A \mathbf{g}^i) = \left(\frac{d}{dt} X^A_{;i}\right) \mathbf{G}_A \mathbf{g}^i + X^A_{;i} \mathbf{G}_A \frac{d\mathbf{g}^i}{dt}$$

$$= (- X^A_{;j} v^j_{,i}) \mathbf{G}_A \mathbf{g}^i + X^A_{;j} \mathbf{G}_A (- v^r \Gamma^j_{ri} \mathbf{g}^i)$$

$$= - X^A_{;j} (v^j_{,i} + v^r \Gamma^j_{ri}) \mathbf{G}_A \mathbf{g}^i = - X^A_{;j} v^j_{;i} \mathbf{G}_A \mathbf{g}^i$$

习题 3.7 直接证明分量等式 (3.2.5e) 与(3.2.8b)'。

[提示]

$$\frac{D x^i_{,A}}{Dt} = \left(\frac{\partial x^i_{,A}}{\partial t}\right)_P + v^s \nabla_s x^i_{,A}$$

$$= \left(\frac{\partial x^i_{,A}}{\partial t}\right)_P + v^s \left(\frac{\partial x^i_{,A}}{\partial x^s} + x^r_{,A} \Gamma^i_{rs}\right)$$

$$= \frac{d x^i_{,A}}{dt} + v^s x^r_{,A} \Gamma^i_{rs} = v^i_{,A} + v^s x^r_{,A} \Gamma^i_{rs}$$

$$= (v^i_{,r} + v^s \Gamma^i_{rs}) x^r_{,A} = v^i_{;r} x^r_{,A}$$

$$\frac{D X^A_{;i}}{Dt} = \left(\frac{\partial X^A_{;i}}{\partial t}\right)_P + v^s \nabla_s X^A_{;i}$$

$$= \left(\frac{\partial X^A_{;i}}{\partial t}\right)_P + v^s \left(\frac{\partial X^A_{;i}}{\partial x^s} - X^A_{;r} \Gamma^r_{si}\right)$$

$$= \frac{d X^A_{;i}}{dt} - v^s X^A_{;r} \Gamma^r_{si} = - X^A_{;r} v^r_{,i} - v^s X^A_{;r} \Gamma^r_{si}$$

$$= - X^A_{;r} (v^r_{,i} + v^s \Gamma^r_{si}) = - X^A_{;r} v^r_{;i}$$

三、线元、面元与体元的物质导数

在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的物质元素(线元、面元与体元)与时间 t 无关，显然，它们的导数为零：

$$\dot{\overline{d\mathbf{P}}}=0,\ \dot{\overline{d\overset{\langle}{\mathbf{A}}}}=0,\ \dot{\overline{dV}}=0 \tag{3.2.10}$$

在构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的物质元素则随时间 t 而变化，现依次讨论线元、体元与面元的物质导数。

上面所讨论的物质导数，定义见(3.1.2)式。被求导的物理量(…)依赖于质点 $\mathbf{P}$，而在求物质导数(…)˙时，$\mathbf{P}$ 被看作不变(即固定 $\mathbf{P}$)。但今后我们还经常会遇到更复杂的情况，即被求导的物理量不仅依赖于质点 $\mathbf{P}$，而且还依赖于某一线元 $d\mathbf{P}$ 或面元 $d\overset{\langle}{\mathbf{A}}$。如果我们在对此物理量(…)求导时，不仅固定 $\mathbf{P}$ 而且也固定 $d\mathbf{P}$ 或 $d\overset{\langle}{\mathbf{A}}$，这种物质导数称为"固化"物质导数①。在求固化物质导数时，实际上是把线元 $d\mathbf{P}$ 或面元 $d\overset{\langle}{\mathbf{A}}$ 想象成固结于变形体上，即把线元或面元想象成"物质"的。为了强调这一"固化"的意思，同时为了避免与一般的物质导数相混淆，我们引进一个相应的对时间 t 求导的记号：

$$\frac{\tilde{\partial}(\cdots)}{\tilde{\partial}t}=\frac{\partial(\cdots)}{\partial t}\Big|_{\mathbf{P},d\mathbf{P}\text{ 或 }d\overset{\langle}{\mathbf{A}}\text{ 或 }dV} \tag{3.2.11}$$

今后在不致引起混淆的时候，我们有时也用(…)˙来表示(3.2.11)式所示的固化物质导数。例如(3.2.10)式与下面的(3.2.12)式。

1. 线元的物质导数

由线元变换公式(1.3.11) $d\mathbf{p}=\overset{\times}{\mathbf{D}}\cdot d\mathbf{P}$，把 $d\mathbf{P}$ 看作不变，按上面的(3.2.11)对时间 t 求固化导数后，利用(3.2.5)与(3.2.3)式，得到

---

① 参考程昶，黄克智：固化物质导数与标架旋率，力学学报，19(1987)。

$$\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}(d\mathbf{p}) = \dot{\overline{d\mathbf{p}}} = \dot{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}} \cdot d\mathbf{P} = \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{P} = \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}} \cdot d\mathbf{p} \tag{3.2.12a}$$

故

$$\dot{\overline{d\,\mathbf{p}}} = (\mathbf{v}\overset{\rangle}{\nabla}) \cdot d\mathbf{p} = d\mathbf{v} = d\dot{\mathbf{p}} \tag{3.2.12b}$$

因为

$$d\mathbf{p} = dx^i \mathbf{g}_i = dX^A \hat{\mathbf{g}}_A$$

线元的 dX^A 不随时间 t 而变化（在对线元 $d\mathbf{p}$ 求固化物质导数时），$\hat{\mathbf{g}}_A$ 为固结于介质中的矢量（或称随体矢量），将上式代入 (3.2.12a) 式后，得

$$\dot{\hat{\mathbf{g}}}_A = \frac{d\hat{\mathbf{g}}_A}{dt} = \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{g}}_A = (\mathbf{v}\overset{\rangle}{\nabla}) \cdot \hat{\mathbf{g}}_A \tag{3.2.13}$$

这就是(3.1.13r)式。(3.2.12a)的分量形式为

$$\frac{D(dx^i)}{Dt} = v^i_{;r} x^r_{,M} dX^M = v^i_{;r} dx^r = (d\mathbf{v})^i \tag{3.2.12c}$$

若将 $dx^i = x^i_{,M} dX^M$ 代入，则由上式可得到(3.2.13)式的分量形式

$$\frac{Dx^i_{,M}}{Dt} = v^i_{;r} x^r_{,M} \tag{3.2.13$'$}$$

这就是上面的(3.2.5e)式。

2. 体元的物质导数

预备知识： 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为任意三个非共面矢量，$\mathbf{B}$ 为任意二阶张量，则必有

$$\mathscr{I}_1^{\mathbf{B}} = \frac{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{a}) \times \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{a} \times (\mathbf{B}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{c})}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]} \tag{3.2.14}$$

式中 $\mathscr{I}_1^{\mathbf{B}}$ 为张量 $\mathbf{B}$ 的第一主不变量。

证 (3.2.14)式右端的

$$分子 = \varepsilon_{ijk}(B^i_{\cdot r}a^r b^j c^k + a^i B^j_{\cdot r} b^r c^k + a^i b^j B^k_{\cdot r} c^r)$$

$$= (\varepsilon_{rjk}B^r_{\cdot i} + \varepsilon_{irk}B^r_{\cdot j} + \varepsilon_{ijr}B^r_{\cdot k})a^i b^j c^k$$

$$= B^r_{\cdot r}\varepsilon_{ijk}a^i b^j c^k = \mathscr{I}^B_1[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$$

解出 $\mathscr{I}^B_1$ 后即为(3.2.14)式。这里曾利用等式

$$\varepsilon_{rjk}B^r_{\cdot i} + \varepsilon_{irk}B^r_{\cdot j} + \varepsilon_{ijr}B^r_{\cdot k} = B^r_{\cdot r}\varepsilon_{ijk}$$

此式对于 $i=1$, $j=2$, $k=3$ 显然成立。同时两端对于 i, j, k 中的任意两个指标为反对称，因此此式对于任意的 i, j, k 成立。

[证毕]

今考虑在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中由任意三个线元 $\underset{1}{d}\mathbf{P}$, $\underset{2}{d}\mathbf{P}$, $\underset{3}{d}\mathbf{P}$ 构成的体元

$$dV = [\underset{1}{d}\mathbf{P}\ \underset{2}{d}\mathbf{P}\ \underset{3}{d}\mathbf{P}]$$

在构形 $\mathscr{R}(t)$ 中，这体元变成

$$[dv = \underset{1}{d}\mathbf{p}\ \underset{2}{d}\mathbf{p}\ \underset{3}{d}\mathbf{p}]$$

由(1.4.5)式

$$dv = \mathscr{I}\,dV$$

式中 $\mathscr{I}$ 为体积比，见(2.4.6)式。将上式对时间 t 求固化物质导数，即把体元 dv 想像成"固化"于变形体对时间 t 的导数，因此

$$\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}(dv) = \overset{\cdot}{\overline{dv}} = \dot{\mathscr{I}}\,dV$$

但利用线元导数 (3.2.11a) 式，可得。

$$\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}(dv) = \overset{\cdot}{\overline{dv}} = \overset{\cdot}{\overline{[\underset{1}{d}\mathbf{p},\ \underset{2}{d}\mathbf{p},\ \underset{3}{d}\mathbf{p}]}}$$

$$= (\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\underset{1}{d}\mathbf{p})\times\underset{2}{d}\mathbf{p}\cdot\underset{3}{d}\mathbf{p}$$

$$+\underset{1}{d}\mathbf{p}\times(\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\underset{2}{d}\mathbf{p})\cdot\underset{3}{d}\mathbf{p}+\underset{1}{d}\mathbf{p}\times\underset{2}{d}\mathbf{p}\cdot(\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\underset{3}{d}\mathbf{p})$$

再利用(3.2.14)式，上式可化为

$$\overline{dv}^{\cdot} = \mathscr{J}_1^L[\underset{1}{d\mathbf{p}}\,\underset{2}{d\mathbf{p}}\,\underset{3}{d\mathbf{p}}]$$

$$= \mathscr{J}_1^L dv = (\operatorname{div}\mathbf{v})dv = \mathscr{J}_1^L \mathscr{J}\, dV \qquad (3.2.15)$$

式中 $\mathscr{J}_1^L = \operatorname{div}\mathbf{v}$ 为速度梯度张量 $\overset{\gg}{\mathbf{L}}$ 的第一主不变量。于是

$$\dot{\mathscr{J}} = \mathscr{J}_1^L \mathscr{J} = \mathscr{J}\operatorname{div}\mathbf{v} \qquad (3.2.16)$$

3. 面元的物质导数。

预备知识 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 为任意两个矢量，$\mathbf{B}$ 为任意二阶张量，则必有

$$(\mathbf{B}\cdot\mathbf{a})\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times(\mathbf{B}\cdot\mathbf{b}) = \mathscr{J}_1^B\mathbf{a}\times\mathbf{b} - \mathbf{B}^*\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \qquad (3.2.17)$$

证 式(3.2.14)可写为

$$\{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{a})\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times(\mathbf{B}\cdot\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{B}\}\cdot\mathbf{c}$$
$$= \mathscr{J}_1^B(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$$

因为 $\mathbf{c}$ 为任意，故有

$$(\mathbf{B}\cdot\mathbf{a})\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times(\mathbf{B}\cdot\mathbf{b}) = \mathscr{J}_1^B(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) - \mathbf{B}^*\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

[证毕]

今设在构形 $\kappa(t)$ 中由任意两个线元 $\underset{4}{d\mathbf{p}}$ 与 $\underset{5}{d\mathbf{p}}$ 构成的面元为

$$d\vec{\mathbf{a}} = \underset{4}{d\mathbf{p}} \times \underset{5}{d\mathbf{p}}$$

则利用线元导数(3.2.12a)式与上面的(3.2.17)式，同时以 $\tilde{\partial}(d\vec{\mathbf{a}})/\tilde{\partial}t$ 表示把 $d\vec{\mathbf{a}}$ 想象成固化于变形体对时间 t 的导数，即面元 $d\vec{\mathbf{a}}$ 的固化物质导数(见(3.2.11)式)：

$$\frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial}t}(d\vec{\mathbf{a}}) = \overline{d\vec{\mathbf{a}}}^{\cdot} = \overline{\underset{4}{d\mathbf{p}}}^{\cdot} \times \underset{5}{d\mathbf{p}} + \underset{4}{d\mathbf{p}} \times \overline{\underset{5}{d\mathbf{p}}}^{\cdot}$$

$$= (\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\underset{4}{d\mathbf{p}})\times\underset{5}{d\mathbf{p}} + \underset{4}{d\mathbf{p}}\times(\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\underset{5}{d\mathbf{p}})$$

$$= \mathscr{J}_1^L\underset{4}{d\mathbf{p}}\times\underset{5}{d\mathbf{p}} - \overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^*\cdot(\underset{4}{d\mathbf{p}}\times\underset{5}{d\mathbf{p}})$$

$$= (\mathscr{J}^{L}_{1}\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}} - \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}{}^{*})\cdot d\overset{\rangle}{\mathbf{a}} \tag{3.2.18}$$

习题 3.8 利用面元变换公式(2.4.13)对 t 求固化物质导数以证明(3.2.18)式。

[提示] 利用(3.2.9)与(3.2.16)式。

把上文中的构形 $\mathscr{r}(t)$ 中线元、面元与体元物质导数(3.2.11)，(3.2.18)与(3.2.15)式汇总，并利用(2.3.11)，(2.4.13)与(2.4.5)的变换公式通过构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的物质元素表示，得到

$$\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}(d\mathbf{p}) = \dot{\overline{d\mathbf{p}}} = d\mathbf{v} = \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}\cdot d\mathbf{p} = \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}\cdot d\mathbf{P}$$

$$\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}(d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}) = \dot{\overline{d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}}} = (\mathscr{J}^{L}_{1}\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}} - \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}{}^{*})\cdot d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}$$

$$= (\mathscr{J}^{L}_{1}\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{I}} - \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}{}^{*})\cdot \mathscr{J}\overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^{*}\cdot d\overset{\langle}{\mathbf{A}} \tag{3.2.19}$$

$$\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}(dv) = \dot{\overline{dv}} = \mathscr{J}^{L}_{1}dv = \mathscr{J}^{L}_{1}\mathscr{J}dV$$

由上式可知，速度梯度 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}$ 是求得构形 $\mathscr{r}(t)$ 的各物质元素 $d\mathbf{p}$，$d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}$，$dv$ 的对时间变化率的必要且充分因素。各物质元素对时间的变化率与物质元素在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 的状态无关。因此 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}$ 反映了物质元素离开 $\mathscr{r}(t)$ 构形（即以 $\mathscr{r}(t)$ 构形为基准）的速率。但由(3.2.19)式的最右端可看出，如果以构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 为基准（即已知 $d\mathbf{P}$，$d\mathbf{A}$，dV），则为了求各物质元素对时间的变化率，只有 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}$ 还不够，还必须知道变形梯度 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}$。

若以 $dv = d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}\cdot d\mathbf{p}$ 表示以面元 $d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}$ 为横截面，$d\mathbf{p}$ 为斜高的柱体体积，则 $\dot{\overline{dv}} = \dot{\overline{d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}}}\cdot d\mathbf{p} + d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}\cdot\dot{\overline{d\mathbf{p}}}$。容易验证(3.2.19)式满足这个等式。

§ 3.3　变形率、物质旋率及其它旋率

一、长度率(或伸长率)

令 $d\mathbf{p}$ 为构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的线元，沿它方向的单位矢量

$$\mathbf{n}=\frac{d\,\mathbf{p}}{|d\,\mathbf{p}|}$$

定义沿 $\mathbf{n}$ 方向的长度率为在构形 $\mathscr{R}(t)$ 中沿 $\mathbf{n}$ 方向每单位长度的变化率，即

$$d_{\mathbf{n}}=\frac{1}{|d\,\mathbf{p}|}\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}|d\mathbf{p}|=\frac{\dot{\overline{|d\,\mathbf{p}|}}}{|d\,\mathbf{p}|}\tag{a}$$

则利用(3.2.11)式可得

$$\begin{aligned}d_{\mathbf{n}}&=\frac{2|d\,\mathbf{p}|\dot{\overline{|d\,\mathbf{p}|}}}{2|d\mathbf{p}|^2}=\frac{\dot{\overline{|d\mathbf{p}|^2}}}{2|d\mathbf{p}|^2}=\frac{\dot{\overline{d\mathbf{p}\cdot d\mathbf{p}}}}{2|d\mathbf{p}|^2}\\&=\frac{\dot{\overline{d\mathbf{p}}}\cdot d\mathbf{p}+d\,\mathbf{p}\cdot\dot{\overline{d\,\mathbf{p}}}}{2|d\mathbf{p}|^2}\\&=\frac{(\overset{\Rightarrow}{\mathbf{L}}\cdot d\mathbf{p})\cdot d\mathbf{p}+d\mathbf{p}\cdot(\overset{\Rightarrow}{\mathbf{L}}\cdot d\mathbf{p})}{2|d\mathbf{p}|^2}\\&=\frac{d\mathbf{p}\cdot(\overset{\Rightarrow}{\mathbf{L}}{}^*+\overset{\Rightarrow}{\mathbf{L}})\cdot d\mathbf{p}}{2|d\mathbf{p}|^2}=\mathbf{n}\cdot\frac{\overset{\Rightarrow}{\mathbf{L}}+\overset{\Rightarrow}{\mathbf{L}}{}^*}{2}\cdot\mathbf{n}\end{aligned}$$

故

$$d_{\mathbf{n}}=\mathbf{n}\cdot\overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{n}\tag{3.3.1}$$

式中 $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}}$ 为速度梯度张量 $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{L}}$ 对称化的结果：

$$\overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}}=\frac{1}{2}(\overset{\Rightarrow}{\mathbf{L}}+\overset{\Rightarrow}{\mathbf{L}}{}^*)=d_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\tag{3.3.2}$$

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i;j} + v_{j;i})$$

$\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 称为变形率(或 Euler 变形率)或伸长率张量，$d_{\mathbf{n}}$ 为 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 沿 $\mathbf{n}$ 方向的法分量。因此决定构形 $\kappa(t)$ 内各方向长度变化率的只是速度梯度 $\overset{\gg}{\mathbf{L}}$ 的对称部分 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$。以 $\underset{1}{\mathbf{n}}^d$，$\underset{2}{\mathbf{n}}^d$，$\underset{3}{\mathbf{n}}^d$ 表示对称张量 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 的主方向，则

$$\overset{\gg}{\mathbf{d}} = \underset{1}{d}\underset{1}{\mathbf{n}}^d\underset{1}{\mathbf{n}}^d + \underset{2}{d}\underset{2}{\mathbf{n}}^d\underset{2}{\mathbf{n}}^d + \underset{3}{d}\underset{3}{\mathbf{n}}^d\underset{3}{\mathbf{n}}^d \tag{3.3.3}$$

$$\overset{\gg}{\mathbf{d}} \cdot \underset{i}{\mathbf{n}}^d = \underset{i}{d}\underset{i}{\mathbf{n}}^d \qquad (\text{不对 } i \text{ 取和})$$

式中 $\underset{i}{d}$ 为主长度率或主伸长率。§ 2.6 曾证明：对称张量的法分量沿主方向取极值(或驻值)。

将速度梯度 $\overset{\gg}{\mathbf{L}}$ 进行加法分解：

$$\overset{\gg}{\mathbf{L}} = \frac{1}{2}(\overset{\gg}{\mathbf{L}} + \overset{\gg}{\mathbf{L}}^*) + \frac{1}{2}(\overset{\gg}{\mathbf{L}} - \overset{\gg}{\mathbf{L}}^*) = \overset{\gg}{\mathbf{d}} + \overset{\gg}{\mathbf{w}} \tag{3.3.4}$$

式中 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 已见(3.3.2)式，而

$$\overset{\gg}{\mathbf{w}} = \frac{1}{2}(\overset{\gg}{\mathbf{L}} - \overset{\ll}{\mathbf{L}}^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\overset{\rightarrow}{\nabla} - \overset{\rightarrow}{\nabla}\mathbf{v}) = w_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j \tag{3.3.5}$$

$$w_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i;j} - v_{j;i})$$

$\overset{\gg}{\mathbf{w}}$ 为反对称张量，以后将证明 $\overset{\gg}{\mathbf{w}}$ 对应于转动。在讨论 $\overset{\gg}{\mathbf{w}}$ 的意义以前，先来求体积率、面积率和剪切率，我们将看到，它们也都只与 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 有关，而与 $\overset{\gg}{\mathbf{w}}$ 无关。

二、体积率

定义体积率为在构形 $\kappa(t)$ 每单位体积的变化率；由(3.2.15)

式它等于

$$\frac{1}{dv}\frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial} t}(dv)=\frac{\overline{\dot{dv}}}{dv}=\mathscr{I}_1^L=\mathscr{I}_1^d+\mathscr{I}_1^w=\mathscr{I}_1^d \tag{3.3.6}$$

式中反对称张量 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{w}}$ 的第一主不变量 $\mathscr{I}_1^w=0$。因此体积率等于变形率张量 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{d}}$ 的第一不变量 $\mathscr{I}_1^d$，它只与 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{d}}$ 有关，而与 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{w}}$ 无关。

三、面积率

定义面积率为在 $\varkappa(t)$ 构形垂直于 $\mathbf{n}$ 方向的每单位面积的变化率。利用(3.2.18)式其值可计算如下:

$$\frac{1}{|d\vec{\mathbf{a}}|}\frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial} t}|d\vec{\mathbf{a}}|=\frac{\overline{\dot{|d\vec{\mathbf{a}}|}}}{|d\vec{\mathbf{a}}|}=\frac{\overline{\dot{d\vec{\mathbf{a}}}}\cdot d\vec{\mathbf{a}}+d\vec{\mathbf{a}}\cdot\overline{\dot{d\vec{\mathbf{a}}}}}{2|d\vec{\mathbf{a}}|^2}$$

$$=\frac{[(\mathscr{I}_1^L\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}-\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{L}}^*)\cdot d\vec{\mathbf{a}}]\cdot d\vec{\mathbf{a}}+d\vec{\mathbf{a}}\cdot[(\mathscr{I}_1^L\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}-\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{L}}^*)\cdot d\vec{\mathbf{a}}]}{2|d\vec{\mathbf{a}}|^2}$$

$$=\frac{d\vec{\mathbf{a}}\cdot[\mathscr{I}_1^L\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}-\frac{1}{2}(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{L}}+\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{L}}^*)]\cdot d\vec{\mathbf{a}}}{|d\vec{\mathbf{a}}|^2}$$

因此

$$\frac{\overline{\dot{|d\mathbf{a}|}}}{|d\mathbf{a}|}=\mathbf{n}\cdot[\mathscr{I}_1^d\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}-\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{d}}]\cdot\mathbf{n}=\mathscr{I}_1^d-d_n \tag{3.3.7}$$

式中 $\mathbf{n}=d\vec{\mathbf{a}}/|d\vec{\mathbf{a}}|$ 为沿面元 $d\vec{\mathbf{a}}$ 法线方向的单位矢量。由(3.3.7)式可知，面积率等于体积率减去沿面元法向的长度率。因此，面积率也只与 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{d}}$(以及面元的法向 $\mathbf{n}$)有关，而与 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{w}}$ 无关。

四、剪切率

以 $\mathbf{n}$ 表示构形 $\varkappa(t)$ 中沿线元 $d\mathbf{p}$ 方向的单位矢量，则利用

(3.2.11)与(3.3.1)前面的 (a) 式可计算 $\mathbf{n}$ 的变化率:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = \dot{\mathbf{n}} &= \overline{\left(\frac{d\mathbf{p}}{|d\mathbf{p}|}\right)}^{\cdot} = \frac{\overline{d\mathbf{p}}^{\cdot}}{|d\mathbf{p}|} - \frac{\overline{|d\mathbf{p}|}^{\cdot}}{|d\mathbf{p}|^2} d\mathbf{p} \\
&= \frac{\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{L}} \cdot d\mathbf{p}}{|d\mathbf{p}|} - \frac{d_n}{|d\mathbf{p}|} d\mathbf{p} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{n} - d_n \mathbf{n} \\
&= (\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{L}} - d_n \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{n} \qquad (3.3.8)
\end{aligned}
$$

上式右端第一项表示若 $\mathbf{n}$ 固结于物体中时它的变化率,右端第二项(不带减号)表示 $\mathbf{n}$ 的长度变化率,二者相减,其差即表示 $\mathbf{n}$ 的方向变化率。

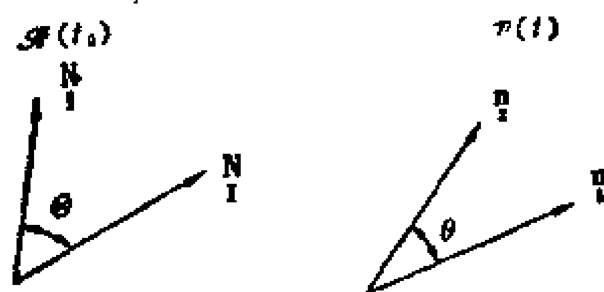


图 3.1

图 3.1 表示在构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的两个方向 $\mathbf{n}_1$ 与 $\mathbf{n}_2$, 其夹角为 $\theta = \Theta - \gamma$, γ 为从构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 到 $\mathscr{R}(t)$ 角度 Θ 的减小值。

$$\cos\theta = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$$

利用(3.3.8)式可计算其变化率:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\cos\theta) = \overline{\cos\theta}^{\cdot} &= \overline{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}^{\cdot} = \dot{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_1 \cdot \dot{\mathbf{n}}_2 \\
&= (\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{n}_1 - d_{n_1} \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{n}_2 \\
&\quad + \mathbf{n}_1 \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{n}_2 - d_{n_2} \mathbf{n}_2) \\
&= 2\mathbf{n}_1 \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_2 - (d_{n_1} + d_{n_2}) \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \qquad (3.3.9)
\end{aligned}
$$

式中

$$\dot{\overline{\cos\theta}} = -\dot{\theta}\sin\theta - \dot{\gamma}\sin\theta \tag{3.3.10}$$

故剪切率 $\dot{\gamma}$ 只与 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{d}}$(以及两个方向 $\underset{1}{\mathbf{n}}$ 与 $\underset{2}{\mathbf{n}}$) 有关,而与 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{w}}$ 无关。

若在构形 $\kappa(t)$ 中两方向互相垂直, $\underset{1}{\mathbf{n}} \perp \underset{2}{\mathbf{n}}$, $\underset{1}{\mathbf{n}} \cdot \underset{2}{\mathbf{n}} = 0$, $\theta = \pi/2$, $\sin\theta = 1$, 则(3.3.9)式成为

$$\dot{\gamma} = 2\underset{1}{\mathbf{n}} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{d}} \cdot \underset{2}{\mathbf{n}} \tag{3.3.11}$$

$\underset{1}{\mathbf{n}} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{d}} \cdot \underset{2}{\mathbf{n}}$ 称为 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{d}}$ 在 $\underset{1}{\mathbf{n}}$ 与 $\underset{2}{\mathbf{n}}$ 方向的剪分量。

综上所述,长度率、体积率、面积率与剪切率均只由变形率张量 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{d}}$ 决定,而与 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{w}}$ 无关。可以这样说: $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{d}}$ 代表纯变形的变化率;如(3.3.3)式所示,它表示沿着主方向以主长度率的速度伸长(或缩短)。

五、旋率

我们先来讨论(3.3.4)式的加法分解的意义。图 3.2 示在 t 时刻的构形 $\kappa(t)$ 中的线元 $d\mathbf{p}(\mathbf{P}, t)$,在 $t+\Delta t$ 时刻的构形 $\kappa(t+\Delta t)$ 中,它变成 $d\mathbf{p}(\mathbf{P}, t+\Delta t)$。由图可得:

$$d\mathbf{p}(\mathbf{P}, t+\Delta t) = d\mathbf{p}(\mathbf{P}, t) + \Delta t\, d\mathbf{v}$$

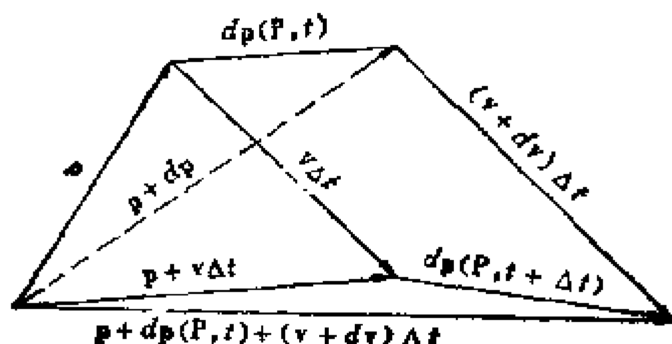


图 3.2

式中由(3.2.11)及(3.3.4)式，

$$d\mathbf{v} = \dot{\overline{d\,\mathbf{p}}} = \overset{\Rightarrow}{\mathbf{L}} \cdot d\mathbf{p} = (\overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}} + \overset{\Rightarrow}{\mathbf{w}}) \cdot d\mathbf{p} \qquad (3.3.12)$$

因此

$$\begin{aligned} d\mathbf{p}(\mathbf{P},\, t+\Delta t) &= \mathbf{I} \cdot d\mathbf{p}(\mathbf{P},\, t) \\ &\quad + \Delta t\, \overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}} \cdot d\mathbf{p} + \Delta t\, \overset{\Rightarrow}{\mathbf{w}} \cdot d\mathbf{p} \end{aligned} \qquad (3.3.13)$$

式中右端第一项表示平移，第二项表示小变形，第三项表示小转动。

由张量分析知

$$\overset{\Rightarrow}{\mathbf{w}} \cdot d\,\mathbf{p} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times d\mathbf{p}$$

式中 $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ 为反对称张量 $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{w}}$ 的反偶矢量，$\vec{\boldsymbol{\omega}}$ 与 $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{w}}$ 的关系为

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{1}{2}\, \overset{\Rrightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}} : \overset{\Rightarrow}{\mathbf{w}}, \quad \overset{\Rightarrow}{\mathbf{w}} = -\, \overset{\Rrightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

故

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{\omega}} &= -\frac{1}{2}\, \overset{\Rrightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}} : \frac{1}{2}\,(\mathbf{v}\vec{\nabla} - \vec{\nabla}\mathbf{v}) = -\frac{1}{2}\, \overset{\Rrightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}} : (\mathbf{v}\vec{\nabla}) \\ &= -\frac{1}{2}\, \mathbf{v} \times \vec{\nabla} = \frac{1}{2}\, \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{v} \end{aligned} \qquad (3.3.14)$$

$\vec{\boldsymbol{\omega}}$ 表示在 **P** 点附近介质旋转的角速度，故 $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{w}}$ 称为物质旋率，或简称旋率，其反偶矢量 $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ 称为涡量。

因此，在(3.3.12)式中 $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{w}} \cdot d\mathbf{p}$ 表示 $\dot{\overline{d\,\mathbf{p}}}$ 中的转动部分，$\overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}} \cdot d\mathbf{p}$ 表示纯变形部分。但要注意，在纯变形的这部分中，一般只有 $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}}$ 的主方向保持不变，而非主方向仍有转动(只有在例外情况下，例如 $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}}$ 为球形张量时，任何方向都不转动)。

附带指出，由于(3.2.12)式中 dX^A 不随时间 t 变化，因此 $\hat{\mathbf{g}}_A$ 为固结于介质中的矢量，在(3.3.12)与(3.3.13)式中将 $d\mathbf{p}$ 改为 $\hat{\mathbf{g}}_A$

则式仍成立。例如(3.3.13)式，$d\mathbf{p}$ 改为 $\hat{\mathbf{g}}_A$，令 $\Delta t \to 0$，可得

$$\frac{d\hat{\mathbf{g}}_A}{dt} = \overset{\gg}{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{g}}_A + \overset{\gg}{\mathbf{w}} \cdot \hat{\mathbf{g}}_A \tag{3.3.13$'$}$$

这也就是(3.2.13)式。

习题 3.9 由(3.3.8)式证明当 $\underset{i}{\mathbf{n}}^d$ $(i = 1, 2, 3)$ 为沿变形率张量 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 的主方向的单位矢量时

$$\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}\underset{i}{\mathbf{n}}^d = \frac{1}{2}(\overset{>}{\nabla} \times \mathbf{v}) \times \underset{i}{\mathbf{n}}^d$$

[提示] 利用(3.3.8)与(3.3.3)式，可得

$$\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}\underset{i}{\mathbf{n}}^d = \overset{\gg}{\mathbf{w}} \cdot \underset{i}{\mathbf{n}}^d$$

注意，一般说来，对于一定的物质质点 $\mathbf{P}$，$\underset{i}{\mathbf{n}}^d$ 相对于构形是随时间而变化的，换句话说，在不同的时刻 $\underset{i}{\mathbf{n}}^d$ 方向不是由相同的质点构成的。因此这里要注意区别将 $\underset{i}{\mathbf{n}}^d$ 想象成固化于变形体中时的固化物质导数 $\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}\underset{i}{\mathbf{n}}^d$ 与一般的物质导数

$$\frac{d}{dt}\underset{i}{\mathbf{n}}^d = \left(\frac{\partial}{\partial t}\underset{i}{\mathbf{n}}^d\right)_{\mathbf{P}}$$

这后一导数见后面的$(3.3.37)_3$式。

六、变形率 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 与旋率 $\overset{\gg}{\mathbf{w}}$ 按物质描述法在 Lagrange 坐标系 $\{X^A, t\}$ 中基矢量的分解式

变形率 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 与旋率 $\overset{\gg}{\mathbf{w}}$ 都是构形 $\kappa(t)$ 中的张量。按 Euler 坐标系 $\{x^i\}$ 基矢量的分解式已见(3.3.2)与(3.3.5)式。它们也可以按 Lagrange 坐标系 $\{X^A, t\}$ 的基矢量 $\hat{\mathbf{g}}_A$，$\hat{\mathbf{g}}^A$ 分解。$\mathbf{v}$ 与

$$\overset{\gg}{\mathbf{L}} = \mathbf{v}\overset{>}{\nabla}$$

的这个分解式已见(3.2.1)与(3.2.2)。因此可进一步得 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 与 $\overset{\gg}{\mathbf{w}}$ 的分解式：$\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 的分解式为

$$\overset{\gg}{\mathbf{d}} = \frac{1}{2}(\overset{\gg}{\mathbf{L}} + \overset{\gg}{\mathbf{L}}^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\overset{>}{\nabla} + \overset{>}{\nabla}\mathbf{v}) = \hat{d}_{AB}\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B \qquad (3.3.15)$$

$$= \hat{d}^{AB}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B$$

式中

$$\hat{d}_{AB} = \frac{1}{2}(\hat{v}_{A;B} + \hat{v}_{B;A}) = d_{ij}x^i_{,A}x^j_{,B}$$

$$\hat{d}^{AB} = \frac{1}{2}(\hat{v}^{AB}_{;} + \hat{v}^{BA}_{;}) = d^{ij}X^A_{,i}X^B_{,j} \qquad (3.3.15)'$$

将上式与(3.1.13t, u)式比较，可知

$$\hat{d}_{AB} = \frac{1}{2}\frac{d\hat{g}_{AB}}{dt}$$

$$\hat{d}^{AB} = -\frac{1}{2}\frac{d\hat{g}^{AB}}{dt} \qquad (3.3.15)''$$

$\overset{\gg}{\mathbf{w}}$ 的分解式则为

$$\overset{\gg}{\mathbf{w}} = \frac{1}{2}(\overset{\gg}{\mathbf{L}} - \overset{\gg}{\mathbf{L}}^*)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{v}\overset{>}{\nabla} - \overset{>}{\nabla}\mathbf{v}) = \hat{w}_{AB}\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B \qquad (3.3.16)$$

式中

$$\hat{w}_{AB} = \frac{1}{2}(\hat{v}_{A;B} - \hat{v}_{B;A}) = w_{ij}x^i_{,A}x^j_{,B} \qquad (3.3.16)'$$

同理，角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ 也可以按 Euler 或按 Lagrange 坐标系的基矢量分解：

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\overset{>}{\nabla}\times\mathbf{v} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(\nabla_i v_j)\mathbf{g}_k$$

$$= \frac{1}{2}\hat{\varepsilon}^{ABC}(\hat{\nabla}_A\hat{v}_B)\hat{\mathbf{g}}_C \qquad (3.3.17)$$

七、其它旋率①

我们称 § 2.6 所引进的右伸长张量 $\overset{\ll}{\mathbf{U}}$ 或右 Cauchy-Green 变形张量 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 的主方向为 Lagrange 方向；沿 Lagrange 方向的单位矢量 $\{\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}\}$ $(\Gamma = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$ 称为 Lagrange 标架。类似地，我们称左伸长张量 $\overset{\gg}{\mathbf{V}}$ 或左 Cauchy-Green 变形张量 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}^{-1}$ 的主方向为 Euler 方向；沿 Euler 方向的单位矢量 $\{\underset{\gamma}{\mathbf{n}}\}$ $(\gamma = 1,2,3)$ 称为 Euler 标架。由(2.8.17)式，在 $\mathscr{R}$ 构形中沿 Lagrange 方向的线元经过以 $\overset{\gg\ll}{\mathbf{R}}$ 表示的旋转变成沿 r 构形中的 Euler 方向的线元。

我们研究当物体在运动时某一物质质点 X^A 的邻域。这时 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(t)$ 与 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(t)$ 都是随着时间 t 而变化的单位矢量，而且在不同的时刻 t，$\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(t)$（因而 $\underset{\Gamma}{\mathbf{n}}(t)$）是由不同的物质质点所组成的，也就是说，$\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(t)$ （因而 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(t)$）是非物质的。因此，由(2.8.17)式，实现从 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(t)$ 到 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(t)$ 之变换即正交张量 $\overset{\gg\ll}{\mathbf{R}}(t)$ 也是随时间 t 而变化的：

$$\underset{\gamma}{\overset{>}{\mathbf{n}}}(t) = \overset{\gg\ll}{\mathbf{R}}(t) \cdot \underset{\Gamma}{\overset{<}{\mathbf{N}}}(t), \quad \gamma = \Gamma \tag{3.3.18}$$

在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的张量可以沿 Lagrange 标架分解，例如右伸长张量 $\overset{\ll}{\mathbf{U}}(t)$ 可按(2.6.15)式写成主轴表示的形式：

$$\overset{\ll}{\mathbf{U}}(t) = \overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{1/2}(t) = \underset{\mathrm{I}}{\lambda}(t)\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}(t)\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}(t) + \underset{\mathrm{II}}{\lambda}(t)\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}(t)\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}(t) + \underset{\mathrm{III}}{\lambda}(t)\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}(t)\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}(t)$$

---

① 这一部分内容参考郭仲衡等文"非线性连续介质力学中的主轴法"，力学进展，第 13 卷，第 3 期，1983，273—289 页。

$$= \sum_{\Gamma} \underset{\Gamma}{\lambda}(t)\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(t)\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(t) \tag{3.3.19}$$

式中主长度比 $\underset{\Gamma}{\lambda}(t)$ 也是随时间 t 而变化的。类似地，在构形 $\kappa(t)$ 中的张量可以沿 Euler 标架分解，例如左伸长张量 $\overset{\gg}{\mathbf{V}}(t)$ 可按(2.6.16)式写成主轴表示的形式：

$$\begin{aligned}\overset{\gg}{\mathbf{V}}(t) = \overset{\gg}{\mathbf{c}}^{-1/2}(t) &= \underset{1}{\lambda}(t)\underset{1}{\mathbf{n}}(t)\underset{1}{\mathbf{n}}(t) + \underset{2}{\lambda}(t)\underset{2}{\mathbf{n}}(t)\underset{2}{\mathbf{n}}(t) \\ &\quad + \underset{3}{\lambda}(t)\underset{3}{\mathbf{n}}(t)\underset{3}{\mathbf{n}}(t) \\ &= \sum_{\gamma} \underset{\gamma}{\lambda}(t)\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(t)\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(t)\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

式中，由(2.8.18)式，

$$\underset{\gamma}{\lambda}(t) = \underset{\Gamma}{\lambda}(t), \quad \gamma = \Gamma \tag{3.3.21}$$

至于两点张量则可以同时沿两个标架进行分解，例如变形梯度 $\overset{><}{\mathbf{D}}(t)$，由(2.8.23)式，与正交张量 $\overset{><}{\mathbf{R}}(t)$，由(2.8.21)式：

$$\begin{aligned}\overset{><}{\mathbf{D}}(t) &= \underset{\mathrm{I}}{\lambda}(t)\underset{1}{\mathbf{n}}(t)\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}(t) + \underset{\mathrm{II}}{\lambda}(t)\underset{2}{\mathbf{n}}(t)\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}(t) \\ &\quad + \underset{\mathrm{III}}{\lambda}(t)\underset{3}{\mathbf{n}}(t)\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}(t) \\ &= \sum_{\Gamma} \underset{\Gamma}{\lambda}(t)\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(t)\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(t)\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

$$\begin{aligned}\overset{><}{\mathbf{R}}(t) &= \underset{1}{\mathbf{n}}(t)\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}(t) + \underset{2}{\mathbf{n}}(t)\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}(t) + \underset{3}{\mathbf{n}}(t)\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}(t) \\ &= \sum_{\Gamma} \underset{\gamma}{\mathbf{n}}(t)\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(t)\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

在构形 $\kappa(t)$ 中沿变形率（或伸长率）$\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 主方向的单位矢量 $\{\underset{\gamma}{\mathbf{n}}^d\}$ 称为伸长率标架。由(3.3.3)式，伸长率的主轴表示为

$$\overset{\gg}{\mathbf{d}}(t) = \underset{1}{d}(t)\underset{1}{\mathbf{n}}^d(t)\underset{1}{\mathbf{n}}^d(t) + \underset{2}{d}(t)\underset{2}{\mathbf{n}}^d(t)\underset{2}{\mathbf{n}}^d(t)$$

$$+\underset{3}{d}(t)\underset{3}{\mathbf{n}}^{d}(t)\underset{3}{\mathbf{n}}^{d}(t)=\sum_{\gamma}\underset{\gamma}{d}(t)\underset{\gamma}{\mathbf{n}}^{d}(t)\underset{\gamma}{\mathbf{n}}^{d}(t) \tag{3.3.24}$$

显然,同 Euler 标架的单位矢量 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(t)$ 一样,伸长率标架的单位矢量 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}^{d}(t)$ 也是随时间 t 而变化的,而且也是非物质的。

我们在参考构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中选择一组固定的互相正交的单位矢量 $\{\underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{i}}}\}$ $(\Gamma=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})$,称为背景标架。以 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{Lag}}(t)$, $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{Eul}}(t)$ 与 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}{}^{d}(t)$ 各表示从背景标架 $\{\underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{i}}}\}$ 到 Lagrange 标架 $\{\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}\}$, Euler 标架 $\{\underset{\gamma}{\mathbf{n}}\}$ 与伸长率标架 $\{\underset{\gamma}{\mathbf{n}}^{d}\}$ 的正交变换:

$$\begin{aligned}
\underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{N}}}(t)&=\overset{\langle\langle}{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{Lag}}(t)\cdot\underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{i}}}\\
\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}(t)&=\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{Eul}}(t)\cdot\underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{i}}}\qquad(\gamma=\Gamma)\\
\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}{}^{d}(t)&=\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}{}^{d}(t)\cdot\underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{i}}}\qquad(\gamma=\Gamma)
\end{aligned}\tag{3.3.25}$$

将(3.3.25)之前两式代入(3.3.18),可得关系式:

$$\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{Eul}}(t)=\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}(t)\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{Lag}}(t)\tag{3.3.26}$$

(3.3.25)式之逆为

$$\begin{aligned}
\underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{i}}}&=\overset{\langle\langle}{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{Lag}}(t)^{*}\cdot\underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{N}}}(t)\\
&=\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{Eul}}(t)^{*}\cdot\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}(t)\qquad(\gamma=\Gamma)\\
&=\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}{}^{d}(t)^{*}\cdot\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}{}^{d}(t)\qquad(\gamma=\Gamma)
\end{aligned}\tag{3.3.27}$$

由(3.3.25)式可得到 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{Lag}}(t)$, $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{Eul}}(t)$ 与 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}{}^{d}(t)$ 的主轴表示形式:

$$\begin{aligned}
\overset{\langle\langle}{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{Lag}}(t)&=\sum_{\Gamma}\underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{N}}}(t)\underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{i}}}\\
\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{Eul}}(t)&=\sum_{\Gamma}\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}(t)\underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{i}}}\qquad(\gamma=\Gamma)
\end{aligned}\tag{3.3.28}$$

$$\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}^d(t) = \sum_{\Gamma} \overset{\rangle}{\mathbf{n}}_{\gamma}^d(t) \overset{\langle}{\mathbf{i}}_{\Gamma} \quad (\gamma = \Gamma)$$

求 (3.3.25) 式三个标架的单位矢量对时间 t 的导数，然后将(3.3.27)式代入 $\overset{\langle}{\mathbf{i}}_{\Gamma}$，得到

$$\frac{d}{dt}\overset{\langle}{\mathbf{N}}_{\Gamma}(t) = \overset{\langle\langle}{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Lag}}(t) \cdot \overset{\langle}{\mathbf{N}}_{\Gamma}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\overset{\rangle}{\mathbf{n}}_{\gamma}(t) = \overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Eul}}(t) \cdot \overset{\rangle}{\mathbf{n}}_{\gamma}(t) \qquad (3.3.29)$$

$$\frac{d}{dt}\overset{\rangle}{\mathbf{n}}_{\gamma}^d(t) = \overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}^d(t) \cdot \overset{\rangle}{\mathbf{n}}_{\gamma}^d(t)$$

式中 $\overset{\langle\langle}{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Lag}}(t)$ 称为 Lagrange 标架旋率（简称 Lagrange 旋率），$\overset{\langle\langle}{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Eul}}(t)$ 称为 Euler 标架旋率(简称 Euler 旋率)，$\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}^d(t)$ 称为伸长率标架旋率：

$$\overset{\langle\langle}{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Lag}}(t) = \dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{R}}}^{\mathrm{Lag}}(t) \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{R}}^{\mathrm{Lag}}(t)^*$$

$$\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Eul}}(t) = \dot{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}}^{\mathrm{Eul}}(t) \cdot \overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}^{\mathrm{Eul}}(t)^* \qquad (3.3.30)$$

$$\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}^d(t) = \dot{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}}^d(t) \cdot \overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}^d(t)^*$$

易证(3.3.30)式中任一个 $\boldsymbol{\Omega}^{\cdots}(t)$ 都是反对称张量。证明如下：以 $\mathbf{R}^{\cdots}(t)$ 表示(3.3.30)中任一式出现于右端的正交张量，故

$$\mathbf{R}^{\cdots}(t) \cdot \mathbf{R}^{\cdots}(t)^* = \mathbf{I}$$

将上式对时间 t 求导，得

$$\dot{\mathbf{R}}^{\cdots}(t) \cdot \mathbf{R}^{\cdots}(t)^* + \mathbf{R}^{\cdots}(t) \cdot \dot{\mathbf{R}}^{\cdots}(t)^* = \mathbf{0}$$

此式可写作

$$\boldsymbol{\Omega}^{\cdots}(t) + \boldsymbol{\Omega}^{\cdots}(t)^* = \mathbf{0}，\text{即 } \boldsymbol{\Omega}^{\cdots}(t) = -\boldsymbol{\Omega}^{\cdots}(t)^* \qquad (3.3.31)$$

式中，如(3.3.30)式：

$$\boldsymbol{\Omega}^{\cdots}(t) = \dot{\mathbf{R}}^{\cdots}(t) \cdot \mathbf{R}^{\cdots}(t)^*$$

这里应强调指出,(3.3.29)第三式的导数 $d\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}{}^d(t)/dt$ 和习题 3.9 [提示]中的"物质"导数 $\tilde{d}\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}{}^d(t)/\tilde{d}t$ 不应混淆,也就是说伸长率标架旋率 $\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^d(t)$ 和物质旋率 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{w}}(t)$ 是不相同的①:

$$\frac{d}{dt}\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}{}^d(t)=\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^d(t)\cdot\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}{}^d(t)$$

$$\neq\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}{}^d(t)=\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{w}}(t)\cdot\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}{}^d(t)$$

$$\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^d(t)\neq\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{w}}(t) \tag{3.3.32}$$

利用(3.3.30)式各旋率的反偶矢量:

$$\overset{\langle}{\boldsymbol{\omega}}{}^{\mathrm{Lag}}(t)=-\frac{1}{2}\overset{\langle\langle\langle}{\boldsymbol{\epsilon}}:\overset{\langle\langle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{\mathrm{Lag}}(t)$$

$$\overset{\rangle}{\boldsymbol{\omega}}{}^{\mathrm{Eul}}(t)=-\frac{1}{2}\overset{\rangle\rangle\rangle}{\boldsymbol{\epsilon}}:\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{\mathrm{Eul}}(t) \tag{3.3.33}$$

$$\overset{\rangle}{\boldsymbol{\omega}}{}^d(t)=-\frac{1}{2}\overset{\rangle\rangle\rangle}{\boldsymbol{\epsilon}}:\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^d(t)$$

则单位矢量对时间求导的公式(3.3.29)可写作

$$\frac{d}{dt}\underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{N}}}(t)=\overset{\langle}{\boldsymbol{\omega}}{}^{\mathrm{Lag}}(t)\times\underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{N}}}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}(t)=\overset{\rangle}{\boldsymbol{\omega}}{}^{\mathrm{Eul}}(t)\times\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}(t) \tag{3.3.34}$$

$$\frac{d}{dt}\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}{}^d(t)=\overset{\rangle}{\boldsymbol{\omega}}{}^d(t)\times\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}{}^d(t)$$

由(3.3.29)式,可得各旋率的下列表示:

---

① 这一结论与郭仲衡等"非线性连续介质力学中的主轴法"(力学进展,第13卷,第3期,1983,273－289页)文中(5.24)式的结论不一致。

$$\overset{\langle\langle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{\mathrm{Lag}}(t) = \sum_{\Gamma} \frac{d\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(t)}{dt}\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(t)$$

$$\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{\mathrm{Eul}}(t) = \sum_{\gamma} \frac{d\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(t)}{dt}\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(t) \tag{3.3.35}$$

$$\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{d}(t) = \sum_{\gamma} \frac{d\underset{\gamma}{\mathbf{n}}{}^{d}(t)}{dt}\underset{\gamma}{\mathbf{n}}{}^{d}(t)$$

Lagrange 旋率 $\overset{\langle\langle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{\mathrm{Lag}}(t)$ 可沿 Lagrange 标架分解，Euler 旋率 $\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{\mathrm{Eul}}(t)$ 与伸长率标架旋率 $\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{d}(t)$ 可沿 Euler 标架分解：

$$\overset{\langle\langle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{\mathrm{Lag}}(t) = \sum_{I,J} \Omega^{\mathrm{Lag}}_{(IJ)}(t)\underset{I}{\mathbf{N}}(t)\underset{J}{\mathbf{N}}(t)$$

$$\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{\mathrm{Eul}}(t) = \sum_{i,j} \Omega^{\mathrm{Eul}}_{(ij)}(t)\underset{i}{\mathbf{n}}(t)\underset{j}{\mathbf{n}}(t) \tag{3.3.36}$$

$$\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{d}(t) = \sum_{i,j} \Omega^{d}_{(ij)}(t)\underset{i}{\mathbf{n}}{}^{d}(t)\underset{j}{\mathbf{n}}{}^{d}(t)$$

将上式代入(3.3.29)式后，得到

$$\frac{d}{dt}\overset{\langle}{\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}}(t) = \sum_{I} \Omega^{\mathrm{Lag}}_{(I\Gamma)}(t)\underset{I}{\mathbf{N}}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\overset{\rangle}{\underset{\gamma}{\mathbf{n}}}(t) = \sum_{i} \Omega^{\mathrm{Eul}}_{(i\gamma)}(t)\underset{i}{\mathbf{n}}(t) \tag{3.3.37}$$

$$\frac{d}{dt}\overset{\rangle}{\underset{\gamma}{\mathbf{n}}}{}^{d}(t) = \sum_{i} \Omega^{d}_{(i\gamma)}(t)\underset{i}{\mathbf{n}}{}^{d}(t)$$

实现从 Lagrange 标架到 Euler 标架的转动的变换是正交张量 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}(t)$（见(3.3.18)式）。仿照(3.3.30)式，可以定义一旋率：

$$\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}(t) = \dot{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}}(t) \cdot \overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}(t)^{*} \tag{3.3.38}$$

$\boldsymbol{\Omega}(t)$ 称为相对旋率，它表示 Euler 标架相对于 Lagrange 标架的

旋率。

由(3.3.18)式可以导出 Euler 旋率 $\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Eul}}(t)$，Lagrange 旋率 $\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Lag}}(t)$与相对旋率 $\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}(t)$三者之间的关系。(3.3.18)式对时间 t 求导，得到

$$\frac{d}{dt}\overset{\rangle}{\underset{\gamma}{\mathbf{n}}}(t)=\dot{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}}(t)\cdot\overset{\langle}{\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}}(t)+\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}(t)\cdot\frac{d}{dt}\overset{\langle}{\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}}(t)\qquad(3.3.39)$$

由(3.3.38)式解出

$$\dot{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}}(t)=\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}(t)\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}(t)\qquad(3.3.38)'$$

由(3.3.38)′式与(3.3.29)的前两式代入(3.3.39)式，得到

$$\begin{aligned}\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Eul}}(t)\cdot\overset{\rangle}{\underset{\gamma}{\mathbf{n}}}(t)&=\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}(t)\cdot\overset{\rangle}{\underset{\gamma}{\mathbf{n}}}(t)\\&+\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}(t)\cdot\overset{\langle\langle}{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Lag}}(t)\cdot\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}(t)^{*}\cdot\overset{\rangle}{\underset{\gamma}{\mathbf{n}}}(t)\quad(\gamma=1,2,3)\end{aligned}$$

因此得到三个旋率之间的关系式:

$$\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Eul}}(t)=\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}(t)+\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}(t)\cdot\overset{\langle\langle}{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Lag}}(t)\cdot\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}(t)^{*}\qquad(3.3.40)$$

现在来推导相对旋率 $\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}(t)$ 与物质旋率 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{w}}(t)$ 之间的关系。由(3.2.5)式，可得

$$\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}(t)=\overset{\rangle}{\mathbf{v}}\overset{\rangle}{\boldsymbol{\nabla}}=\dot{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}(t)\cdot\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}^{-1}(t)\qquad(3.3.41)$$

将变形梯度的极分解式(2.8.4)，即

$$\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}(t)=\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}(t)\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}(t)\qquad(3.3.42a)$$

$$=\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{V}}(t)\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}(t)\qquad(3.3.42b)$$

代入(3.3.41)式，可得(利用(3.3.38)式)

$$\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}(t)=\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}(t)+\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}(t)\cdot\dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}}(t)\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}^{-1}(t)\cdot\mathbf{R}^{*}(t)\qquad(3.3.43a)$$

$$=(\dot{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{V}}}(t)+\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{V}}(t)\cdot\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}(t))\cdot\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{V}}^{-1}(t)\qquad(3.3.43b)$$

取其转置，得到

$$\overset{\gg}{\mathbf{L}}(t)^* = -\overset{\gg}{\boldsymbol{\Omega}}(t) + \overset{><}{\mathbf{R}}(t)\cdot\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}(t)\cdot\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}(t)\cdot\overset{<>}{\mathbf{R}}^*(t) \tag{3.3.44a}$$

$$= \overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{V}}}(t)\cdot(\dot{\overset{\gg}{\mathbf{V}}}(t) - \overset{\gg}{\boldsymbol{\Omega}}(t)\cdot\overset{\gg}{\mathbf{V}}(t)) \tag{3.3.44b}$$

因此得到速度梯度 $\overset{\gg}{\mathbf{L}}(t)$ 的对称与反对称部分，即变形率 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}(t)$ 与物质旋率 $\overset{\gg}{\mathbf{w}}(t)$：

$$\begin{aligned}\overset{\gg}{\mathbf{d}}(t) &= \frac{1}{2}(\overset{\gg}{\mathbf{L}}(t) + \overset{\gg}{\mathbf{L}}(t)^*)\\ &= \frac{1}{2}\overset{><}{\mathbf{R}}(t)\cdot(\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}(t)\cdot\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}(t)\\ &\quad + \overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}(t)\cdot\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}(t))\cdot\overset{<>}{\mathbf{R}}^*(t)\end{aligned} \tag{3.3.45a}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}(\dot{\overset{\gg}{\mathbf{V}}}(t) + \overset{\gg}{\mathbf{V}}(t)\cdot\overset{\gg}{\boldsymbol{\Omega}}(t))\cdot\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{V}}}(t)\\ &\quad + \frac{1}{2}\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{V}}}(t)\cdot(\dot{\overset{\gg}{\mathbf{V}}}(t) - \overset{\gg}{\boldsymbol{\Omega}}(t)\cdot\overset{\gg}{\mathbf{V}}(t))\end{aligned} \tag{3.3.45b}$$

$$\begin{aligned}\overset{\gg}{\mathbf{w}}(t) &= \frac{1}{2}(\overset{\gg}{\mathbf{L}}(t) - \overset{\gg}{\mathbf{L}}(t)^*)\\ &= \overset{\gg}{\boldsymbol{\Omega}}(t) + \frac{1}{2}\overset{><}{\mathbf{R}}(t)\cdot(\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}(t)\cdot\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}(t)\\ &\quad - \overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}(t)\cdot\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}(t))\cdot\overset{<>}{\mathbf{R}}^*(t)\end{aligned} \tag{3.3.46a}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}(\dot{\overset{\gg}{\mathbf{V}}}(t) + \overset{\gg}{\mathbf{V}}(t)\cdot\overset{\gg}{\boldsymbol{\Omega}}(t))\cdot\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{V}}}(t)\\ &\quad - \frac{1}{2}\overset{-1}{\overset{\gg}{\mathbf{V}}}(t)\cdot(\dot{\overset{\gg}{\mathbf{V}}}(t) - \overset{\gg}{\boldsymbol{\Omega}}(t)\cdot\overset{\gg}{\mathbf{V}}(t))\end{aligned} \tag{3.3.46b}$$

取即时构形 $\kappa(t)$ 为参考构形，即在 t 时刻 $\mathbf{U}=\mathbf{R}=\mathbf{I}$，由(3.3.46$a$) 与(3.3.38)，在时刻 t 有

$$\mathbf{w}=\boldsymbol{\Omega}=\dot{\mathbf{R}} \tag{3.3.46c}$$

(3.3.46)式给出物质旋率 $\overset{\gg}{\mathbf{w}}(t)$与相对旋率 $\overset{\gg}{\boldsymbol{\Omega}}(t)$ 之间的关系。

现在来求(3.3.30)式的三个标架旋率。设 $\mathbf{S}$ 为二阶对称张量，它的主值为 $\underset{1}{s}$，$\underset{2}{s}$，$\underset{3}{s}$，沿上方向的单位矢量为 $\underset{1}{\mathbf{e}}$、$\underset{2}{\mathbf{e}}$、$\underset{3}{\mathbf{e}}$，故有

$$\mathbf{S}=\underset{1}{s}\,\underset{1}{\mathbf{e}}\,\underset{1}{\mathbf{e}}+\underset{2}{s}\,\underset{2}{\mathbf{e}}\,\underset{2}{\mathbf{e}}+\underset{3}{s}\,\underset{3}{\mathbf{e}}\,\underset{3}{\mathbf{e}} \tag{3.3.47}$$

把三个单位矢量 $\{\underset{1}{\mathbf{e}},\ \underset{2}{\mathbf{e}},\ \underset{3}{\mathbf{e}}\}$ 取作 $\mathscr{S}$ 标架。

例如：当 $\{\underset{1}{\mathbf{e}},\ \underset{2}{\mathbf{e}},\ \underset{3}{\mathbf{e}}\}$ 为 $\{\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}},\ \underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}},\ \underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}\}$ 时，$\mathscr{S}$ 为 Lagrange 标架，且由(3.3.19)，(2.9.28)，(2.9.32)式：

$$\begin{aligned}
&\underset{i}{s}=\underset{i}{\lambda} && 当\quad \mathbf{S}=\overset{\ll}{\mathbf{U}}\\
&\underset{i}{s}=f(\underset{i}{\lambda}) && 当\quad \mathbf{S}=\overset{\ll}{\mathscr{E}}\\
&\underset{i}{s}=\frac{1}{2n}(\underset{i}{\lambda}^{2n}-1) && 当\quad \mathbf{S}=\overset{\ll}{\mathbf{E}}^{(n)}
\end{aligned} \tag{3.3.48}$$

当 $\{\underset{1}{\mathbf{e}},\ \underset{2}{\mathbf{e}},\ \underset{3}{\mathbf{e}}\}$ 为 $\{\underset{1}{\mathbf{n}},\ \underset{2}{\mathbf{n}},\ \underset{3}{\mathbf{n}}\}$ 时，$\mathscr{S}$ 为 Euler 标架，且由(3.3.20)，(2.6.13)，(2.9.14)式：

$$\begin{aligned}
&\underset{i}{s}=\underset{i}{\lambda} && 当\quad \mathbf{S}=\overset{\gg}{\mathbf{B}}{}^{1/2}=\overset{\gg}{\mathbf{V}}\\
&\underset{i}{s}=\frac{1}{\underset{i}{\lambda}^{2}} && 当\quad \mathbf{S}=\overset{\gg}{\mathbf{c}}\\
&\underset{i}{s}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\underset{i}{\lambda}^{2}}\right) && 当\quad \mathbf{S}=\overset{\gg}{\mathbf{e}}
\end{aligned} \tag{3.3.49}$$

当 $\{\underset{1}{\mathbf{e}},\ \underset{2}{\mathbf{e}},\ \underset{3}{\mathbf{e}}\}$ 为 $\{\underset{1}{\mathbf{n}}^{d},\ \underset{2}{\mathbf{n}}^{d},\ \underset{3}{\mathbf{n}}^{d}\}$ 时，$\mathscr{S}$ 为变形率标架，且由(3.3.24)式：

$$\underset{i}{s} = \underset{i}{d} \qquad 当\ \mathbf{S} = \overset{\gg}{\mathbf{d}} \tag{3.3.50}$$

作为(3.3.25),(3.3.29),(3.3.30),(3.3.35),(3.3.36)的一般表示,有

$$\underset{i}{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{R}^s(t)\cdot \underset{\mathrm{I}}{\mathbf{i}} \qquad (i = \mathrm{I}) \tag{3.3.51}$$

$$\frac{d}{dt}\underset{i}{\mathbf{e}}(t) = \boldsymbol{\Omega}^s(t)\cdot \underset{i}{\mathbf{e}}(t) \tag{3.3.52}$$

$$\boldsymbol{\Omega}^s(t) = \dot{\mathbf{R}}^s(t)\cdot \mathbf{R}^s(t)^* \tag{3.3.53}$$

$$\boldsymbol{\Omega}^s(t) = \sum_i \frac{d\underset{i}{\mathbf{e}}(t)}{dt}\underset{i}{\mathbf{e}}(t) \tag{3.3.54}$$

$$\boldsymbol{\Omega}^s(t) = \sum_{i,j} \Omega^s_{(ij)}(t)\underset{i}{\mathbf{e}}(t)\underset{j}{\mathbf{e}}(t) \tag{3.3.55}$$

$$\frac{d\underset{k}{\mathbf{e}}(t)}{dt} = \sum_i \Omega^s_{(ik)}(t)\underset{i}{\mathbf{e}}(t) \tag{3.3.56}$$

式中 $\mathbf{R}^s(t)$ 表示从背景标架 $\{\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{i}}, \underset{\mathrm{II}}{\mathbf{i}}, \underset{\mathrm{III}}{\mathbf{i}}\}$ 到 $\mathscr{S}$ 标架 $\{\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \underset{3}{\mathbf{e}}\}$ 的正交变换,$\boldsymbol{\Omega}^s(t)$ 为 $\mathscr{S}$ 标架旋率。

将(3.3.47)式对时间 t 求导,得到

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum_i \left(\frac{d\underset{i}{s}}{dt}\underset{i}{\mathbf{e}}\underset{i}{\mathbf{e}} + \underset{i}{s}\frac{d\underset{i}{\mathbf{e}}}{dt}\underset{i}{\mathbf{e}} + \underset{i}{s}\underset{i}{\mathbf{e}}\frac{d\underset{i}{\mathbf{e}}}{dt}\right)$$

将(3.3.56)式代入上式,得

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum_{i,j}\left[\frac{d\underset{i}{s}}{dt}\delta_{ij} + (\underset{j}{s} - \underset{i}{s})\Omega^s_{(ij)}\right]\underset{i}{\mathbf{e}}\underset{j}{\mathbf{e}}$$

$$= \sum_{i,j}(\dot{\mathbf{S}})_{(ij)}\underset{i}{\mathbf{e}}\underset{j}{\mathbf{e}} \tag{3.3.57a}$$

式中

$$(\dot{\mathbf{S}})_{(ij)} = \frac{d\underset{i}{s}}{dt}\delta_{ij} + (\underset{j}{s} - \underset{i}{s})\Omega^s_{(ij)} \tag{3.3.57b}$$

(不对指标取和)

因此,(3.3.57b)可按 $i=j$ 或 $i\neq j$ 分别写作:

$$(\dot{\mathbf{S}})_{(ii)}=\frac{d\underset{i}{s}}{dt}\qquad(\text{不对 } i \text{ 取和})\tag{3.3.58a}$$

$$(\dot{\mathbf{S}})_{(ij)}=(\underset{j}{s}-\underset{i}{s})\Omega^{s}_{(ij)}\qquad(\text{不对 } i,j \text{ 取和})\tag{3.3.58b}$$

(3.3.58b)给出了 $\mathscr{S}$ 标架旋率分量 $\Omega^{s}_{(ij)}$ 与张量率 $\dot{\mathbf{S}}$ 的非对角分量的关系,由此

$$\boldsymbol{\Omega}^{s}=\sum_{i\neq j}\Omega^{s}_{(ij)}\underset{i}{\mathbf{e}}\underset{j}{\mathbf{e}}\tag{3.3.59a}$$

式中

$$\Omega^{s}_{(ij)}=\frac{1}{\underset{j}{s}-\underset{i}{s}}(\dot{\mathbf{S}})_{(ij)}\qquad(\text{不对 } i,j \text{ 取和 } \underset{j}{s}\neq\underset{i}{s})\tag{3.3.59b}$$

取 $\mathscr{S}$ 为 Lagrange 标架,则对应于 (3.3.48) 式 $\mathbf{S}$ 的三种情况,(3.3.58)给出(不对指标求和):

$$(\dot{\mathbf{U}})_{(ii)}=\frac{d\underset{i}{\lambda}}{dt}\tag{3.3.60a}$$

$$(\dot{\mathbf{U}})_{(ij)}=(\underset{j}{\lambda}-\underset{i}{\lambda})\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(ij)}\tag{3.3.60b}$$

$$(\dot{\mathscr{E}})_{(ii)}=f'(\underset{i}{\lambda})\frac{d\underset{i}{\lambda}}{dt}\tag{3.3.61a}$$

$$(\dot{\mathscr{E}})_{(ij)}=[f(\underset{j}{\lambda})-f(\underset{i}{\lambda})]\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(ij)}\tag{3.3.61b}$$

$$(\dot{\mathbf{E}}^{(n)})_{(ii)}=\underset{i}{\lambda}^{2n-1}\frac{d\underset{i}{\lambda}}{dt}\tag{3.3.62a}$$

$$(\dot{\mathbf{E}}^{(n)})_{(ij)}=\frac{1}{2n}(\underset{j}{\lambda}^{2n}-\underset{i}{\lambda}^{2n})\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(ij)}\tag{3.3.62b}$$

而(3.3.59)给出(取 $\mathbf{S}=\mathbf{U}$)

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Lag}}=\sum_{i\neq j}\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(ij)}\underset{I}{\mathbf{N}}\underset{J}{\mathbf{N}}\quad(i=I,\ j=J)\tag{3.3.63a}$$

$$\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(ij)}=\frac{1}{\underset{j}{\lambda}-\underset{i}{\lambda}}(\dot{\mathbf{U}})_{(IJ)}\quad(\underset{i}{\lambda}\neq\underset{j}{\lambda})\tag{3.3.63b}$$

(3.3.63b) 不能用于 $\underset{j}{\lambda}=\underset{i}{\lambda}$，因为在 $\underset{j}{\lambda}=\underset{i}{\lambda}$ 的时刻，Lagrange 标架不能唯一确定。通常可以取 $\underset{j}{\lambda}\to\underset{i}{\lambda}$的极限来求 $\underset{j}{\lambda}=\underset{i}{\lambda}$ 时刻的 $\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(ij)}$。

取 $\mathscr{S}$ 为 Euler 标架，且 $\mathbf{S}=\mathbf{V}$ (见(3.3.49))，则 (3.3.58) 给出

$$(\dot{\mathbf{V}})_{(ii)}=\frac{d\underset{i}{\lambda}}{dt}\tag{3.3.64a}$$

(不对指标取和)

$$(\dot{\mathbf{V}})_{(ij)}=(\underset{j}{\lambda}-\underset{i}{\lambda})\Omega^{\mathrm{Eul}}_{(ij)}\tag{3.3.64b}$$

而(3.3.59)给出

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Eul}}=\sum_{i\neq j}\Omega^{\mathrm{Eul}}_{(ij)}\underset{i}{\mathbf{n}}\underset{j}{\mathbf{n}}\tag{3.3.65a}$$

$$\Omega^{\mathrm{Eul}}_{(ij)}=\frac{1}{\underset{j}{\lambda}-\underset{i}{\lambda}}(\dot{\mathbf{V}})_{(ij)}\qquad(\underset{i}{\lambda}\neq\underset{j}{\lambda})\tag{3.3.65b}$$

取 $\mathscr{S}$ 为变形率标架，且 $\mathbf{S}=\overset{D}{\mathbf{d}}$ (见(3.3.50))，则(3.3.58)给出

$$(\dot{\mathbf{d}})_{(ii)}=\frac{d\underset{i}{d}}{dt}\tag{3.3.66a}$$

(不对指标取和)

$$(\dot{\mathbf{d}})_{(ij)}=(\underset{j}{d}-\underset{i}{d})\,\Omega^{d}_{(ij)}\tag{3.3.66b}$$

而(3.3.59)给出

$$\boldsymbol{\Omega}^d = \sum_{i \neq j} \Omega^d_{(ij)} \underset{i}{\mathbf{n}}^d \underset{j}{\mathbf{n}}^d \tag{3.3.67a}$$

$$\Omega^d_{(ij)} = \frac{1}{\underset{j}{d} - \underset{i}{d}} (\dot{\mathbf{d}})_{(ij)} \qquad (\underset{i}{d} \neq \underset{j}{d}) \tag{3.3.67b}$$

由(3.3.59)可见，任一标架旋率是与以该标架为主方向的张量变化率有关的。作为特例，(3.3.63)、(3.3.65)、(3.3.67)分别给出了$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Lag}}$、$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Eul}}$、$\boldsymbol{\Omega}^d$与$\dot{\mathbf{U}}$、$\dot{\mathbf{V}}$、$\dot{\mathbf{d}}$ 的关系。

最后，我们再来讨论一下伸长率标架旋率 $\boldsymbol{\Omega}^d(t)$ 和物质旋率 $\mathbf{w}(t)$ 不相同这一问题(见(3.3.32)式)。我们知道，变形率 $\mathbf{d}$ 与物质旋率 $\mathbf{w}$ 各是速度梯度 $\mathbf{L}$ 的对称与反对称部分，它们都只取决于速度梯度。(3.3.67)式表明，伸长率标架旋率 $\boldsymbol{\Omega}^d$ 与 $\dot{\mathbf{d}}$ 有关，而 $\dot{\mathbf{d}}$ 又与加速度梯度有关①，因此(3.3.32)式 $\boldsymbol{\Omega}^d$ 与 $\mathbf{w}$ 不相等，这是显然的。

§3.4 变形张量与应变张量的物质导数

变形梯度 $\mathbf{D}$ 的物质导数已见 (3.2.5)，(3.2.6)，(3.2.8) 与 (3.2.9)诸式，即

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \qquad \dot{\mathbf{D}}^* = \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{L}^* \tag{3.4.1}$$

$$\dot{\overline{\mathbf{D}^{-1}}} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{L} \qquad \dot{\overline{\mathbf{D}^{*-1}}} = -\mathbf{L}^* \cdot \mathbf{D}^{*-1} \tag{3.4.2}$$

---

① 加速度梯度的定义见后(3.5.2)式。利用后面的(3.5.6)式(令 $n = 1$)，可导出 $\dot{\mathbf{d}}$ 与加速度梯度的关系。

现在利用它们来求变形张量与应变张量的物质导数。

一、变形张量的物质导数

1. Green (右 Cauchy-Green) 变形张量 $\overset{((}{\mathbf{C}}$ 的物质导数

由(2.5.1),(2.5.3)与(2.5.4)式,有

$$\overset{((}{\mathbf{C}} = \overset{()}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}} = C_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B = \hat{g}_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B = g_{ij}\mathbf{G}^i\mathbf{G}^j$$

$$\overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{C}}} = \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} \cdot \overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^* = \overset{-1}{\mathbf{C}}{}^{AB}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B = \hat{g}^{AB}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B = g^{ij}\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j \tag{3.4.3}$$

式中:

$$C_{AB} = \hat{g}_{AB} = g_{ij}x^i_{,A}x^j_{,B}$$

$$\overset{-1}{C}{}^{AB} = \hat{g}^{AB} = g^{ij}X^A_{;i}X^B_{;j} \tag{3.4.4}$$

(3.4.3)的第一式就是以前的(2.2.19)式。它可以通过(2.2.18)式,即

$$\begin{aligned}(ds)^2 = \hat{g}_{AB}dX^AdX^B = g_{ij}dx^idx^j = d\mathbf{P} \cdot \overset{((}{\mathbf{C}} \cdot d\mathbf{P} \\ = (\mathbf{G}_KdX^K) \cdot (\hat{g}_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B) \cdot (\mathbf{G}_LdX^L) \\ = (\mathbf{G}_kdx^k) \cdot (g_{ij}\mathbf{G}^i\mathbf{G}^j) \cdot (\mathbf{G}_ldx^l)\end{aligned}$$

而得出。将(3.4.3)第一式对时间 t 求物质导数,得

$$\dot{\overset{((}{\mathbf{C}}} = \overline{\overset{()}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}}}^{\cdot} = \dot{\overset{()}{\mathbf{D}}}{}^* \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}} + \overset{()}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \dot{\overset{)(}{\mathbf{D}}}$$

将(3.4.1)式代入后,得

$$\dot{\overset{((}{\mathbf{C}}} = \overset{()}{\mathbf{D}}{}^* \cdot (\overset{))}{\mathbf{L}}{}^* + \overset{))}{\mathbf{L}}) \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}} = 2\overset{()}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \overset{))}{\mathbf{d}} \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}} \tag{3.4.5}$$

其分量形式为

$$\frac{dC_{AB}}{dt} = 2x^i_{,A}d_{ij}x^j_{,B} = 2\hat{d}_{AB} \tag{3.4.5$'$}$$

上式最末一个等号表示 $\overset{))}{\mathbf{d}}$ 的协变分量的坐标转换关系,已见

(3.3.15)′式。由此式可见张量 $\dot{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}$ 与 $2\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 在 Lagrange 坐标系中具有相同的协变分量，只是基矢量不同而已，即

$$\dot{\overset{\ll}{\mathbf{C}}} = \frac{dC_{AB}}{dt}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B = 2\hat{d}_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B \qquad (3,4,5)''$$

$$2\overset{\gg}{\mathbf{d}} = 2\hat{d}_{AB}\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B$$

因此(3.4.5)式中由 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 计算 $\dot{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}$ 的运算所起的作用正在于把并矢基 $\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B$ 变换为 $\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B$，因为由(2.3.20)式，有

$$\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}{}^*\cdot\hat{\mathbf{g}}^A = \mathbf{G}^A \qquad \hat{\mathbf{g}}^B\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}} = \mathbf{G}^B \qquad (a)$$

类似地，由(3.4.3)第二式对时间 t 求导，可得

$$\dot{\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}} = -2\overset{-1}{\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{d}}\cdot\overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^* \qquad (3.4.6)$$

(3.4.6)式也可以用以下的方法证明。将

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}}\cdot\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}} = \overset{\ll}{\mathbf{I}}$$

对时间 t 求导，得到

$$\dot{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}\cdot\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}} + \overset{\ll}{\mathbf{C}}\cdot\dot{\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}} = 0$$

由此得

$$\dot{\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}} = -\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}\cdot\dot{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}\cdot\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}$$

将(3.4.3)的第二式与(3.4.5)代入后，化简即得(3.4.6)式。(3.4.6)式的分量形式为

$$\frac{d}{dt}\overset{-1}{C}{}^{AB} = -2X^A_{;i}d^{ij}\partial_j X^B = -2\hat{d}^{AB} \qquad (3.4.6)'$$

上式最末一个等号表示 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 的逆变分量的坐标转换关系，类似于(3.3.15)′式。由此式可见张量 $\dot{\overset{-1}{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}}$ 与 $-2\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 在 Lagrange 坐标系具

有相同的逆变分量，只是基矢量不同而已，即

$$\overset{\cdot}{\overset{-1}{\overset{((}{\mathbf{C}}}} = \frac{d\overset{-1}{C}{}^{AB}}{dt}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B = -2\hat{d}^{AB}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B$$

$$-2\overset{))}{\mathbf{d}} = -2\hat{d}^{AB}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B \tag{3.4.6)''$$

(3.4.6)式右端的运算起的作用是把 $\overset{))}{\mathbf{d}}$ 中的并矢基 $\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B$ 变换为 $\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B$，因为由(2.3.22)式，有

$$\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} \cdot \hat{\mathbf{g}}_A = \mathbf{G}_A,\quad \hat{\mathbf{g}}_B \cdot \overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^* = \mathbf{G}_B \tag{b}$$

习题 3.10 由(3.4.3)第二式对时间 t 求导，以证明(3.4.6)式。

习题 3.11 利用(3.1.13u)式证明(3.4.6)$'$式。

2. Cauchy 变形张量 $\overset{))}{\mathbf{c}}$ 与左 Cauchy-Green 变形张量 $\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{c}}}$ 的物质导数

由(2.5.2)，(2.5.5)与(2.5.6)式，并注意到在构形 $\kappa(t)$ 中基矢量 $\hat{\mathbf{g}}_A$，$\hat{\mathbf{g}}^A$ 与 $\mathbf{g}_i$，$\mathbf{g}^i$ 之间的坐标转换关系：

$$\hat{\mathbf{g}}_A = x^i_{,A}\mathbf{g}_i \quad \hat{\mathbf{g}}^A = X^A_{,i}\mathbf{g}^i$$

$$\mathbf{g}_i = X^A_{,i}\hat{\mathbf{g}}_A \quad \mathbf{g}^i = x^i_{,A}\hat{\mathbf{g}}^A$$

$\overset{))}{\mathbf{c}}$ 与 $\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{c}}}$ 可表示为

$$\overset{))}{\mathbf{c}} = \overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^* \cdot \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} = c_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j = \hat{c}_{AB}\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B$$

$$\overset{-1}{\overset{))}{\mathbf{c}}} = \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \overset{()}{\mathbf{D}}{}^* = \overset{-1}{c}{}^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j = \overset{\frown 1}{c}{}^{AB}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B \tag{3.4.7}$$

式中

$$c_{ij} = G_{ij} = G_{AB}X^A_{,i}X^B_{,j},\quad \hat{c}_{AB} = G_{AB} = G_{ij}x^i_{,A}x^j_{,B} \tag{3.4.8}$$

$$\overset{-1}{c}{}^{ij} = G^{ij} = G^{AB}x^i_{,A}x^j_{,B},\quad \overset{\frown 1}{c}{}^{AB} = G^{AB} = G^{ij}X^A_{,i}X^B_{,j}$$

(3.4.7)的第一式就是以前的(2.2.31)式。 它可以通过(2.2.30)式，即

$$(dS)^2 = G_{ij}dx^i dx^j = G_{AB}dX^A dX^B = d\mathbf{p}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{c}}\cdot d\mathbf{p}$$
$$= (\mathbf{g}_k dx^k)\cdot(G_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j)\cdot(\mathbf{g}_l dx^l)$$
$$= (\hat{\mathbf{g}}_K dX^K)\cdot(G_{AB}\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B)\cdot(\hat{\mathbf{g}}_L dX^L)$$

而得出。

对比(3.4.7)式与(3.4.3)式，可以看出，张量 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 与 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}^{-1}$ 就是把构形 $\mathscr{r}(t)$ 在 Lagrange 坐标系 $\{X^A, t\}$ 中的度量张量分量 $\hat{g}_{AB}$ 与 $\hat{g}^{AB}$，配上构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 的并基矢量 $\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B$ 与 $\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B$；相反地，张量 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}$ 与 $\overset{\gg}{\mathbf{c}}^{-1}$ 则是把构形 $\mathscr{R}(t_0)$ Lagrange 坐标系$\{X^A\}$的度量张量 G_{AB} 与 G^{AB}，配上构形 $\mathscr{r}(t)$ 的并基矢量 $\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B$ 与 $\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B$。

(3.4.7)第二式对时间 t 求导，得

$$\dot{\overset{\gg}{\mathbf{c}}}^{-1} = \dot{\overline{\overset{\times}{\mathbf{D}}\cdot\overset{\diamond}{\mathbf{D}}^*}} = \dot{\overset{\times}{\mathbf{D}}}\cdot\overset{\diamond}{\mathbf{D}}^* + \overset{\times}{\mathbf{D}}\cdot\dot{\overset{\diamond}{\mathbf{D}}}^*$$

将(3.4.1)式代入后，再利用(3.4.7)第二式，得

$$\dot{\overset{\gg}{\mathbf{c}}}^{-1} = \overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{c}}^{-1} + \overset{\gg}{\mathbf{c}}^{-1}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}^* \qquad (3.4.9)$$

但由(3.1.37)与(3.1.38)式，

$$\dot{\overset{\gg}{\mathbf{c}}}^{-1} = \frac{D\overset{-1}{c}{}^{ij}}{Dt}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$$
$$= \left(\frac{d\overset{\frown}{c}{}^{-1\,AB}}{dt} + \overset{\frown}{c}{}^{-1\,MB}\hat{\nabla}_M\theta^A + \overset{\frown}{c}{}^{-1\,AM}\hat{\nabla}_M\theta^B\right)\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B \qquad (3.4.9)'$$

因 G^{AB} 不随时间 t 变化，

$$\frac{d\overset{\frown}{c}{}^{-1\,AB}}{dt} = \frac{d}{dt}G^{AB} = 0$$

故(3.4.9)与(3.4.9)′式的分解式为

$$\dot{\overset{-1}{\mathbf{c}}} = \frac{D\overset{-1}{c}{}^{ij}}{Dt}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j = (v^i_{,r}\overset{-1}{c}{}^{rj} + \overset{-1}{c}{}^{ir}\nabla_r v^j)\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$$

$$= (\theta^A_{,M}\overset{\widehat{-1}}{c}{}^{MB} + \overset{\widehat{-1}}{c}{}^{AM}\hat{\nabla}_M\theta^B)\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B \qquad (3.4.9a)$$

其分量形式为

$$\frac{D\overset{-1}{c}{}^{ij}}{Dt} = v^i_{,r}\overset{-1}{c}{}^{rj} + \overset{-1}{c}{}^{ir}\nabla_r v^j$$

$$= (\theta^A_{,M}\overset{\widehat{-1}}{c}{}^{MB} + \overset{\widehat{-1}}{c}{}^{AM}\hat{\nabla}_M\theta^B)x^i_{,A}x^j_{,B} \qquad (3.4.9b)$$

类似地，由(3.4.7)第一式对时间 t 求导，可得

$$\dot{\mathbf{c}} = -(\mathbf{c}\cdot\mathbf{L} + \mathbf{L}^*\cdot\mathbf{c}) \qquad (3.4.10)$$

(3.4.10)式也可以用以下的方法导出。将等式

$$\overset{-1}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{I}$$

对时间 t 求导，得到

$$\dot{\overset{-1}{\mathbf{c}}}\cdot\mathbf{c} + \overset{-1}{\mathbf{c}}\cdot\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$$

由此得

$$\dot{\mathbf{c}} = -\mathbf{c}\cdot\dot{\overset{-1}{\mathbf{c}}}\cdot\mathbf{c}$$

将(3.4.9)式代入后，即得(3.4.10)式。但由(3.1.37)与(3.1.38)式

$$\dot{\mathbf{c}} = \frac{Dc_{ij}}{Dt}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j$$

$$= \left(\frac{d\hat{c}_{AB}}{dt} - \hat{c}_{MB}\hat{\nabla}_A\theta^M - \hat{c}_{AM}\hat{\nabla}_B\theta^M\right)\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B \qquad (3.4.10)'$$

因 G_{AB} 不随时间 t 变化，

$$\frac{d\hat{c}_{AB}}{dt}=\frac{dG_{AB}}{dt}=0$$

故(3.4.10)与(3.4.10)′式的分解式为

$$\overset{\nabla}{\mathbf{c}}=\frac{Dc_{ij}}{Dt}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j=-(c_{ir}v^r_{,j}+(\nabla_i v^r)c_{rj})\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j$$

$$=-(\hat{c}_{AM}\hat{v}^M_{;B}+(\hat{\nabla}_A\hat{v}^M)\hat{c}_{MB})\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B \tag{3.4.10a}$$

其分量形式为

$$\frac{Dc_{ij}}{Dt}=-(c_{ir}v^r_{;j}+(\nabla_i v^r)c_{rj})$$

$$=-(\hat{c}_{AM}\hat{v}^M_{;B}+(\hat{\nabla}_A\hat{v}^M)\hat{c}_{MB})X^A_{;i}X^B_{;j} \tag{3.4.10b}$$

习题 3.12 利用(3.4.8)的 $\overset{-1}{c}{}^{ij}$ 式对时间 t 求全导数，以证明(3.4.9a) 的第一个等式。

［提示］ 由(3.4.8)之 $\overset{-1}{c}{}^{ij}$ 式，对 t 求全导数，得

$$\frac{D}{Dt}\overset{-1}{c}{}^{ij}=\frac{D}{Dt}(G^{AB}x^i_{,A}x^j_{,B})$$

$$=G^{AB}\left(\frac{Dx^i_{,A}}{Dt}x^j_{,B}+x^i_{,A}\frac{Dx^j_{,B}}{Dt}\right)$$

将 (3.2.5e) 的第一等式代入，

$$\frac{D}{Dt}\overset{-1}{c}{}^{ij}=G^{AB}(v^i_{;r}x^r_{,A}x^j_{,B}+x^i_{,A}v^j_{;r}x^r_{,B})$$

$$=v^i_{;r}(G^{AB}x^r_{,A}x^j_{,B})+(G^{AB}x^i_{,A}x^r_{,B})v^j_{;r}$$

$$=v^i_{;r}\overset{-1}{c}{}^{rj}+\overset{-1}{c}{}^{ir}\nabla_r v^j$$

习题 3.13 由(3.4.7)的第一式对时间 t 求导，以证明(3.4.10)式。

习题 3.14 利用(3.4.8)的 c_{ij} 式对时间 t 求全导数，以证明

(3.4.10a) 的第一等式。

[提示] 由(3.4.8)之 c_{ij} 式，对 t 求全导数，得

$$\frac{Dc_{ij}}{Dt}=\frac{D}{Dt}(G_{AB}X^A_{,i}X^B_{,j})$$

$$=G_{AB}\left(\frac{DX^A_{,i}}{Dt}X^B_{,j}+X^A_{,i}\frac{DX^B_{,j}}{Dt}\right)$$

将 (3.2.8b)′ 的第一等式代人，

$$\frac{Dc_{ij}}{Dt}=-G_{AB}(X^A_{,r}v^r_{,i}X^B_{,j}+X^A_{,i}X^B_{,r}v^r_{,j})$$

$$=-[(\nabla_i v^r)c_{rj}+c_{ir}v^r_{,j}]$$

二、应变张量的物质导数

Green 应变张量 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}$ 为构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的张量，如(2.9.2) 与 (2.9.3)式，即

$$\overset{\ll}{\mathbf{E}}=\frac{1}{2}(\overset{\ll}{\mathbf{C}}-\overset{\ll}{\mathbf{I}})=E_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B \tag{3.4.11}$$

式中

$$E_{AB}=\frac{1}{2}(C_{AB}-G_{AB})=\frac{1}{2}(g_{AB}-G_{AB}) \tag{3.4.12}$$

Almansi 应变张量 $\overset{\gg}{\mathbf{e}}$ 为构形 $\mathscr{r}(t)$ 中的张量，如(2.9.12)与 (2.9.13)式，即

$$\overset{\gg}{\mathbf{e}}=\frac{1}{2}(\overset{\gg}{\mathbf{I}}-\overset{\gg}{\mathbf{c}})=e_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j \tag{3.4.13}$$

式中

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(g_{ij}-c_{ij})=\frac{1}{2}(g_{ij}-G_{ij}) \tag{3.4.14}$$

由分量的坐标转换关系(2.9.20)式，有

$$e_{ij} = E_{AB} X^A_{,i} X^B_{,j}, \quad E_{AB} = e_{ij} x^i_{,A} x^j_{,B} \tag{3.4.15}$$

令 $\hat{e}_{AB}$ 为张量 $\overset{\gg}{\mathbf{e}}$ 在 Lagrange 坐标 $\{X^A, t\}$ 中的协变分量，由(3.4.15)式可知

$$\hat{e}_{AB} = E_{AB} \tag{3.4.16}$$

因此 Almansi 应变张量 $\overset{\gg}{\mathbf{e}}$ 在 Euler 坐标系 $\{x^i\}$ 与 Lagrange 坐标 $\{X^A, t\}$ 中的两种表示式为

$$\overset{\gg}{\mathbf{e}} = e_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j = \hat{e}_{AB}\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B \quad (\hat{e}_{AB} = E_{AB}) \tag{3.4.13$'$}$$

这就是以前的(2.9.23)式。

在张量 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}$ 与 $\overset{\gg}{\mathbf{e}}$ 之间存在着关系(2.9.21)式，即

$$\left.\begin{aligned} \overset{\ll}{\mathbf{E}} &= \overset{\Diamond}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \overset{\gg}{\mathbf{e}} \cdot \overset{\times}{\mathbf{D}} \\ \overset{\gg}{\mathbf{e}} &= \overset{\times}{\mathbf{D}}{}^{*-1} \cdot \overset{\ll}{\mathbf{E}} \cdot \overset{\Diamond}{\mathbf{D}}{}^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{3.4.17}$$

对比(3.4.11)与(3.4.13)$'$式，可见(3.4.17)式右端运算所起的作用只是并矢基 $\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B$ 与 $\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B$ 的相互变换，因为由(2.3.20)第一式与(2.3.23)第一式：

$$\overset{\Diamond}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \hat{\mathbf{g}}^A = \mathbf{G}^A, \qquad \hat{\mathbf{g}}^B \cdot \overset{\times}{\mathbf{D}} = \mathbf{G}^B$$

$$\overset{\times}{\mathbf{D}}{}^{*-1} \cdot \mathbf{G}^A = \hat{\mathbf{g}}^A, \qquad \mathbf{G}^B \cdot \overset{\Diamond}{\mathbf{D}}{}^{-1} = \hat{\mathbf{g}}^B$$

1. Green 应变张量的物质导数

利用(3.4.11)与(3.4.5)式，可得 Green 应变张量的物质导数

$$\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2}\dot{\overset{\ll}{\mathbf{C}}} = \overset{\Diamond}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \overset{\gg}{\mathbf{d}} \cdot \overset{\times}{\mathbf{D}} \tag{3.4.18}$$

其分解式为(利用(3.3.15)$''$与(3.4.5)$'$式)

$$\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}} = \frac{dE_{AB}}{dt}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B$$

$$\frac{dE_{AB}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dC_{AB}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\hat{g}_{AB}}{dt} = \hat{d}_{AB} \qquad (3.4.19)$$

因此张量 $\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}$ 与 $\overset{\gg}{\mathbf{d}} = \hat{d}_{AB}\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B$ 具有相同的协变分量，但是基矢量不同

$\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}$ 与 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 的关系式(3.4.18)也可由 $\dot{\overline{ds^2}}$ 的表达式得到，在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的线元 $d\mathbf{P}$ 的长度平方为

$$(dS)^2 = d\mathbf{P}\cdot d\mathbf{P} = G_{AB}dX^A dX^B, \qquad \dot{\overline{dS^2}} = 0$$

而由(2.2.18)式在构形 $\mathscr{R}(t)$ 中线元 $d\mathbf{p}$ 的长度平方则为

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= d\mathbf{p}\cdot d\mathbf{p} = g_{ij}dx^i dx^j \\ &= d\mathbf{P}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{C}}\cdot d\mathbf{P} = C_{AB}dX^A dX^B = \hat{g}_{AB}dX^A dX^B\end{aligned}$$

因此，利用 (3.2.12a) 式，得

$$\begin{aligned}\dot{\overline{(ds)^2}} &= \dot{\overline{d\mathbf{p}}}\cdot d\mathbf{p} + d\mathbf{p}\cdot\dot{\overline{d\mathbf{p}}} \\ &= (\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot d\mathbf{p})\cdot d\mathbf{p} + d\mathbf{p}\cdot(\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot d\mathbf{p}) \\ &= d\mathbf{p}\cdot(\overset{\gg}{\mathbf{L}} + \overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^*)\cdot d\mathbf{p} = 2d\mathbf{p}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{d}}\cdot d\mathbf{p} \\ &= 2d_{ij}dx^i dx^j = 2\hat{d}_{AB}dX^A dX^B\end{aligned}$$

同时又有

$$\begin{aligned}\dot{\overline{(ds)^2}} &= d\mathbf{P}\cdot\dot{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}\cdot d\mathbf{P} = 2d\mathbf{P}\cdot\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}\cdot d\mathbf{P} \\ &= 2\frac{dE_{AB}}{dt}dX^A dX^B\end{aligned}$$

比较以上两式，得到

$$d\mathbf{p}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{d}}\cdot d\mathbf{p} = d\mathbf{P}\cdot\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}\cdot d\mathbf{P}$$

将线元变换公式(2.3.11)第一式代入，即得(3.4.18)式。

2. Almansi 应变张量的物质导数

利用(3.4.13)与(3.4.10)式可得 Almansi 应变张量的物质导数

$$\dot{\overset{\rangle}{\mathbf{e}}} = -\frac{1}{2}\dot{\overset{\rangle}{\mathbf{c}}} = \frac{1}{2}\ (\overset{\rangle}{\mathbf{c}}\cdot\overset{\rangle}{\mathbf{L}} + \overset{\rangle}{\mathbf{L}}^{*}\cdot\overset{\rangle}{\mathbf{c}})$$

将 $\overset{\rangle}{\mathbf{c}} = \overset{\rangle}{\mathbf{I}} - 2\overset{\rangle}{\mathbf{e}}$ 代入后，化简并利用(3.3.2)式，得到

$$\dot{\overset{\rangle}{\mathbf{e}}} = \overset{\rangle}{\mathbf{d}} - (\overset{\rangle}{\mathbf{e}}\cdot\overset{\rangle}{\mathbf{L}} + \overset{\rangle}{\mathbf{L}}^{*}\cdot\overset{\rangle}{\mathbf{e}}) \tag{3.4.20}$$

其分解形式为

$$\dot{\overset{\rangle}{\mathbf{e}}} = \frac{De_{ij}}{Dt}\ \mathbf{g}^i\mathbf{g}^j = [d_{ij} - (e_{ir}v^r_{,j} + (\nabla_i v^r)e_{rj})]\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j$$

$$= [\hat{d}_{AB} - (\hat{e}_{AM}\hat{v}^M_{;B} + (\hat{\nabla}_A\hat{v}^M)\hat{e}_{MB})]\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B \tag{3.4.21}$$

式中 $\hat{e}_{AM} = E_{AM}$。分量形式为

$$\frac{De_{ij}}{Dt} = d_{ij} - (e_{ir}v^r_{,j} + (\nabla_i v^r)e_{rj})$$

$$= [\hat{d}_{AB} - (\hat{e}_{AM}\hat{v}^M_{;B} + (\hat{\nabla}_A\hat{v}^M)\hat{e}_{MB})]X^A_{,i}X^B_{,j} \tag{3.4.21$'$}$$

在连续介质力学的文献中，常常把即时构形取为参考构形，此时 $\mathbf{D} = \mathbf{I}$, $\mathbf{e} = \mathbf{0}$。由于即时构形与参考构形重合，故上标"〈"与"〉"的差别消失。由(3.4.18)与(3.4.20)式，有

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{d} \quad 当 \quad \mathbf{D} = \mathbf{I} \tag{3.4.22}$$

习题 3.15 由 $\overset{\rangle}{\mathbf{e}}$ 的分解式(3.4.13)′即

$$\overset{\rangle}{\mathbf{e}} = E_{AB}\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B\ .$$

对时间 t 求导，以证明(3.4.21)式

[提示] 利用(3.4.19)式与(3.1.13s)式：

$$d\hat{\mathbf{g}}^A/dt = -\hat{\mathbf{g}}^A\cdot\overset{\rangle}{\mathbf{L}}$$

三、长度比、面积比和体积比的物质导数

1. 长度比的物质导数

在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的线元 $d\mathbf{P}$ 变形后成为构形 $\mathscr{r}(t)$ 中的线元 $d\mathbf{p}$，沿线元的单位矢量 $\mathbf{N}$ 变成 $\mathbf{n}$。

$$\mathbf{N}=\frac{d\mathbf{P}}{|d\mathbf{P}|}\qquad \mathbf{n}=\frac{d\mathbf{p}}{|d\mathbf{p}|}$$

由(2.5.8)与(2.5.13)式

$$\lambda_{\mathbf{N}}=\lambda(\mathbf{N})=\frac{|d\mathbf{p}|}{|d\mathbf{P}|}=\sqrt{\mathbf{N}\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{N}}$$

$$=\lambda_{\mathbf{n}}=\lambda(\mathbf{n})=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{n}\cdot\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{n}}}\qquad(3.4.23)$$

因此，将上式对时间 t 求导，并利用(3.4.5)式，得到

$$\frac{\tilde{d}\lambda_{\mathbf{N}}}{\tilde{d}t}=\frac{1}{2\lambda_{\mathbf{N}}}\mathbf{N}\cdot\dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}}\cdot\mathbf{N}=\frac{1}{2\lambda_{\mathbf{N}}}\mathbf{N}\cdot(2\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}{}^{*}\cdot\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{d}}\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}})\cdot\mathbf{N}$$

$$=\frac{1}{\lambda_{\mathbf{N}}}(\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{N})\cdot\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{d}}\cdot(\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{N})\qquad(3.4.24)$$

但是若利用线元变换公式(2.3.11)第一式，即

$$d\mathbf{p}=\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}\cdot d\mathbf{P}$$

两端除以 $|d\mathbf{p}|=\lambda_{\mathbf{N}}|d\mathbf{P}|$ 得:

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\lambda_{\mathbf{N}}}\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{N}\quad 即\quad \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{N}=\lambda_{\mathbf{N}}\mathbf{n}\qquad(3.4.25)$$

(3.4.24)式中 $\tilde{d}\lambda_{\mathbf{N}}/\tilde{d}t$ 表示在构形 $\mathscr{r}(t)$ 中对应于构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 沿 $\mathbf{N}$ 方向每单位长度线元其长度的变化率。因为在求导过程中 $\mathbf{N}=d\mathbf{P}/|d\mathbf{P}|$ 看作是固定的（即 $d\mathbf{P}$ 固定），故这个导数就是(3.2.11)式意义的固化物质导数。在 $\mathscr{r}(t)$ 构形中这个线元的长度已非单位长度，而是 $\lambda_{\mathbf{N}}=\lambda_{\mathbf{n}}$。我们称 $\tilde{d}\lambda_{\mathbf{N}}/\tilde{d}t$ 为以构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 为

基准的长度比的固化物质导数，其值不仅依赖于变形率 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$，而且还依赖于变形梯度 $\overset{)(}{\mathbf{D}}$。但是在 $\tilde{\partial}\lambda_{\mathbf{N}}/\tilde{\partial}t$ 中若利用等式 $\lambda_{\mathbf{N}}=\lambda_{\mathbf{n}}$，将它改写作 $\tilde{\partial}\lambda_{\mathbf{n}}/\tilde{\partial}t$，则已失去了原来线元的标志 $\mathbf{N}$。但是 $\tilde{\partial}\lambda_{\mathbf{n}}/\tilde{\partial}t$ 的含意仍然是假如想象线元 $\lambda_{\mathbf{n}}\mathbf{n}$ 固结（“固化”）在变形体上，即把它想象成“物质的”，$\lambda_{\mathbf{n}}$ 对时间 t 的固化物质导数。因此，将(3.4.25)式代入(3.4.24)式，先得到

$$\frac{\tilde{\partial}\lambda_{\mathbf{N}}}{\tilde{\partial}t}=\lambda_{\mathbf{n}}\mathbf{n}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{n}=\lambda_{\mathbf{n}}d_{\mathbf{n}}$$

然后把它写作

$$\frac{\tilde{\partial}\lambda_{\mathbf{n}}}{\tilde{\partial}t}=\lambda_{\mathbf{n}}d_{\mathbf{n}}$$

即

$$\frac{1}{\lambda_{\mathbf{n}}}\frac{\tilde{\partial}\lambda_{\mathbf{n}}}{\tilde{\partial}t}=d_{\mathbf{n}} \tag{3.4.26}$$

式中 $d_{\mathbf{n}}=\mathbf{n}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{n}$ 为长度率，见(3.3.1)式。与(3.4.24)式不同，(3.4.26)式的 $(\tilde{\partial}\lambda_{\mathbf{n}}/\tilde{\partial}t)/\lambda_{\mathbf{n}}$ 表示在构形 $\mathscr{R}(t)$ 中沿 $\mathbf{n}$ 方向每单位长度（对应于构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中长度为 $\lambda_{\mathbf{n}}^{-1}$，原非单位长度）的线元长度变化率。因此长度率表示以构形 $\mathscr{R}(t)$ 为基准的长度比的物质导数，其值仅依赖于变形率 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$，而与变形梯度 $\overset{)(}{\mathbf{D}}$ 无关。

2. 体积比的物质导数

由(3.2.16)式，体积比的物质导数为

$$\mathscr{J}=\mathscr{J}\operatorname{div}\mathbf{v}=\mathscr{J}\mathscr{J}_1^L=\mathscr{J}_3(\mathbf{D})\mathscr{J}_1(\mathbf{L})$$

但以构形 $\mathscr{R}(t)$ 为基准的体积比物质导数

$$\frac{\mathscr{J}}{\mathscr{J}}=\operatorname{div}\mathbf{v}=\mathscr{J}_1(\mathbf{L})=\mathscr{J}_1(\overset{\gg}{\mathbf{d}})$$

只与变形率 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 有关，它就是体积率，见式(3.3.6)。

3. 面积比的物质导数

在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的面元 $d\overset{\leftarrow}{\mathbf{A}}$ 变形后成为构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的面元 $d\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}$，沿面元法向的单位矢量 $\mathbf{N}$ 变成 $\mathbf{n}$

$$\mathbf{N}=\frac{d\overset{\leftarrow}{\mathbf{A}}}{|d\overset{\leftarrow}{\mathbf{A}}|}\qquad \mathbf{n}=\frac{d\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}}{|d\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}|}$$

由(2.5.20)与(2.5.22)式

$$\sigma_{\mathbf{N}}=\sigma(\mathbf{N})=\frac{|d\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}|}{|d\overset{\leftarrow}{\mathbf{A}}|}=\mathscr{J}\sqrt{\mathbf{N}\cdot\overset{-1}{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{N}}$$

$$=\sigma_{\mathbf{n}}=\sigma(\mathbf{n})=\frac{1}{j\sqrt{\mathbf{n}\cdot\overset{-1}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{n}}}\tag{3.4.27}$$

式中由(2.4.6)与(2.5.19)式，

$$\mathscr{J}=\frac{1}{j}=\mathscr{J}_3(\mathbf{D})=\sqrt{\mathscr{J}_3(\mathbf{C})}$$

将(3.4.27)式对时间 t 求导，并利用(3.4.6)，(3.2.16)与(3.4.27)本身，得到

$$\frac{\partial\sigma_{\mathbf{N}}}{\partial t}=\mathscr{J}\sqrt{\mathbf{N}\cdot\overset{-1}{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{N}}+\mathscr{J}\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{N}\cdot\overset{-1}{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{N}}}\mathbf{N}\cdot\dot{\overset{-1}{\mathbf{C}}}\cdot\mathbf{N}$$

$$=\dot{\mathscr{J}}\frac{\sigma_{\mathbf{N}}}{\mathscr{J}}+\mathscr{J}\frac{1}{2\sigma_{\mathbf{N}}/\mathscr{J}}\mathbf{N}$$

$$\cdot(-2\overset{-1}{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{d}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{*})\cdot\mathbf{N}$$

$$= \sigma_{\mathbf{N}} \mathscr{I}_1(\mathbf{d}) - \frac{1}{\sigma_{\mathbf{N}}} (\mathscr{J} \overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^* \cdot \mathbf{N}) \cdot \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{d}}$$

$$\cdot (\mathscr{J} \overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^* \cdot \mathbf{N}) \tag{3.4.28}$$

但由面元变换公式(2.4.13)

$$d\overset{\rangle}{\mathbf{a}} = \mathscr{J} \overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^* \cdot d\overset{\langle}{\mathbf{A}}$$

两端除以 $|d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}| = \sigma_{\mathbf{N}} |d\overset{\langle}{\mathbf{A}}|$，得

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sigma_{\mathbf{N}}} \mathscr{J} \overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^* \cdot \mathbf{N} \quad \text{即} \quad \mathscr{J} \overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^* \cdot \mathbf{N} = \sigma_{\mathbf{N}} \mathbf{n} \tag{3.4.29}$$

代入(3.4.28)式，并注意 $\sigma_{\mathbf{N}} = \sigma_{\mathbf{n}}$，利用与 (3.2.11) 式记号，以 $\tilde{\partial} \sigma_{\mathbf{n}} / \tilde{\partial} t$ 表示把面元 $\sigma_{\mathbf{n}} \mathbf{n}$ 想象成“固化” 于变形体上时 $\sigma_{\mathbf{n}}$ 对时间 t 的固化物质导数，则得到

$$\frac{1}{\sigma_{\mathbf{n}}} \frac{\tilde{\partial} \sigma_{\mathbf{n}}}{\tilde{\partial} t} = \mathscr{I}_1(\mathbf{d}) - d_{\mathbf{n}} \tag{3.4.30}$$

由(3.4.28)式，以构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 为基准的面积比的物质导数不仅与变形率 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{d}}$ 而且也与变形梯度 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}$ 有关。而由式(3.4.30)，以构形 $\mathscr{R}(t)$ 为基准的面积比物质导数则只与变形率 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{d}}$ 有关。(3.4.30)所示的就是面积率，见式(3.3.7)。

由(3.4.26)与(3.4.30)式，并利用(3.2.16)式，

$$\frac{\dot{\mathscr{J}}}{\mathscr{J}} = \frac{1}{\lambda_{\mathbf{n}}} \frac{\tilde{\partial} \lambda_{\mathbf{n}}}{\tilde{\partial} t} + \frac{1}{\sigma_{\mathbf{n}}} \frac{\tilde{\partial} \sigma_{\mathbf{n}}}{\tilde{\partial} t} \tag{3.4.31}$$

故以构形 $\mathscr{R}(t)$ 为基准的体积比物质导数等于沿任一 $\mathbf{n}$ 方向的长度比物质导数与垂直于该方向的面积比物质导数之和。

四、Seth 应变度量类的物质导数

Seth 应变度量类 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}{}^{(n)}$ 由(2.9.32)式给出。 当 $n = 1$ 时，由

(2.9.33)式，$\overset{\ll}{\mathbf{E}}^{(1)}$ 就是 Green 应变张量 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}$。因此 $\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}^{(1)}=\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}$，见(3.4.18)与(3.4.19)式。当 $n=-1$ 时，由(2.9.34)与(3.4.6)式，可得

$$\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}^{(-1)}=-\frac{1}{2}\dot{\overline{\overset{\ll}{\mathbf{C}}^{-1}}}=\mathbf{D}^{-1}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{D}^{-1*} \qquad (3.4.32)$$

将(3.3.15)中 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 的最后一个表达式代入上式，并利用本节166页的 (b) 式，得到 $\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}^{(-1)}$ 的分解形式：

$$\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}^{(-1)}=\frac{dE^{(-1)AB}}{dt}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B$$

$$\frac{dE^{(-1)AB}}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\overset{-1}{C}{}^{AB}=d^{AB} \qquad (3.4.33)$$

当 $n=1/2$ 时，由于 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}^{(1/2)}$ 的表达式(2.9.36)中含有 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 的方根，所以很难把 $\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}^{(1/2)}$ 写成象 $n=1$ 时的(3.4.18)或 $n=-1$ 时的(3.4.32)那样的实体(或绝对)形式。但是可以用以下的步骤来求得 $\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}^{(1/2)}$ 在 Lagrange 标架中的分解式。将 $\overset{\ll}{\mathbf{E}}^{(1/2)}$ 的表达式(2.9.36)对时间 t 求导，得

$$\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}^{(1/2)}=\dot{\overline{\overset{\ll}{\mathbf{C}}^{1/2}}}=\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}} \qquad (3.4.34)$$

在 Lagrange 标架中，$\overset{\ll}{\mathbf{U}}$ 的分解式(3.3.19)式为主对角形，但 $\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}$ 的分解式却是一般形式：

$$\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}^{(1/2)}=\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}=\sum_{I,J}(\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}})_{(IJ)}\underset{I}{\mathbf{N}}\underset{J}{\mathbf{N}} \qquad (3.4.35)$$

式中 $(\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}})_{(IJ)}$ 表示 $\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}$ 在 Lagrange 标架中分解的系数或分量。变

形率（或伸长率）$\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 在伸长率标架中的分解式(3.3.24)为主对角形，但它在 Euler 标架中的分解式则应为一般形式：

$$\overset{\gg}{\mathbf{d}} = \sum_{\gamma,\pi} d_{(\gamma\pi)} \underset{\gamma}{\mathbf{n}}\,\underset{\pi}{\mathbf{n}} \tag{3.4.36}$$

式中 $d_{(\gamma\pi)}$ 为 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 在 Euler 标架中分解的系数或分量，在沿 Euler 标架的笛卡儿坐标系中它的表达式为(由(3.3.2)式)

$$d_{(\gamma\pi)} = \frac{1}{2}\left(v_{(\gamma),\pi} + v_{(\pi),\gamma}\right) \tag{3.4.37}$$

这里 $v_{(\gamma)}$ 表示速度场 $\mathbf{v}$ 沿所研究点处 Euler 标架的分量，逗号“,”表示对笛卡儿坐标的偏导数。将(3.3.45a)式改写成以下形式

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^* \cdot \overset{\gg}{\mathbf{d}} \cdot \overset{\times}{\mathbf{R}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}} \cdot \overset{\ll}{\mathbf{U}}{}^{-1} + \overset{\ll}{\mathbf{U}}{}^{-1} \cdot \dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}\right) \tag{3.4.38}$$

上式右端的 $\overset{\ll}{\mathbf{U}}$ 用(3.3.19)式代入，$\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}$ 用(3.4.35)式代入，而左端 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 用(3.4.36)式代入，并利用(3.3.18)式，得到

$$\sum_{i,j} d_{(ij)} \underset{I}{\mathbf{N}}\,\underset{J}{\mathbf{N}} = \frac{1}{2} \sum_{I,J} \left(\lambda_J^{-1} + \lambda_I^{-1}\right)(\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}})_{(IJ)} \underset{I}{\mathbf{N}}\,\underset{J}{\mathbf{N}}$$

$$(i = I,\ j = J)$$

由此，并注意到(3.3.21)式，得到

$$(\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}})_{(IJ)} = \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} d_{(ij)} \quad \left(\begin{array}{l} i = I,\ j = J \\ \text{不对 } i,\ j \text{ 取和} \end{array}\right) \tag{3.4.39}$$

因此 $\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}$ 在 Lagrange 标架中的分量 $(\dot{\overset{\ll}{\mathbf{U}}})_{(IJ)}$ 可以通过 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 在 Euler 标架中的分量 $d_{(ij)}$ 表示。将(3.4.39)代入(3.4.35)式，最后得到

$$\overset{\circ}{\mathbf{E}}^{(1/2)} = \overset{\circ}{\mathbf{U}} = \sum_{I,J} \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} d_{(ij)} \underset{I}{\mathbf{N}}\underset{J}{\mathbf{N}} \quad (i = I,\ j = J) \tag{3.4.40}$$

由(3.4.39)式可以导出主长度比 λ_i 对时间 t 的导数 $d\lambda_i/dt$ 和 Lagrange 旋率 $\overset{\circ}{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Lag}}$ 在 Lagrange 标架中的分量 $\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(IJ)}$ (见 (3.3.36) 第一式)的公式。将(3.4.39)代入(3.3.60)，得到

当 $i = j$ 时，

$$\frac{1}{\lambda_i}\frac{d\lambda_i}{dt} = d_{(ii)} \quad (\text{不对 } i \text{ 取和}) \tag{3.4.41}$$

而当 $i \neq j$ 时，

$$\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(IJ)} = \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} d_{(ij)} \quad \left(\begin{matrix} i = I,\ j = J \\ \text{不对指标取和} \end{matrix}\right) \tag{3.4.42}$$

将(3.4.41)式与(3.4.26)式比较，可知沿 Euler 方向的长度率与主长度比的相对变化率相等：

$$\frac{1}{\lambda_{\mathbf{n}_i}}\frac{d\lambda_{\mathbf{n}_i}}{dt} = \frac{1}{\lambda_i}\frac{d\lambda_i}{dt} = d_{(ii)} \quad (\text{不对 } i \text{ 取和}) \tag{3.4.43}$$

在(3.4.42)式中假定 $\lambda_i \neq \lambda_j$；当 $\lambda_i = \lambda_j$ 时，Lagrange 方向不能唯一确定。通常可通过求当 $\lambda_i \to \lambda_j$ 的极限来得到 $\lambda_i = \lambda_j$ 时刻的 Lagrange 旋率。

由(3.3.57)式，取 $\mathbf{S} = \mathscr{E}$，可得 Hill 应变度量 $\mathscr{E}$ 对时间 t 的导数

$$\overset{\circ}{\mathscr{E}} = \sum_{I,J} (\overset{\circ}{\mathscr{E}})_{(IJ)} \underset{I}{\mathbf{N}}\underset{J}{\mathbf{N}} \tag{3.4.44a}$$

式中

$$
(\overset{\ll}{\boldsymbol{\mathscr{E}}})_{(IJ)} = \frac{d\underset{I}{\mathscr{E}}}{dt}\,\delta_{IJ} + (\underset{J}{\mathscr{E}} - \underset{I}{\mathscr{E}})\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(IJ)} \text{（不对指标求和）}
$$

$$
(3.4.44b)
$$

这里，由(2.9.28)式，$\underset{I}{\mathscr{E}} = f(\underset{I}{\lambda})$。注意到(3.3.21)式，由(3.4.44$b$)式(或直接由(3.3.61)式)，得到当 $i = j$ 时，

$$
(\overset{\ll}{\boldsymbol{\mathscr{E}}})_{(II)} = \frac{d\underset{I}{\mathscr{E}}}{dt} = f'(\underset{i}{\lambda})\,\frac{d\underset{i}{\lambda}}{dt} \quad (i = I, \text{不对指标取和})
\tag{3.4.45}
$$

而当 $i \neq j$ 时，

$$
(\overset{\ll}{\boldsymbol{\mathscr{E}}})_{(IJ)} = (\underset{J}{\mathscr{E}} - \underset{I}{\mathscr{E}})\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(IJ)} = (f(\underset{j}{\lambda}) - f(\underset{i}{\lambda}))\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(IJ)} \tag{3.4.46}
$$

$$
(i = I,\ j = J,\ \text{不对指标取和})
$$

将 (3.4.41) 与 (3.4.42) 式分别代入 (3.4.45) 与 (3.4.46) 式，得到

$$
(\overset{\ll}{\boldsymbol{\mathscr{E}}})_{(II)} = \underset{i}{\lambda} f'(\underset{i}{\lambda})\, d_{(ii)} \quad \begin{pmatrix} i = I \\ \text{不对指标取和} \end{pmatrix} \tag{3.4.47a}
$$

$$
(\overset{\ll}{\boldsymbol{\mathscr{E}}})_{(IJ)} = \frac{2\underset{i}{\lambda}\underset{j}{\lambda}}{\underset{i}{\lambda} + \underset{j}{\lambda}}\,\frac{f(\underset{j}{\lambda}) - f(\underset{i}{\lambda})}{\underset{j}{\lambda} - \underset{i}{\lambda}}\, d_{(ij)}
$$

$$
\begin{pmatrix} i = I,\ j = J,\ i \neq j \\ \text{不对指标取和} \end{pmatrix} \tag{3.4.47b}
$$

当 (3.4.47b) 式中 $\underset{i}{\lambda} = \underset{j}{\lambda}$ 时，Euler 方向不能唯一确定；此时可规定 (3.4.47b) 式取 $\underset{j}{\lambda} \to \underset{i}{\lambda}$ 时之极限值，即

$$
(\overset{\ll}{\boldsymbol{\mathscr{E}}})_{(IJ)} = \underset{i}{\lambda} f'(\underset{i}{\lambda}) d_{(ij)} \quad \begin{pmatrix} i = I,\ j = J,\ i \neq j \\ \text{不对指标取和} \end{pmatrix} \tag{3.4.48}
$$

(3.4.47)与(3.4.48)式可写成统一的形式：

$$(\overset{\wr\wr}{\mathscr{E}})_{(IJ)} = \frac{2\underset{i}{\lambda}\underset{j}{\lambda}}{\underset{i}{\lambda} + \underset{j}{\lambda}} \varphi(i, j) d_{(ij)} \quad \begin{pmatrix} i = I,\ j = J \\ \text{不对指标取和} \end{pmatrix} \tag{3.4.49}$$

式中

$$\varphi(i, j) = \frac{f(\underset{j}{\lambda}) - f(\underset{i}{\lambda})}{\underset{j}{\lambda} - \underset{i}{\lambda}} \quad \text{当 } \underset{i}{\lambda} \neq \underset{j}{\lambda}, \tag{3.4.50}$$

$$= f'(\underset{i}{\lambda}) \qquad\qquad \text{当 } \underset{i}{\lambda} = \underset{j}{\lambda}$$

对于 Seth 应变度量类(2.9.32)式，只需取函数 $f(\lambda)$ 如(2.9.31)式，因此

$$\overset{\wr\wr}{\mathbf{E}}{}^{(n)} = \sum_{I,J} (\overset{\wr\wr}{\mathbf{E}}{}^{(n)})_{(IJ)} \underset{I}{\mathbf{N}}\underset{J}{\mathbf{N}} \tag{3.4.51}$$

式中

$$(\overset{\wr\wr}{\mathbf{E}}{}^{(n)})_{(IJ)} = \frac{2\underset{i}{\lambda}\underset{j}{\lambda}}{\underset{i}{\lambda} + \underset{j}{\lambda}} \varphi(i, j) d_{(ij)} \tag{3.4.52}$$

这里

$$\varphi(i, j) = \frac{1}{2n} \frac{\underset{j}{\lambda}{}^{2n} - \underset{i}{\lambda}{}^{2n}}{\underset{j}{\lambda} - \underset{i}{\lambda}} \quad \text{当 } \underset{i}{\lambda} \neq \underset{j}{\lambda}$$

$$(i = I,\ j = J, \quad \text{不对指标取和}) \tag{3.4.53}$$

$$= \underset{i}{\lambda}{}^{2n-1} \qquad\qquad \text{当 } \underset{i}{\lambda} = \underset{j}{\lambda}$$

当 $n = 1/2$ 时，恒有 $\varphi(i,j) = 1$，(3.4.52)式导致(3.4.39)式。当 $n = 1$ 时，(3.4.51)式给出

$$\overset{\wr\wr}{\mathbf{E}}{}^{(1)} = \overset{\wr\wr}{\mathbf{E}} = \sum_{I,J} \underset{i}{\lambda}\underset{j}{\lambda} d_{(ij)} \underset{I}{\mathbf{N}}\underset{J}{\mathbf{N}} \quad (i = I,\ j = J,\ \text{不对指标取和}) \tag{3.4.54}$$

当 $n=-1$ 时，则有

$$\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}{}^{(-1)} = \sum_{I,J} \lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1} d_{(ij)} \mathbf{N}_I \mathbf{N}_J \tag{3.4.55}$$

$(i=I,\ j=J$，不对指标取和)

当 $n=0$ 时，取(3.4.53)式当 $n\to 0$ 之极限，得到

$$\varphi_{(i,j)} = \begin{cases} \dfrac{\ln\lambda_j - \ln\lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} & \text{当 } \lambda_i \neq \lambda_j \\[2ex] \dfrac{1}{\lambda_i} & \text{当 } \lambda_i = \lambda_j \end{cases} \tag{3.4.56}$$

因此

$$\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}{}^{(0)} = \sum_{I,J} (\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}{}^{(0)})_{(IJ)} \mathbf{N}_I \mathbf{N}_J \tag{3.4.57}$$

式中

$$(\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}{}^{(0)})_{(IJ)} = \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}(\ln\lambda_j - \ln\lambda_i) d_{(ij)} \quad \text{当 } \lambda_i \neq \lambda_j$$

$(i=I,\ j=J$、不对指标取和)

$$= d_{(ij)} \tag{3.4.58}$$

最后，我们来讨论对应于(2.9.28)式函数 $f(\lambda)$ 与 $\bar{f}(\lambda)$ 的两种不同的 Hill 应变度量率 $\dot{\overset{\ll}{\mathscr{E}}}$ 与 $\dot{\bar{\overset{\ll}{\mathscr{E}}}}$ 之间的关系。将(2.9.40)式对时间 t 求导，得

$$\dot{\bar{\overset{\ll}{\mathscr{E}}}} - \dot{\overset{\ll}{\mathscr{E}}} = m(\dot{\overset{\ll}{\mathscr{E}}}\cdot\overset{\ll}{\mathscr{E}} + \overset{\ll}{\mathscr{E}}\cdot\dot{\overset{\ll}{\mathscr{E}}}) + \cdots \tag{3.4.59}$$

$$m = \frac{1}{2}[\bar{f}''(1) - f''(1)]$$

式中…表示更高次(对 $\overset{\ll}{\mathscr{E}}$)的项。如果取即时构形为参考构形，则

$\mathscr{E}=\mathscr{E}=\mathbf{0}$, (3.4.59) 式给出 $\dot{\bar{\mathscr{E}}}=\dot{\mathscr{E}}$。但当取 $\mathscr{E}=\mathbf{E}^{(1)}=\mathbf{E}$ 时，由(3.4.22)式，$\dot{\mathscr{E}}=\mathbf{d}$。因此可得结论，当取即时构形为参考构形时，不论 $f(\lambda)$ 如何，Hill 应变度量率

$$\dot{\mathscr{E}}=\mathbf{d} \qquad \text{当}\ \mathbf{D}=\mathbf{I} \tag{3.4.60}$$

五、即时构形 κ 中应变张量的物质导数①

前一小节讨论的 Seth 应变度量（或者更广泛些，Hill 应变度量）都是参考构形 $\mathscr{R}$ 中的张量。现在我们来讨论即时构形 κ 中应变张量（例如 $\overset{\gg}{\mathbf{B}}$, $\overset{\gg}{\mathbf{V}}$ 等）的物质导数。由(2.6.16)式

$$\overset{\gg}{\mathbf{B}}=\overset{\gg}{\mathbf{V}}{}^2=\overset{\gg}{\mathbf{V}}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{V}} \tag{3.4.61}$$

求物质导数后，得到

$$\dot{\overset{\gg}{\mathbf{B}}}=\dot{\overset{\gg}{\mathbf{V}}}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{V}}+\overset{\gg}{\mathbf{V}}\cdot\dot{\overset{\gg}{\mathbf{V}}} \tag{3.4.62}$$

但由(2.5.2)

$$\overset{\gg}{\mathbf{B}}=\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{-1}=\overset{\times}{\mathbf{D}}\cdot\overset{\diamond}{\mathbf{D}}{}^*$$

对上式求物质导数，并利用(3.2.5b)，得到

$$\begin{aligned}
\dot{\overset{\gg}{\mathbf{B}}}&=\dot{\overset{\times}{\mathbf{D}}}\cdot\overset{\diamond}{\mathbf{D}}{}^*+\overset{\times}{\mathbf{D}}\cdot\dot{\overset{\diamond}{\mathbf{D}}}{}^*=\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\overset{\times}{\mathbf{D}}\cdot\overset{\diamond}{\mathbf{D}}{}^*+\overset{\times}{\mathbf{D}}\cdot(\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\overset{\times}{\mathbf{D}})^*\\
&=\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\overset{\times}{\mathbf{D}}\cdot\overset{\diamond}{\mathbf{D}}{}^*+\overset{\times}{\mathbf{D}}\cdot\overset{\diamond}{\mathbf{D}}{}^*\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^*\\
&=\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{V}}{}^2+\overset{\gg}{\mathbf{V}}{}^2\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^*
\end{aligned} \tag{3.4.63}$$

由(2.6.16)式 $\overset{\gg}{\mathbf{V}}$ 在 Euler 标架中的分解式为

$$\overset{\gg}{\mathbf{V}}=\sum_i \underset{i}{\lambda}\,\underset{i}{\mathbf{n}}\,\underset{i}{\mathbf{n}} \tag{3.4.64}$$

---

① 参考 138 页注①

设 $\overset{\gg}{\mathbf{V}}$ 在 Euler 标架中的分解式为

$$\overset{\gg}{\mathbf{V}}=\sum_{i,j}(\overset{\gg}{\mathbf{V}})_{(ij)}\underset{i}{\mathbf{n}}\underset{j}{\mathbf{n}} \tag{3.4.65}$$

则由(3.4.62)与(3.4.63)各得

$$\overset{\gg}{\mathbf{B}}=\sum_{i,j}(\dot{\mathbf{V}})_{(ij)}(\underset{i}{\lambda}+\underset{j}{\lambda})\underset{i}{\mathbf{n}}\underset{j}{\mathbf{n}} \tag{3.4.66}$$

与

$$\overset{\gg}{\mathbf{B}}=\sum_{i,j}(L_{(ij)}\underset{j}{\lambda}^2+\underset{i}{\lambda}^2L_{(ji)})\underset{i}{\mathbf{n}}\underset{j}{\mathbf{n}} \tag{3.4.67}$$

比较(3.4.66)与(3.4.67)，得

$$(\overset{\gg}{\mathbf{V}})_{(ij)}=\frac{L_{(ij)}\underset{j}{\lambda}^2+L_{(ji)}\underset{i}{\lambda}^2}{\underset{i}{\lambda}+\underset{j}{\lambda}}\quad\text{（不对指标取和）} \tag{3.4.68}$$

按(3.3.4)式将速度梯度 $\mathbf{L}$ 进行加法分解，可得

$$\begin{aligned}L_{(ij)}&=d_{(ij)}+w_{(ij)}\\L_{(ji)}&=d_{(ij)}-w_{(ij)}\end{aligned} \tag{3.4.69}$$

将(3.4.69)代入(3.4.68)，得到

$$(\overset{\gg}{\mathbf{V}})_{(ij)}=\frac{d_{(ij)}(\underset{j}{\lambda}^2+\underset{i}{\lambda}^2)+w_{(ij)}(\underset{j}{\lambda}^2-\underset{i}{\lambda}^2)}{\underset{i}{\lambda}+\underset{j}{\lambda}}\quad\text{（不对指标取和）} \tag{3.4.70}$$

有了 $\overset{\gg}{\mathbf{V}}$ 以后，就可得到 Euler 旋率 $\overset{\gg}{\Omega}{}^{\text{Eul}}$。将(3.4.68)或(3.4.70)代入(3.3.65b)，得到①

$$\Omega_{(ij)}^{\text{Eul}}=\frac{L_{(ij)}\underset{j}{\lambda}^2+L_{(ji)}\underset{i}{\lambda}^2}{\underset{j}{\lambda}^2-\underset{i}{\lambda}^2}\quad(\underset{i}{\lambda}\neq\underset{j}{\lambda}\ \text{不对指标取和}) \tag{3.4.71}$$

① (3.4.71)—(3.4.75)式见程莉、黄克智：固化物质导数与标架旋率，力学学报，1987 年第 6 期。

或

$$\Omega^{\mathrm{Eul}}_{(ij)} = \frac{d_{(ij)}(\lambda_j^2 + \lambda_i^2) + w_{(ij)}(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}$$

$$(\lambda_j \neq \lambda_i, \text{不对指标取和}) \qquad (3.4.72)$$

利用(3.3.40)式，可以由 $\mathring{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Lag}}$ 与 $\mathring{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Eul}}$ 求出相对旋率 $\mathring{\boldsymbol{\Omega}}$。将(3.3.36)的前两式代入(3.3.40)，并注意(3.3.18)式，得到：

$$\mathring{\boldsymbol{\Omega}} = \sum_{i,j} \Omega_{(ij)} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \qquad (3.4.73)$$

式中

$$\Omega_{(ij)} = \Omega^{\mathrm{Eul}}_{(ij)} - \Omega^{\mathrm{Lag}}_{(IJ)} \begin{pmatrix} i = I \\ j = J \end{pmatrix} \qquad (3.4.74)$$

将(3.4.72)与(3.4.42)代入(3.4.74)的 $\Omega^{\mathrm{Eul}}_{(ij)}$ 与 $\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(IJ)}$，得

$$\Omega_{(ij)} = \frac{d_{(ij)}(\lambda_j^2 + \lambda_i^2) + w_{(ij)}(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} - \frac{2\lambda_i\lambda_j d_{(ij)}}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}$$

$$= \frac{d_{(ij)}(\lambda_j - \lambda_i) + w_{(ij)}(\lambda_j + \lambda_i)}{\lambda_j + \lambda_i} (\text{不对指标取和})$$

即

$$\Omega_{(ij)} = w_{(ij)} + d_{(ij)} \frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_j + \lambda_i} \quad (\text{不对指标取和}) \qquad (3.4.75)$$

§3.5 加速度梯度，Rivlin-Ericksen 张量

一、加速度梯度

质点的速度为

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\,\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v}, \text{记作} \overset{(1)}{\mathbf{p}}$$

而加速度则为

$$\ddot{\mathbf{p}} = \frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2} = \mathbf{a} \quad \text{记作} \quad \overset{(2)}{\mathbf{p}}$$

定义 n 阶加速度为

$$\overset{(n)}{\mathbf{p}} = \frac{d^n\mathbf{p}}{dt^n}$$

因此

$$\frac{d}{dt}\overset{(n)}{\mathbf{p}} = \overset{(n+1)}{\mathbf{p}}$$

由（3.2.2a）式，速度梯度为

$$\begin{aligned} \overset{\gg}{\mathbf{L}} &= \mathbf{v}\overset{\rightarrow}{\nabla} = \mathbf{v}_{,j}\mathbf{g}^j = v^i_{;j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j \\ &= \mathbf{v}_{,B}\hat{\mathbf{g}}^B = \hat{v}^A_{;B}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}^B \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

与此类似，定义加速度梯度为

$$\begin{aligned} \overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(2)} &= \mathbf{a}\overset{\rightarrow}{\nabla} = \mathbf{a}_{,j}\mathbf{g}^j = a^i_{;j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j \\ &= \mathbf{a}_{,B}\hat{\mathbf{g}}^B = \hat{a}^A_{;B}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}^B \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

……

及 n 阶加速度梯度为

$$\begin{aligned} \overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(n)} &= \overset{(n)}{\mathbf{p}}\overset{\rightarrow}{\nabla} = \overset{(n)}{\mathbf{p}}_{,j}\mathbf{g}^j = \overset{(n)}{p}{}^i_{;j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j \\ &= \overset{(n)}{\mathbf{p}}_{,B}\hat{\mathbf{g}}^B = \overset{\widehat{(n)}}{p}{}^A_{;B}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}^B \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

因此当 $n = 1$ 时，

$$\overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(1)} = \overset{\gg}{\mathbf{L}} \tag{3.5.4}$$

约定当 $n = 0$ 时，

$$\overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(0)} = \overset{\gg}{\mathbf{I}} \tag{3.5.5}$$

n 阶加速度梯度 $\overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(n)}$ 的物质导数为

$$\dot{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}}_{(n)} = (\overset{(n)}{\mathbf{p}}_{,B}\hat{\mathbf{g}}^B)^{\cdot} = \overset{(n+1)}{\mathbf{p}}_{,B}\hat{\mathbf{g}}^B + \overset{(n)}{\mathbf{p}}_{,B}\frac{d\hat{\mathbf{g}}^B}{dt}$$

利用(3.1.13s)式，即

$$\frac{d\hat{\mathbf{g}}^B}{dt} = -\hat{\mathbf{g}}^B \cdot \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}$$

代入，可得

$$\dot{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}}_{(n)} = \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}_{(n+1)} - \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}_{(n)} \cdot \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}} \qquad (3.5.6)$$

此式可适用于一切 $n \geqslant 0$ 的情况。

二、变形梯度 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}$ 的n阶物质导数

由(3.2.4)与(3.2.5)式，变形梯度 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}$ 及其物质导数为①

$$\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}} = \mathbf{p}\overset{\langle}{\nabla} = \mathbf{p}_{,A}\mathbf{G}^A = \hat{\mathbf{g}}_A\mathbf{G}^A$$

$$\dot{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}} = \frac{d\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{dt} = \left(\frac{\partial\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{\partial t}\right)_{\mathbf{P}} = \frac{\partial\mathbf{p}_{,A}}{\partial t}\mathbf{G}^A = \mathbf{v}_{,A}\mathbf{G}^A$$

$$= (\mathbf{v}_{,B}\hat{\mathbf{g}}^B) \cdot (\hat{\mathbf{g}}_A\mathbf{G}^A) = (\mathbf{v}\overset{\rangle}{\nabla}) \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}} = \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}$$

故

$$\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}} = \dot{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}} \cdot \overset{-1}{\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}} \qquad (3.5.7)$$

类似地，变形梯度 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}$ 的二阶物质导数为

$$\ddot{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}} = \frac{d^2\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{dt^2} = \left(\frac{\partial^2\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{\partial t^2}\right)_{\mathbf{P}} = \frac{\partial^2\mathbf{p}_{,A}}{\partial t^2}\mathbf{G}^A = \mathbf{a}_{,A}\mathbf{G}^A$$

$$= (\mathbf{a}_{,B}\hat{\mathbf{g}}^B) \cdot (\hat{\mathbf{g}}_A\mathbf{G}^A) = (\mathbf{a}\overset{\rangle}{\nabla}) \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}$$

$$= \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{L}}_{(2)} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}} \qquad (3.5.8)$$

---

① 这里改变了一下(3.2.5)式 $\dot{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}$ 的推导方法，以便推广于 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}$ 的高阶物质导数。

故
$$\overset{))}{\mathbf{L}}_{(2)}=\overset{)(}{\ddot{\mathbf{D}}}\cdot\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}$$

…

$$\overset{)(}{\mathbf{D}}{}^{(n)}=\frac{d^n\overset{)(}{\mathbf{D}}}{dt^n}=\left(\frac{\partial^n\overset{)(}{\mathbf{D}}}{\partial t^n}\right)_{\mathbf{P}}=\frac{\partial^n\mathbf{p}_{,A}}{\partial t^n}\mathbf{G}^A=\overset{(n)}{\mathbf{p}}_{,A}\mathbf{G}^A$$

$$=(\overset{(n)}{\mathbf{p}}_{,B}\hat{\mathbf{g}}^B)\cdot(\hat{\mathbf{g}}_A\mathbf{G}^A)$$

$$=(\overset{(n)}{\mathbf{p}}\overleftarrow{\nabla})\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}=\overset{))}{\mathbf{L}}_{(n)}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}\tag{3.5.9}$$

故
$$\overset{))}{\mathbf{L}}_{(n)}=\overset{)(}{\mathbf{D}}{}^{(n)}\cdot\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\tag{3.5.9'}$$

约定当 $n=0$ 时

$$\overset{)(}{\mathbf{D}}{}^{(0)}=\overset{)(}{\mathbf{D}}$$

因此利用(3.5.5)式，可知(3.5.9)与(3.5.9)′式适用于 $n\geqslant0$。

习题3.16 利用(3.5.9)式证明线元 $d\mathbf{p}$ 的 n 阶物质导数为(以 $\tilde{\partial}(\ldots)/\tilde{\partial}t$ 表示想象 $d\mathbf{p}$“固化”于变形体时对时间 t 的导数)

$$\overset{(n)}{\overline{d\mathbf{p}}}=\frac{\tilde{\partial}^n}{\tilde{\partial}t^n}(d\mathbf{p})=\overset{))}{\mathbf{L}}_{(n)}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot d\mathbf{P}=\overset{))}{\mathbf{L}}_{(n)}\cdot d\mathbf{p}$$

三、Green（右 Cauchy-Green）变形张量 $\overset{((}{\mathbf{C}}$ 的 n 阶物质导数

由(3.4.3)与(3.4.5)式，Green 变形张量 $\overset{((}{\mathbf{C}}$ 及其物质导数为

$$\overset{((}{\mathbf{C}}=\overset{()}{\mathbf{D}}{}^*\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}\tag{3.5.10}$$

$$\overset{((}{\dot{\mathbf{C}}}=\frac{d}{dt}(\overset{()}{\mathbf{D}}{}^*\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}})=\overset{()}{\mathbf{D}}{}^*\cdot(\overset{))}{\mathbf{L}}{}^*+\overset{))}{\mathbf{L}})\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}$$

$$=2\overset{()}{\mathbf{D}}{}^*\cdot\overset{))}{\mathbf{d}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}\tag{3.5.11}$$

类似地，$\overset{((}{\mathbf{C}}$ 的 n 阶物质导数为（以 $\binom{n}{i}$ 表示 n 中取 i 的组合

数）

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}}^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n}(\overset{()}{\mathbf{D}}^* \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}}) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\overset{()}{\mathbf{D}}^{(i)*} \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}}^{(n-i)}$$

将(3.5.9)式代入，得

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}}^{(n)} = \overset{()}{\mathbf{D}}^* \cdot \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\overset{\gg}{\mathbf{L}}^*_{(i)} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(n-i)}\right) \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}} \qquad (3.5.12)$$

易证右端的括弧（　）(见后面的 (3.5.15) 式)为一对称张量，因此 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}^{(n)}$ 为对称张量。当 $n=1$ 时，(3.5.12) 式即变成(3.5.11)式；当 $n=0$ 时，即变成(3.5.10)式。

由(3.4.3)式，$\overset{\ll}{\mathbf{C}}$ 的分解式为

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}} = C_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B = \mathring{g}_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B \qquad (3.5.13)$$

因此 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}^{(n)}$ 的分解式为

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}}^{(n)} = \frac{d^n \mathring{g}_{AB}}{dt^n}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B \qquad (3.5.14)$$

四、Rivlin-Ericksen 张量

1. 定义

令(3.5.12)右端的括弧（　）为

$$\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\overset{\gg}{\mathbf{L}}^*_{(i)} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(n-i)} \qquad (3.5.15)$$

$\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}$ 称为 n 阶 **Rivlin-Ericksen** 张量，它可通过 1 至 n 阶加速度梯度 $\mathbf{L}_{(i)}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 来表示。易证 $\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}$ 为对称张量①。利用约

① 利用等式 $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$。

定的(3.5.5)式，上式又可写作

$$\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}=\overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(n)}(t)+\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^{*}_{(n)}(t)+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^{*}_{(i)}(t)\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(n-i)}(t) \qquad (3.5.15)'$$

式中以时间 t 作为构形 ${}_{n}(t)$ 中张量的自变量，以表示它们是随 t 而变化的。特例：当 $n=1$ 时，

$$\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(1)}=2\overset{\gg}{\mathbf{d}} \qquad (3.5.16)$$

故一阶 Rivlin-Ericksen 张量就是两倍变形率。

于是(3.5.12)式可写作

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{(n)}=\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}} \qquad (3.5.17a)$$

故

$$\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}=\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^{*}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{(n)}\cdot\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} \qquad (3.5.17b)$$

将(3.5.14)代入 (3.5.17b) 式，并利用 (2.3.23) 的第一式，可得 $\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}$ 的分解式

$$\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}=\frac{d^{n}\hat{g}_{AB}}{dt^{n}}\,\hat{\mathbf{g}}^{A}\hat{\mathbf{g}}^{B} \qquad (3.5.17c)$$

2. 递推公式

$$\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n+1)}=\dot{\overset{\gg}{\mathbf{A}}}_{(n)}+\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}+\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^{*}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)} \qquad (3.5.18)$$

约定 $\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(0)}=\overset{\gg}{\mathbf{I}}$，则此式可适用于 $n\geqslant 0$。

证 由 (3.5.17a) 式，将 n 改为 $n+1$，得

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{(n+1)}=\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n+1)}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}} \qquad (3.5.19)$$

同时，(3.5.17a) 式对时间 t 求导数，得

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{(n+1)}=\frac{d}{dt}\overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{(n)}=(\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}})^{\bullet}$$

$$=\dot{\overset{\circ}{\mathbf{D}}}{}^*\cdot\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}\cdot\overset{\times}{\mathbf{D}}+\overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^*\cdot\dot{\overset{\gg}{\mathbf{A}}}_{(n)}\cdot\overset{\times}{\mathbf{D}}$$

$$+\overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^*\cdot\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}\cdot\dot{\overset{\times}{\mathbf{D}}}$$

将(3.2.5)与(3.2.6)式代入，得

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{(n+1)}=\overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^*\cdot(\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^*\cdot\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}+\dot{\overset{\gg}{\mathbf{A}}}_{(n)}+\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}})\cdot\overset{\times}{\mathbf{D}} \quad (3.5.20)$$

比较(3.5.19)与(3.5.20)式，即得(3.5.18)式。(3.5.18) 式也可以由(3.5.17c) 式对 t 求导，并利用(3.1.13s)式来证明。

习题 3.17 直接由 (3.5.15) 式对时间 t 求导以证明递推公式(3.5.18)。

[提示] 由 (3.5.15) 式对时间 t 求导，并利用 (3.5.6) 与 (3.5.15)式，得

$$\dot{\overset{\gg}{\mathbf{A}}}_{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\dot{\overset{\gg}{\mathbf{L}}}{}^*_{(i)}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(n-i)}+\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^*_{(i)}\cdot\dot{\overset{\gg}{\mathbf{L}}}_{(n-i)})$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}[(\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^*_{(i+1)}-\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^*\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^*_{(i)})\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(n-i)}$$

$$+\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^*_{(i)}\cdot(\overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(n+1-i)}-\overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(n-i)}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}})]$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^*_{(i+1)}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(n-i)}$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^*_{(i)}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(n+1-i)}-\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^*\cdot\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}$$

$$-\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}$$

将右端第一个“和项”中的指标 i 改为 $i-1$，并利用等式

$$\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}=\binom{n+1}{i}$$

可得

$$\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^{*}_{(i)} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(n+1-i)}$$

$$- \overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^{*} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)} - \overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{L}}$$

右端的"和项"正好是 $\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n+1)}$(由(3.5.15)式,其中 n 改为 $n+1$)。

3. Rivlin-Ericksen 张量 $\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}$ 也可由以下的公式来定义

$$\frac{\tilde{d}^n}{\tilde{d}t^n}[(ds)^2] = d\mathbf{p} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)} \cdot d\mathbf{p} \qquad (3.5.21)$$

式中 $\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}$ 为对称张量,$\tilde{d}(\ldots)/\tilde{d}t$ 表示将 $d\mathbf{p}$ 想象成"固化"于变形体时,(…)对时间 t 的导数(参考(3.2.11)'式)。

先证明当 $n=1$ 时,由上式定义的 $\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(1)}$ 就是两倍变形率,即证明(3.5.16)式。利用长度率 d_n(3.3.1) 式推导的过程,可得

$$\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}[(ds)^2] = \dot{\overline{d\mathbf{p}\cdot d\mathbf{p}}} = \dot{\overline{d\mathbf{p}}}\cdot d\mathbf{p} + d\mathbf{p}\cdot\dot{\overline{d\mathbf{p}}}$$

$$= (\overset{\gg}{\mathbf{L}} \cdot d\mathbf{p}) \cdot d\mathbf{p} + d\mathbf{p} \cdot (\overset{\gg}{\mathbf{L}} \cdot d\mathbf{p})$$

$$= d\mathbf{p} \cdot (\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^{*} + \overset{\gg}{\mathbf{L}}) \cdot d\mathbf{p}$$

$$= 2d\mathbf{p} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{d}} \cdot d\mathbf{p}$$

对比(3.5.21)式,故得

$$\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(1)} = 2\overset{\gg}{\mathbf{d}} \qquad \text{即(3.5.16)}$$

现在由(3.5.21)式出发来证明递推公式(3.5.18)。(3.5.21)式对 t 求导,并利用 (3.2.11a) 式,得

$$\frac{\tilde{d}^{n+1}}{\tilde{d}t^{n+1}}[(ds)^2] = d\mathbf{p} \cdot (\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^{*} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)} + \dot{\overset{\gg}{\mathbf{A}}}_{(n)}$$

$$+ \overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{L}}) \cdot d\mathbf{p}$$

式中右端的括弧(　　)为对称张量。但由(3.5.21)式,将 n 改为

$n+1$，可得

$$\frac{\tilde{d}^{n+1}}{\tilde{d}t^{n+1}}[(ds)^2]=d\mathbf{p}\cdot\overset{))}{\mathbf{A}}_{(n+1)}\cdot d\mathbf{p}$$

式中 $\overset{))}{\mathbf{A}}_{(n+1)}$ 亦为对称张量。比较以上两式，即得递推公式(3.5.18)。

既然当 $n=1$ 时，由(3.5.21)式定义的 $\overset{))}{\mathbf{A}}_{(1)}$ 同以前的结果(3.5.16)式一致，而且递推公式也与以前的(3.5.18)式一致，因此由(3.5.21)式定义的 $\overset{))}{\mathbf{A}}_{(n)}$ 对于所有的 n 都与以前(3.5.15)式所定义的一致。

习题3.18 将(2.2.18)式，即

$$(ds)^2=d\mathbf{P}\cdot\overset{((}{\mathbf{C}}\cdot d\mathbf{P}$$

代入(3.5.21)式，以证明 $\overset{((}{\mathbf{C}}{}^{(n)}$ 与 $\overset{))}{\mathbf{A}}_{(n)}$ 的关系式(3.5.17a, b)

§3.6 相对变形梯度 $\mathbf{D}_{(t)}(\tau)$ 与 Green 相对变形张量 $\mathbf{C}_{(t)}(\tau)$ 的物质导数

一、相对变形梯度 $\mathbf{D}_{(t)}(\tau)$ 的物质导数

以 $\mathbf{D}_{(t)}(\tau)$ 表示相对变形梯度(§2.12)，即自构形 $\mathscr{B}(t)$ 变换到构形 $\mathscr{B}(\tau)$ 的变形梯度。由(2.12.7)式

$$\mathbf{D}(\tau)=\mathbf{D}_{(t)}(\tau)\cdot\mathbf{D}(t) \tag{3.6.1}$$

令 t 为某固定的时刻，而 τ 为时间变量。显然，当 $\tau=t$ 时

$$\mathbf{D}_{(t)}(t)=\mathbf{I} \tag{3.6.2}$$

记对 τ 的导数，即物质导数为

$$(\quad)^{\cdot}=\left(\frac{\partial(\quad)}{\partial\tau}\right)_{\mathbf{P}}=\frac{d(\quad)}{d\tau}$$

(3.6.1)式对 τ 求导，得

$$\dot{\mathbf{D}}(\tau) = \dot{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{D}(t) \tag{3.6.3a}$$

故

$$\dot{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau) = \dot{\mathbf{D}}(\tau) \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}(t) \tag{3.6.3b}$$

令 $\tau = t$，并记

$$\dot{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau)\big|_{\tau=t} = \dot{\mathbf{D}}_{(t)}(t) \tag{3.6.4}$$

由(3.6.3b)，并利用(3.5.7)式，得

$$\dot{\mathbf{D}}_{(t)}(t) = \dot{\mathbf{D}}(t) \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}(t) = \mathbf{L}(t) \tag{3.6.5}$$

因此，t 时刻的速度梯度 $\mathbf{L}(t)$ 就是以该时刻的构形 $\kappa(t)$ 为参考构形，相对变形梯度 $\mathbf{D}_{(t)}(\tau)$ 在该时刻的物质导数。也就是，物体从 t 时刻的构形离开它自身的变形梯度的物质导数。

同理，(3.6.1)式对 τ 求 n 阶导数，得

$$\mathbf{D}^{(n)}(\tau) = \mathbf{D}_{(t)}^{(n)}(\tau) \cdot \mathbf{D}(t) \tag{3.6.6a}$$

$$\mathbf{D}_{(t)}^{(n)}(\tau) = \mathbf{D}^{(n)}(\tau) \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}(t) \tag{3.6.6b}$$

在后一式中，令 $\tau = t$，并利用(3.5.9)′式，得到

$$\mathbf{D}_{(t)}^{(n)}(t) = \mathbf{D}^{(n)}(t) \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}(t) = \mathbf{L}_{(n)}(t) \tag{3.6.7}$$

因此 t 时刻的 n 阶加速度梯度 $\mathbf{L}_{(n)}(t)$就是以该时刻的构形 $\kappa(t)$为参考构形，相对变形梯度 $\mathbf{D}_{(t)}(\tau)$ 在该时刻的 n 阶物质导数. 也就是，物体从 t 时刻的构形离开它自身的变形梯度的 n 阶物质导数。

将 $\mathbf{D}_{(t)}(\tau)$ 的极分解式(2.12.20)对 τ 求导，得

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau) &= \mathbf{R}_{(t)}(\tau) \cdot \dot{\mathbf{U}}_{(t)}(\tau) + \dot{\mathbf{R}}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{U}_{(t)}(\tau) \\ &= \dot{\mathbf{V}}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{R}_{(t)}(\tau) + \mathbf{V}_{(t)}(\tau) \cdot \dot{\mathbf{R}}_{(t)}(\tau)\end{aligned} \tag{3.6.8}$$

取 $\tau = t$，并注意(2.12.11)与(2.12.22)，得到

$$\dot{\mathbf{D}}_{(t)}(t) = \dot{\mathbf{U}}_{(t)}(t) + \dot{\mathbf{R}}_{(t)}(t) = \dot{\mathbf{V}}_{(t)}(t) + \dot{\mathbf{R}}_{(t)}(t) \tag{3.6.9}$$

式中左端就是速度梯度 $\mathbf{L}_{(t)}$ (见(3.6.5)式)。因 $\mathbf{R}_{(t)}(\tau)$ 为正交张量：

$$\mathbf{R}_{(t)}(\tau)\cdot\mathbf{R}^{*}_{(t)}(\tau)=\mathbf{I}$$

对 τ 求导后，令 $\tau=t$，可证

$$\dot{\mathbf{R}}_{(t)}(t)+\dot{\mathbf{R}}^{*}_{(t)}(t)=\mathbf{0}$$

可见 $\dot{\mathbf{R}}_{(t)}(t)$ 为反对称张量，因此(3.6.9)式就是 $\dot{\mathbf{D}}_{(t)}(t)$ 的加法分解，故

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}}_{(t)}(t)&=\dot{\mathbf{V}}_{(t)}(t)=\mathbf{d}(t)\\ \dot{\mathbf{R}}_{(t)}(t)&=\mathbf{w}(t)\end{aligned}\tag{3.6.10}$$

因此 t 时刻的变形率 $\mathbf{d}(t)$ 就是以该时刻的构形 $\varkappa(t)$ 为参考构形，右(或左)伸长张量 $\mathbf{U}_{(t)}(\tau)$ (或 $\mathbf{V}_{(t)}(\tau)$) 在该时刻的物质导数，也就是物体从 t 时刻的构形 $\varkappa(t)$ 离开它自身的右(左)伸长张量的物质导数；而 t 时刻的旋率 $\mathbf{w}(t)$ 则为转动张量 $\mathbf{R}_{(t)}(\tau)$ 在 t 时刻的物质导数。

二、Green 相对变形张量 $\mathbf{C}_{(t)}(\tau)$ 的物质导数

由(2.12.12)的第三式，从构形 $\varkappa(t)$ 到 $\varkappa(\tau)$ 的 Green 相对变形张量为

$$\mathbf{C}_{(t)}(\tau)=\mathbf{D}_{(t)}(\tau)^{*}\cdot\mathbf{D}_{(t)}(\tau)\tag{3.6.11}$$

仿(3.5.11)式的推导，将上式对时间 τ 求导，得

$$\dot{\mathbf{C}}_{(t)}(\tau)=\dot{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau)^{*}\cdot\mathbf{D}_{(t)}(\tau)+\mathbf{D}_{(t)}(\tau)^{*}\cdot\dot{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau)$$

令 $\tau=t$，并注意(3.6.2)，(3.6.5)和(3.5.16)式，得到

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{C}}_{(t)}(t)&=\dot{\mathbf{D}}_{(t)}(t)^{*}+\dot{\mathbf{D}}_{(t)}(t)\\ &=\mathbf{L}(t)^{*}+\mathbf{L}(t)=2\mathbf{d}(t)=\mathbf{A}_{(1)}(t)\end{aligned}\tag{3.6.12}$$

所以 t 时刻的一阶 Rivlin-Ericksen 张量 $\mathbf{A}_{(1)}(t)$ 就是以该时刻的构形 $\varkappa(t)$ 为参考构形，Green 相对变形张量 $\mathbf{C}_{(t)}(\tau)$ 在该时刻的物质导数。

同理，(3.6.11)式对 τ 求 n 阶导数，得

$$\mathbf{C}^{(n)}_{(t)}(\tau)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathbf{D}^{(i)}_{(t)}(\tau)^{*}\cdot\mathbf{D}^{(n-i)}_{(t)}(\tau)\tag{3.6.13}$$

令 $\tau=t$，利用(3.6.7)式，得

$$\mathbf{C}_{(t)}^{(n)}(t)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathbf{D}_{(t)}^{(i)}(t)^{*}\cdot\mathbf{D}_{(t)}^{(n-i)}(t)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathbf{L}_{(i)}(t)^{*}\cdot\mathbf{L}_{(n-i)}(t)$$

将上式右端与(3.5.15)式比较，可知

$$\mathbf{C}_{(t)}^{(n)}(t)=\mathbf{A}_{(n)}(t) \tag{3.6.14}$$

(3.6.14)式可以当作是 Rivlin-Ericksen 张量 $\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}(t)$ 的又一个定义：t 时刻的 n 阶 Rivlin-Ericksen 张量 $\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}(t)$ 就是以该时刻的构形 $\kappa(t)$ 为参考构形的 Green 相对变形张量 $\mathbf{C}_{(t)}(\tau)$ 在该时刻的 n 阶物质导数。

若把 t 时刻的质点坐标当作 Lagrange 坐标使用，并以 $\hat{\mathbf{g}}_A(t)$，$\hat{\mathbf{g}}^A(t)$ 表示其基矢量，则 $\mathbf{A}_{(n)}(t)$ 亦可表示如(3.5.14)式(其中 $\mathbf{G}^A$，$\mathbf{G}^B$ 改为 $\hat{\mathbf{g}}^A(t)$，$\hat{\mathbf{g}}^B(t)$，t 改为 τ)，即

$$\mathbf{A}_{(n)}(t)=\left(\frac{d^n\hat{g}_{AB}(\tau)}{d\tau^n}\right)_{\tau=t}\hat{\mathbf{g}}^A(t)\hat{\mathbf{g}}^B(t) \tag{3.6.15}$$

$$=\frac{d^n\hat{g}_{AB}(t)}{dt^n}\hat{\mathbf{g}}^A(t)\hat{\mathbf{g}}^B(t)$$

这就是以前的(3.5.17c)式。比较(3.6.15)式 $\mathbf{A}_{(n)}(t)$ 与(3.5.14)式 $\overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{(n)}(t)$，可见它们具有相同的协变分量 $d^n\hat{g}_{AB}(t)/dt^n$，但基矢量不同。(3.5.17a, b)式右端的运算的作用正在于变换基矢量。

定义右相对伸长张量为 $\mathbf{C}_{(t)}(\tau)$ 之方根，即

$$\mathbf{U}_{(t)}(\tau)=\overset{1/2}{\mathbf{C}}_{(t)}(\tau) \tag{3.6.16}$$

记其对 τ 的 n 阶导数为

$$\mathbf{U}_{(t)}^{(n)}(\tau)=\frac{d^n}{d\tau^n}\mathbf{U}_{(t)}(\tau) \tag{3.6.17}$$

则类似于(3.6.14)式，令 $\tau = t$ 可定义一组张量 $\mathbf{U}_{(t)}(t)$，它们称为伸长张量。

§3.7 输 运 定 理

设 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 为两点张量场(见(3.1.10)，(3.1.29)与(3.1.32)式)：

$$
\begin{aligned}
\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} &= \varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}(X^M, x^r, t)\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B(X^M)\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j(x^r) \\
&= \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{P}, t) \qquad (\text{物质描述法}) \\
&= \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{p}, t) \qquad (\text{空间描述法})
\end{aligned}
\tag{3.7.1}
$$

式中

$$
\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{P}, t), \quad x^i = x^i(X^A, t) \qquad (\text{物质描述法}) \tag{3.7.2}
$$

$$
\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{p}, t), \quad X^A = X^A(x^i, t) \qquad (\text{空间描述法}) \tag{3.7.3}
$$

$\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的物质导数 $d\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}/dt$ 已见(3.1.30)式(物质描述法)与(3.1.33)式(空间描述法)。

以后假定在采用物质描述法时，(3.7.1)式的分量 $\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}$ 表示成 X^M，t 的函数而不显含 x^r，即

$$
\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j} = \varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}(X^M, x^r(X^M, t), t) \equiv \varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}(X^M, t) \tag{3.7.4}
$$

而在采用空间描述法时，(3.7.1)式的分量 $\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}$ 表示成 x^r 与 t 的函数而不显含 X^M，即

$$
\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j} = \varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}(X^M(x^r, t), x^r, t) \equiv \varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}(x^r, t) \tag{3.7.5}
$$

由(3.1.30)式，在采用物质描述法时，有

$$
\begin{aligned}
\dot{\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}} &= \frac{d}{dt}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} \\
&= \left[\frac{d}{dt}\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j} + v^l\left(\varphi^{A\cdot r}_{\cdot B\cdot j}\Gamma^i_{lr} - \varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot r}\Gamma^r_{jl}\right)\right]\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j
\end{aligned}
\tag{3.7.6}
$$

而由(3.1.33)式，在采用空间描述法时，则有

$$\dot{\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}} = \frac{d}{dt}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} = \left(\frac{D}{Dt}\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}\right)\mathbf{G}_A\mathbf{G}^B\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j \tag{3.7.7a}$$

式中

$$\frac{D}{Dt}\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}\right)_{x^r} + v^s\nabla_s\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j} \tag{3.7.7b}$$

实际上,对(3.7.6)式右端的 $d\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}/dt$，利用复合函数求导公式

$$\frac{d}{dt}\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}\right)_{x^r} + v^s\frac{\partial}{\partial x^s}\varphi^{A\cdot i}_{\cdot B\cdot j}$$

即可得(3.7.7)式。

(3.7.7)式的抽象形式为(3.1.39)式①，即

$$\dot{\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}} = \frac{d}{dt}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} = \left(\frac{\partial\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t}\right)_{\text{P}} + \overset{\rangle}{\mathbf{v}}\cdot\overset{\rangle}{\square}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$= \left(\frac{\partial\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t}\right)_{\text{P}} + (\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\rangle}{\square})\cdot\mathbf{v} \tag{3.7.8}$$

当 $\overset{\rangle\cdot}{\boldsymbol{\varphi}}$ 为构形 $\boldsymbol{\kappa}(t)$ 中的一点张量(或 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 经过平移以后)时，则有(见(3.1.27)式)

$$\dot{\overset{\rangle\cdot}{\boldsymbol{\varphi}}} = \frac{d}{dt}\overset{\rangle\cdot}{\boldsymbol{\varphi}} = \left(\frac{\partial\overset{\rangle\cdot}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t}\right)_{\text{P}} + \overset{\rangle}{\mathbf{v}}\cdot\overset{\rangle}{\nabla}\overset{\rangle\cdot}{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$= \left(\frac{\partial\overset{\rangle\cdot}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t}\right)_{\text{P}} + (\overset{\rangle\cdot}{\boldsymbol{\varphi}}\overset{\rangle}{\nabla})\cdot\mathbf{v} \tag{3.7.9}$$

---

① 注意(3.7.7b)式右端两项之和为(3.7.8)式右端两项之和的分量，但(3.7.7b)式右端每一项并不分别是(3.7.8)式右端每一项的分量(见前§3.2中的习题3.5)，换言之，(3.7.7b)式右端的两项并不分别与(3.7.8)式右端的两项相对应。但当 $\overset{\rangle\cdot}{\boldsymbol{\varphi}}$ 为构形 $\boldsymbol{\kappa}(t)$ 中的一点张量时，(3.7.7 b)式右端两项分别与(3.7.9)式右端两项相对应。

一、输运定理

现在来研究 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 的体积分，并设积分域是“物质的”，即在不同的时刻积分域是由相同的物质质点组成的。设在构形 $\mathscr{R}(t_0)$中占有域 $\mathscr{V}$ （物体的某一部分)的质点，在构形 $r(t)$ 中占有域 v(图3.3)。$\mathscr{V}$ 与 v 是由相同的物质组成的，故在不同的时刻 v 的大小与形状是随着时间 t 而变化的，记作 $v(t)$。

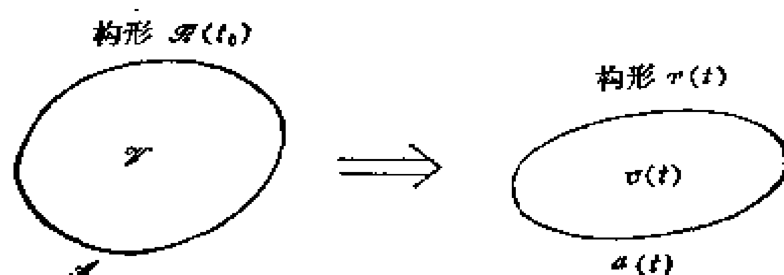


图 3.3

我们把 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 在 $v(t)$ 上的体积分记作

$$\int_{\mathscr{V}} \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} dv$$

这里，积分域是构形 $r(t)$ 中的 $v(t)$，但我们在积分号下写的是 $\mathscr{V}$，目的是为了强调积分域是物质的，对应于在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的同一个域 $\mathscr{V}$. 这一点在对 t 求导时应特别予以注意。当然，如果不对 t 求导，那么积分号下的 $\mathscr{V}$ 也可改写成 v，并无区别。

现在来求上述体积分对时间 t 的导数。我们可以利用(2.4.5)的第一式 $dv = \mathscr{J} dV$，把积分域变换到构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的 $\mathscr{V}$，即

$$\int_{\mathscr{V}} \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} dv = \int_{\mathscr{V}} \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} \mathscr{J} dV$$

然后，注意到在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的体元 dV 是不随时间 t 而变化的，并利用(3.2.16)式，得到

$$
\frac{d}{dt}\int_{v}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}dv=\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\mathscr{J}dV=\int_{\mathscr{V}}\frac{d}{dt}\,(\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\mathscr{J})dV
$$

$$
=\int_{\mathscr{V}}(\dot{\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}\mathscr{J}+\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\dot{\mathscr{J}})dV
$$

$$
=\int_{\mathscr{V}}(\dot{\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}+\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\operatorname{div}\mathbf{v})\,\mathscr{J}dV
$$

再把式右端的体积分变换回到构形 $v(t)$ 中来，得到①

$$
\frac{d}{dt}\int_{v}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\,dv=\int_{v}(\dot{\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}+\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\operatorname{div}\mathbf{v})dv \qquad (3.7.10)
$$

上式就称为输运定理，其中 $\dot{\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}$ 可以用物质描述法的(3.7.6)式，也可以用空间描述法的(3.7.7)式。

假定将 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 经过平移后变成在构形 $v(t)$ 中的一点张量 $\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}$，并采用空间描述法的(3.7.9)式，则(3.7.10)式可化作：

$$
\frac{d}{dt}\int_{v}\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}\,dv=\int_{v}(\dot{\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}}+\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}\operatorname{div}\mathbf{v})dv
$$

$$
=\int_{v}\left[\left(\frac{\partial\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t}\right)_{p}+\mathbf{v}\cdot\overset{\rangle}{\boldsymbol{\nabla}}\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}\right.
$$

$$
\left.+(\overset{\rangle}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{v})\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}\right]dv
$$

$$
=\int_{v}\left[\left(\frac{\partial\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t}\right)_{p}+\overset{\rangle}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot(\mathbf{v}\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}})\right]dv
$$

再利用积分变换公式（Gauss 公式），得到

---

① (3.7.10)式证明过程的更简单的写法(利用体元的物质导数(3.2.19)第三式)：

$$
\frac{d}{dt}\int_{v}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}dv=\int_{v}(\dot{\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}dv+\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\,\dot{\overline{dv}})=\int_{v}(\dot{\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}+\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\operatorname{div}\mathbf{v})\,dv
$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}} \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\, dv = \int_{v} \left[\left(\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t}\right)_{D} + \vec{\nabla}\cdot(\mathbf{v}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}})\right] dv$$

$$= \int_{v}\left(\frac{\partial \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t}\right)_{D} dv + \int_{a} d\vec{\mathbf{a}}\cdot \mathbf{v}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (3.7.11)$$

式中右端第二项表示沿构形 $\kappa(t)$ 中域 v 的表面 a 积分。(3.7.11)式是输运定理的另一种数学形式。

我们以后经常用到(3.7.11)式的另一种形式，将式中的$\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$改为$\rho\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$，此处 ρ 为质量密度（构形 $\kappa(t)$ 中每单位体积的质量），则(3.7.11)式成为

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}} \overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}\,\rho dv = \int_{v}\left\{\left[\frac{\partial(\rho\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}})}{\partial t}\right]_{D} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}})\right\} dv$$

$$= \int_{v}\left(\frac{\partial(\rho\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}})}{\partial t}\right)_{D} dv + \int_{a} d\vec{\mathbf{a}}\cdot\rho\mathbf{v}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (3.7.11)'$$

在输运定理的(3.7.10)，(3.7.11)，或(3.7.11)′等形式中，$\boldsymbol{\varphi}$ 可以是标量，矢量或张量。

对 (3.7.11) 式最右端的体积分项与面积分项可以有很明显的几何解释(实际上，这个几何解释也可作为(3.7.11)式的证明)。图3.4示在构形 $\kappa(t)$ 与 $\kappa(t+\Delta t)$ 中同一物质所占有的域 $v(t)$ 与 $v(t+\Delta t)$。(3.7.11)式右端的第一项，即体积分项，表示“局部导数”，即假若不考虑积分域随时间 t 的变化之结果。而右端的第二项，即面积分项，则表示由于积分域的变化所带来的影响。在 Δt 的时间间隔内，由于表面元 $d\vec{\mathbf{a}}$ 的变化，增加的体元为 $d\vec{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{v}\Delta t$（如为正值，表示增加；如为负值，则表示减少）。因此每单位时间增加的体元为 $d\vec{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{v}$，称为通过 $d\vec{\mathbf{a}}$ 的体积通量。每单位时间增加的积分元为 $d\vec{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{v}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 则称为通过 $d\mathbf{a}$ 的 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 通量。(3.7.11)式右端

的面积项就是通过表面 a 的 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 通量。

对于两点张量场 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$，则(3.7.11)式应改作

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}dv=\int_{\mathscr{V}}\left[\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\right)_{\mathbf{P}}+\overset{\rightarrow}{\square}\cdot(\mathbf{v}\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}})\right]dv \qquad (3.7.12)$$

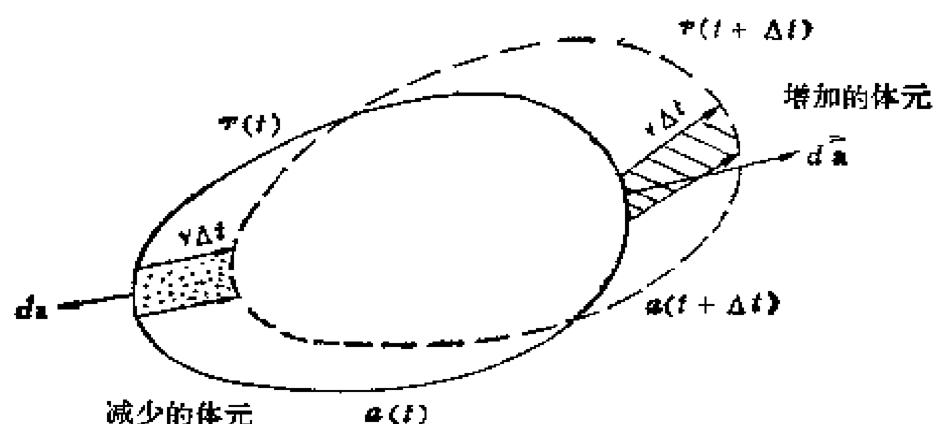


图 3.4

在(3.7.10)中令 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 为质量密度 ρ（标量），也就是在(3.7.11)′中令 $\overset{(\cdot)}{\boldsymbol{\varphi}}$ 为 1，则由于质量守恒，可得

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}}\rho dv=\int_{\mathscr{V}}(\dot{\rho}+\rho\,\mathrm{div}\mathbf{v})dv=0 \qquad (3.7.13)$$

因为积分域 $\mathscr{V}$ 为任意，故

$$\dot{\rho}+\rho\,\mathrm{div}\mathbf{v}=0 \qquad (3.7.14)$$

由于

$$\dot{\rho}=\frac{d\rho}{dt}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\mathbf{P}}+(\rho\overset{\rightarrow}{\nabla})\cdot\mathbf{v}$$

(3.7.14)式可写作

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho\mathbf{v})\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}=0 \qquad (3.7.14)'$$

式中 $\partial\rho/\partial t$ 为 $(\partial\rho/\partial t)_{\mathbf{P}}$ 的省写。(3.7.14)′式也可以由(3.7.11)式

的体积分(令 $\overset{(\cdot)}{\varphi}$ 为 ρ) 或由(3.7.11)'式的体积分(令 $\overset{(\cdot)}{\varphi}$ 为 1) 得到。(3.7.14)式或(3.7.14)'式就是质量守恒定律的数学形式，又称为连续性方程。

质量守恒律的本来形式是

$$\int_{\mathscr{V}} \rho_0 \, dV = \int_{v} \rho dv$$

由于积分域为任意，故必有

$$\rho dv = \rho_0 d\ V \quad \text{即} \quad \rho \mathscr{J} = \rho_0 \tag{3.7.15}$$

(3.7.15)式称为 Largrange 型的连续性方程。可以证明取(3.7.15)式的物质导数可得(3.7.14)式。由(3.7.15)式，对 t 取导数，得到

$$\frac{d}{dt}(\rho \mathscr{J}) = \dot{\rho} \mathscr{J} + \rho \dot{\mathscr{J}} = 0$$

故

$$\dot{\rho} + \rho \frac{\dot{\mathscr{J}}}{\mathscr{J}} = 0$$

即

$$\dot{\rho} + \rho \, \mathrm{div}\mathbf{v} = 0 \qquad \text{即(3.7.14)式}$$

由(3.7.10)与(3.7.14)式还可导出 Reynolds 输运定理，即

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}} \overset{(\cdot)}{\varphi} \rho dv = \int_{v} \dot{\overset{(\cdot)}{\varphi}} \rho dv \tag{3.7.16}$$

证 由(3.7.10)式，将 $\overset{(\cdot)}{\varphi}$ 改成 $\overset{(\cdot)}{\varphi}\rho$，得到(3.7.16)式的

$$\text{左端} = \frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}} \overset{(\cdot)}{\varphi} \rho dv = \int_{v} \left[(\overset{(\cdot)}{\varphi}\rho)^{\cdot} + \overset{(\cdot)}{\varphi}\rho \, \mathrm{div}\mathbf{v}\right] dv$$

$$= \int_{v} \left[\dot{\overset{(\cdot)}{\varphi}} \rho + \overset{(\cdot)}{\varphi}(\dot{\rho} + \rho \, \mathrm{div}\mathbf{v})\right] dv$$

再利用(3.7.14)式，即得(3.7.16)式之右端。[证毕]

(3.7.16)式表明在对 t 求导时，ρdv 表示质量元，它不随时间

t 而变化，因此只需要对积分号后面的 $\overset{(\cdot)}{\varphi}$ 求导。

习题 3.19 证明物质线积分的导数公式：

$$\frac{d}{dt}\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{p}=\int_c(\dot{\mathbf{f}}+\mathbf{f}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}})\cdot d\mathbf{p}$$

式中 $\mathbf{f}$ 为任意矢量或张量场，在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的线 C 与构形 $\mathscr{r}(t)$ 中的线 $c(t)$ 是由相同物质组成的。

［提示］ 利用线元变换公式 (2.3.11) 与变形梯度的导数公式 (3.2.5)；或者直接利用线元的物质导数 (3.2.11a) 式。

习题 3.20 直接由密度的关系式

$$\rho=\rho_0/\mathscr{J}_3^D$$

对 t 求导，以证明(3.7.14)式。此处 $\mathscr{J}_3^D=\mathscr{J}_3(\mathbf{D})$ 为变形梯度 $\mathbf{D}$ 的第三主不变量。

习题 3.21 证明物质面积分的导数公式：

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{A}}\mathbf{f}\cdot d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}=\int_a(\dot{\mathbf{f}}+\mathscr{J}_1^L\mathbf{f}-\mathbf{f}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}^*)\cdot d\overset{\rangle}{\mathbf{a}}$$

式中 $\mathbf{f}$ 为任意矢量或张量场，在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的面 $\mathscr{A}$ 与构形 $\mathscr{r}(t)$ 中的面 $a(t)$ 是由相同物质组成的。

二、非物质的体积分对时间 t 的导数

上面所述的"输运定理"研究的是"物质的"体积分的变化，积分域 $v(t)$（图 3.3）虽然大小与形状随时间 t 而变化，但却是由相同的物质构成的。以后我们有时需要研究"非物质的"体积分

$$\int_{v(t)}\overset{\rangle\cdot\rangle}{\varphi}dv$$

这里积分域 $v(t)$ 是随时间 t 而变化的，但它仅仅被看作是一个给定的不断变化着的几何图形（域），并不是由相同的物质构成的。以 $a(t)$ 表示积分域 $v(t)$ 的表面，因此 $a(t)$ 也不是"物质的"，也只是一个几何图形（曲面）。"非物质的"体积分对时间 t 的导数，不以

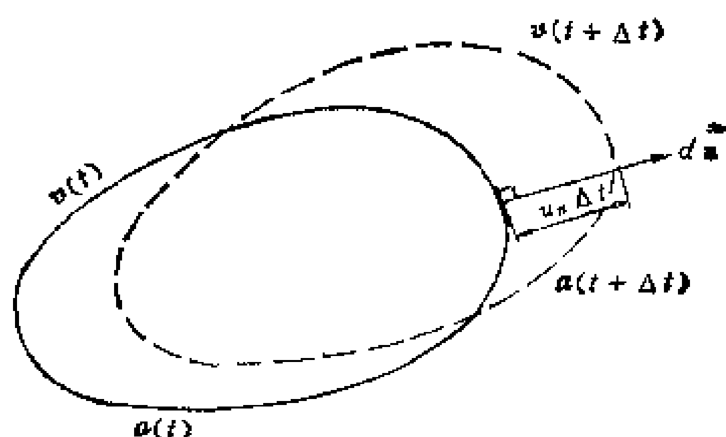


图 3.5

d/dt 而以 $\partial/\partial t$ 表示，以区别于上文中"物质的"体积分的导数。

利用图 3.4 对公式(3.7.11)最右端两项所作的几何解释，但是把该式右端面积分项中的质点速度 **v** 改为在表面 $a(t)$ 上各几何点的"速度" **u**，得到"非物质的"体积分求导公式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{v(t)}\vec{\boldsymbol{\varphi}}\,dv = \int_{v(t)}\left(\frac{\partial\vec{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t}\right)_{p}dv + \int_{a(t)}d\vec{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{u}\vec{\boldsymbol{\varphi}} \quad (3.7.17)$$

但是既然表面 $a(t)$ 只是一个几何图形(非物质的)，它上面的几何点(非质点)与 $a(t+\Delta t)$ 上的几何点(非质点)并无一一对应关系，因此"速度" **u** 不能唯一确定，但由图 3.5，**u** 沿表面 $a(t)$ 的外法线方向的投影 u_n 却是确定的。实际上，(3.7.17)式中的面积分项的计算也只需要 u_n，因为

$$d\vec{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{u} = da\vec{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{u} = da u_n,\quad da = |d\vec{\mathbf{a}}|$$

这里要特别注意 u_n 只是几何图形上各点向外移动的速度，切勿与质点速度 **v** 沿法向 **n** 的分量 v_n 混淆。为了要确定 u_n，只需要知道表面 $a(t)$ 的运动方程：

$$\psi(\mathbf{p}, t) = 0 \quad (3.7.18)$$

式中 **p** 为表面 $a(t)$ 上的点的矢径。(3.7.18)式是一个随时间 t 而变化的曲面方程。(3.7.18)式对时间 t 取导数，并记 $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{u}$，得到

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+(\psi\overleftarrow{\nabla})\cdot\mathbf{u}=0 \tag{3.7.19}$$

以 $\mathbf{n}$ 表示沿表面 $\alpha(t)$ 外法线方向的单位矢量，$\mathbf{n}$ 必平行于 $\psi\overleftarrow{\nabla}$，故

$$\mathbf{n}=\pm\frac{\psi\overleftarrow{\nabla}}{|\psi\overleftarrow{\nabla}|}$$

式中当 $\mathbf{n}$ 与 $\psi\overleftarrow{\nabla}$ 指向相同时，右端取“+”号，否则取“−”号。于是，(3.7.19)式给出

$$u_n=\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}=\mp\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big/|\psi\overleftarrow{\nabla}| \tag{3.7.20}$$

假定“物质的”与“非物质的”体积分域在某 t 时刻是相同的，即 $v(t)$，那么把这一时刻物质的体积分导数(3.7.11)式与非物质的体积分导数(3.7.17)式相减，得到它们的差值：

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}}\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\,dv-\frac{\partial}{\partial t}\int_{v(t)}\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\,dv$$

$$=\int_{\alpha(t)}d\overleftarrow{\mathbf{a}}\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u})\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}=\int_{\alpha(t)}da\,\tilde{v}_n\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varphi}} \tag{3.7.21}$$

式中

$$\tilde{v}_n=\mathbf{n}\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u})=v_n-u_n$$

表示表面 $\alpha(t)$ 上各物质质点沿外法线方向 $\mathbf{n}$ 相对于几何图形 $\alpha(t)$的速度。将(3.7.21)式中的 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}$ 改为 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\rho$，则得到

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}}\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\rho\,dv-\frac{\partial}{\partial t}\int_{v(t)}\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\rho\,dv$$

$$=\int_{\alpha(t)}d\overleftarrow{\mathbf{a}}\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u})\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\rho$$

$$=\int_{\alpha(t)}da\,\tilde{v}_n\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\rho \tag{3.7.22}$$

第四章　一般原理——平衡原理

在第二与第三章中我们只是从纯几何学的角度研究连续介质的变形与运动。这一章将开始涉及到物理学方面，即研究连续介质的物理平衡原理①，其中包括应力的理论。

§4.1　一般平衡方程

一、平衡方程的一般积分形式

所谓平衡方程，包括动量、动量矩、动能、总能的平衡方程。下面将会看到，它们都具有共同的形式。 因此我们先研究一般的平衡方程，建立积分形式的平衡方程，并由之导出场方程——微分形式的平衡方程，与间断方程。

以 $\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}$ 表示某物理量的质量密度，即物体每单位质量所含有的该物理量。这个物理量的含义可因所研究的对象而异，例如，对于质量，$\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}$ 为 1；对于动量，$\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}$ 为质点速度 $\mathbf{v}$；对于动量矩，$\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}$ 为速度矩 $\mathbf{p}\times\mathbf{v}$；对于动能，$\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}$为 $\mathbf{v}^2/2$；而对于总能，$\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}$ 为 $\mathbf{v}^2/2+\varepsilon$（$\varepsilon$ 为每单位质量的内能，即内能的质量密度）。$\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}$ 在某由相同物质构成的域 $\mathscr{V}(t)$ 上的体积分为

$$\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\Phi}}=\int_{\mathscr{V}}\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}\,\rho dv \tag{4.1.1}$$

平衡方程的一般积分形式为

---

① 这里所谓平衡，非指静力学中的"平衡"，而指某一物理量的收支平衡之意。

$$\dot{\overset{(\cdot)}{\Phi}} = \frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}} \overset{(\cdot)}{\varphi}\rho dv = -\int_{a(t)} \overset{(\cdot)}{\mathbf{q}} \cdot d\vec{\mathbf{a}}$$

$$+ \int_{\mathscr{V}(t)} \overset{(\cdot)}{\mathbf{s}}\rho dv \qquad (4.1.2)$$

式中 $\overset{(\cdot)}{\mathbf{s}}$ 为与 $\overset{(\cdot)}{\varphi}$ 同阶的张量，而 $\overset{(\cdot)}{\mathbf{q}}$ 为比 $\overset{(\cdot)}{\varphi}$ 高一阶的张量。(4.1.2)式右端第一项表示通过表面 $a(t)$ 流入体内的通量或流 $\overset{(\cdot)}{\mathbf{q}}$ 所造成的 $\overset{(\cdot)}{\Phi}$ 的变化率，而右端第二项表示体内每单位质量所含的源 $\overset{(\cdot)}{\mathbf{s}}$ 所造成的 $\overset{(\cdot)}{\Phi}$ 的变化率。下文中将会看到，$\overset{(\cdot)}{\mathbf{q}}$ 与 $\overset{(\cdot)}{\mathbf{s}}$ 的具体含义将因所研究的对象 $\overset{(\cdot)}{\varphi}$ 而异。

二、一般微分形式的平衡方程

由一般积分形式的平衡方程(4.1.2)，可导出一般微分形式的平衡方程。对(4.1.2)式左端应用 Reynolds 输运定理(3.7.16)式，对右端的面积分项应用积分变换定理(散度定理，即 Gauss 公式)，得到

$$\int_{\mathscr{V}} \dot{\overset{(\cdot)}{\varphi}}\rho dv = -\int_{\mathscr{V}} \overset{(\cdot)}{\mathbf{q}} \cdot \overleftarrow{\nabla}\, dv + \int_{\mathscr{V}} \overset{(\cdot)}{\mathbf{s}}\rho dv$$

式中积分域 $\mathscr{V} = \mathscr{V}(t)$ 为任意。因此必有

$$\rho\dot{\overset{(\cdot)}{\varphi}} + \overset{(\cdot)}{\mathbf{q}} \cdot \overleftarrow{\nabla} - \rho\overset{(\cdot)}{\mathbf{s}} = 0 \qquad (4.1.3)$$

(4.1.3)式即为一般微分形式的平衡方程，又称一般场方程。在以上的推导中，已经假定 $\dot{\overset{(\cdot)}{\varphi}}$ 为连续，$\overset{(\cdot)}{\mathbf{q}}$ 为连续可微(对 x^i)，ρ 与 $\overset{(\cdot)}{\mathbf{s}}$ 为连续。

若对 (4.1.2) 式左端应用 (3.7.11)′ 式，则经过类似于以上(4.1.3)式的推导过程，可得

$$\frac{\partial(\rho\overset{)\cdot)}{\varphi})}{\partial t}+\overset{)}{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}\overset{)\cdot)}{\varphi})=-\overset{)\cdot)}{\mathbf{q}}\cdot\overset{)}{\nabla}+\overset{)\cdot)}{s}\rho$$

即

$$\frac{\partial(\rho\overset{)\cdot)}{\varphi})}{\partial t}+[\rho\overset{)\cdot)}{\varphi}\mathbf{v}+\overset{)\cdot)}{\mathbf{q}}]\cdot\overset{)}{\nabla}-\rho\overset{)\cdot)}{s}=0 \tag{4.1.4}$$

(4.1.4)式也可由(4.1.3)式利用连续性方程(3.7.14)而导出。利用连续性方程(3.7.14)可以证明(4.1.4)式与(4.1.3)式等价，因为它们左端除了公共部分 $\overset{)\cdot)}{\mathbf{q}}\cdot\nabla-\rho\overset{)\cdot)}{s}$ 以外，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho\overset{)\cdot)}{\varphi})}{\partial t}+(\rho\overset{)\cdot)}{\varphi}\mathbf{v})\cdot\overset{)}{\nabla}\\
&=\frac{\partial(\rho\overset{)\cdot)}{\varphi})}{\partial t}+[(\rho\overset{)\cdot)}{\varphi})\overset{)}{\nabla}]\cdot\mathbf{v}+\rho(\mathbf{v}\cdot\overset{)}{\nabla})\overset{)\cdot)}{\varphi}\\
&=(\rho\overset{)\cdot)}{\varphi})^{\cdot}+\rho(\mathbf{v}\cdot\overset{)}{\nabla})\overset{)\cdot)}{\varphi}\\
&=(\rho\overset{)\cdot)}{\varphi})^{\cdot}-\dot{\rho}\overset{)\cdot)}{\varphi}=\rho\dot{\overset{)\cdot)}{\varphi}}
\end{aligned}$$

三、一般间断方程

在连续介质力学中往往出现有间断面的情况，从间断面的一侧(以“−”表示)到另一侧(以“+”表示)，某些物理量出现间断。以后我们用记号“[[ ]]”来表示某物理量(例如 φ，φ 可以是标量、矢量或张量)的间断值，即

$$[[\varphi]]=\varphi^{+}-\varphi^{-}$$

间断面的位置一般是变动的（例如气体力学中的激波是行走的），但是要注意间断面一般不是“物质的”，即不同时刻的间断面并非由相同的物质质点所构成。因此间断面只能看作是一个在变动的几何图形(曲面)，这个几何图形(即间断面)上的几何点的“速度”

$\mathbf{u}$ 不能唯一确定，但是 $\mathbf{u}$ 沿间断面的法线方向（可规定某一指向为“外法线”方向）$\mathbf{n}$ 的投影 u_n 却是确定的，见(3.7.20)式。注意区别 $\mathbf{u}$，u_n 与间断面处物质质点的速度 $\mathbf{v}$，v_n。如果间断面为速度间断面，则两侧的 $\mathbf{v}^+$，v_n^+ 与 $\mathbf{v}^-$，v_n^- 互不相同。

由积分形式的平衡方程(4.1.2)，可以导出通过间断面的间断量所必须满足的方程：

$$[[\rho\overset{(\cdot)}{\varphi}\tilde{v}_n]]+[[\overset{(\cdot)}{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{n}]]-\overset{(\cdot)}{s}_{(d)}=0 \qquad (4.1.5)$$

式中 $\overset{(\cdot)}{s}_{(d)}$ 为间断面上每单位面积的源，

$$\tilde{v}_n=v_n-u_n \qquad (4.1.6)$$

为物质质点沿间断面法线 $\mathbf{n}$ 方向相对于间断面（几何图形）的速度，两侧的值各为

$$\tilde{v}_n^+=v_n^+-u_n,\quad \tilde{v}_n^-=v_n^--u_n \qquad (4.1.7)$$

规定 $\mathbf{n}$ 的方向为自“－”到“＋”的方向。

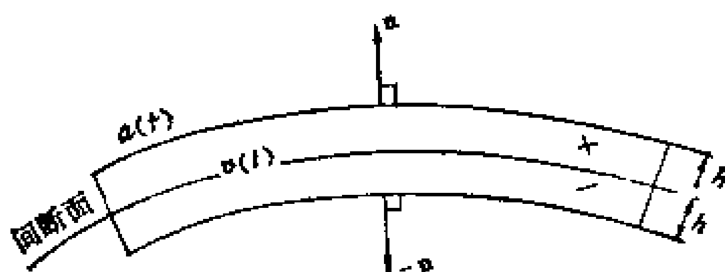


图 4.1 构形 $v(t)$中的间断面

(4.1.5)式称为一般间断方程。为了推导此式，可以考虑在间断面两侧各厚 h 的薄层(图 4.1)，把这个薄层看作是一个随间断面而运动的几何图形(域 $v(t)$)。将(4.1.2)式代入(3.7.22)式，得到在 $v(t)$ 上的“非物质的”体积分的导数：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{v(t)}\overset{(\cdot)}{\varphi}\rho dv=-\int_{a(t)}\overset{(\cdot)}{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{n}da$$

$$+\int_{v(t)}\overset{(\cdot)}{s}\rho dv-\int_{a(t)}\overset{(\cdot)}{\varphi}\rho\tilde{v}_n da \qquad (4.1.8)$$

式中 $a(t)$ 为域 $v(t)$ 的表面。在(4.1.8)式中令薄层厚度 $h \to 0$，得

$$\mathbf{0} = -(\overset{\rangle\cdot\rangle}{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n})^{+} + (\overset{\rangle\cdot}{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n})^{-} + \overset{\rangle\cdot\rangle}{\mathbf{s}}_{(d)} - (\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}\rho\tilde{v}_n)^{+}$$

$$+ (\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}\rho\tilde{v}_n)^{-}$$

于是

$$[[\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}\rho\tilde{v}_n]] + [[\overset{\rangle\cdot\rangle}{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}]] - \overset{\rangle\cdot\rangle}{\mathbf{s}}_{(d)} = \mathbf{0} \qquad \text{即(4.1.5)式}$$

特例，对于质量，平衡方程(4.1.2)中 $\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}} = 1$，$\overset{\rangle\cdot}{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$，$\overset{\rangle\cdot\rangle}{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$，场方程(4.1.3)恒满足，而间断方程(4.1.5)成为

$$[[\rho\tilde{v}_n]] - s_{(d)} = 0 \tag{4.1.9}$$

式中 $s_{(d)}$ 为间断面上每单位面积的质量源。如果 $s_{(d)} = 0$，则 $[[\rho\tilde{v}_n]] = \rho^{+}\tilde{v}_n^{+} - \rho^{-}\tilde{v}_n^{-} = 0$，间断面两侧的密度 ρ 与质点相对于间断面的法向速度 $\tilde{v}_n$ 的乘积应相等。

四、平衡方程在构形 $\mathscr{R}(\mathbf{t}_0)$ 中的表示

也可以把平衡方程的一般积分形式(4.1.2)变换为变形前的构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的体积分与面积分。利用面元变换公式(2.4.13)与(3.7.15)式 $\rho dv = \rho_0 dV$，(4.1.2) 式可写作

$$\dot{\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\Phi}}} = \frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}} \overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}\rho_0 dV$$

$$= -\int_{\mathscr{A}} \overset{\rangle\cdot\rangle}{\mathbf{q}} \cdot \mathscr{J}\overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^{*} \cdot d\mathbf{A} + \int_{\mathscr{V}} \overset{\rangle\cdot\rangle}{\mathbf{s}}\rho_0 dV \tag{4.1.10}$$

式中 $\mathscr{V}$ 为在 $\mathscr{R}(t_0)$ 构形中的固定域，$\mathscr{A}$ 为其表面。(4.1.10)式就是以在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的积分表示的平衡方程。利用散度定理，把右端的面积分项变换为体积分，得到

$$\int_{\mathscr{V}} \dot{\overset{\rangle\cdot\rangle}{\boldsymbol{\varphi}}}\rho_0 dV = -\int_{\mathscr{V}} (\mathscr{J}\overset{\rangle\cdot\rangle}{\mathbf{q}} \cdot \overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^{*}) \cdot \overleftarrow{\square} dV + \int_{\mathscr{V}} \overset{\rangle\cdot\rangle}{\mathbf{s}}\rho_0 dV$$

故

$$\rho_0 \dot{\boldsymbol{\varphi}} + (\mathscr{J} \mathbf{q} \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^*) \cdot \square - \rho_0 \mathbf{s} = 0 \qquad (4.1.11)$$

(4.1.11)式就是在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中表示的，即 Lagrange 型的微分形式平衡方程。它仍是构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的张量方程，但是自变量为 $\mathbf{P}$ 或 X^A。

现在推导一般间断方程。假定图 4.1 所示的薄层 $v(t)$ 对应于在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的域 $\mathscr{V}(t)$，其表面为 $\mathscr{A}(t)$，如图 4.2 所示。因为间断面不是由相同的物质组成的，而只是一个变动着的几何图形，在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的域 $\mathscr{V}(t)$ 是随时间 t 而变动的。将(3.7.22)式变换到 $\mathscr{R}(t_0)$ 构形中来，利用面元变换公式(2.4.13)与在 $\mathscr{R}(t_0)$ 构形中平衡方程的一般积分形式(4.1.10)式，得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_{v(t)} \boldsymbol{\varphi}\rho dv &= \frac{d}{dt}\int_{v} \boldsymbol{\varphi}\rho dv \\
&\quad - \int_{a(t)} \boldsymbol{\varphi}\rho(\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot d\mathbf{a} \\
&= -\int_{\mathscr{A}(t)} \mathbf{q}\cdot \mathscr{J}\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \mathbf{N} dA + \int_{\mathscr{V}(t)} \mathbf{s}\rho_0 dV \\
&\quad - \int_{\mathscr{A}(t)} \boldsymbol{\varphi}\rho(\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot \mathscr{J}\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \mathbf{N} dA
\end{aligned}$$

式中 $\mathbf{N}$ 为在 $\mathscr{R}(t_0)$ 中间断面的法向矢量。令薄层厚度 $h\to 0$，得到

$$\begin{aligned}
&[[\boldsymbol{\varphi}\rho\mathscr{J}\tilde{\mathbf{V}}\cdot\mathbf{N}]] + [[\mathscr{J}\mathbf{q}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^*\cdot\mathbf{N}]] \\
&\qquad - \mathbf{s}_{(d)}\sigma_{\mathbf{N}} = 0
\end{aligned} \qquad (4.1.12)$$

式中 $\sigma_{\mathbf{N}}$ 为间断面本身的面积比，

$$\tilde{\mathbf{V}} = (\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^* = \overset{-1}{\mathbf{D}}\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u})$$

$\mathbf{V}$ 是把在构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的相对速度 $(\mathbf{v}-\mathbf{u})$ 按照逆变形梯度(即

与介质本身相同的变换)变换到构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中去的结果，可称为拟相对速度。(4.1.12) 式就是在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中表示的一般间断方程，它亦可直接由 (4.1.5) 乘以 σ_N，然后利用面元变换公式(2.4.13)与(3.4.29)式而得到。

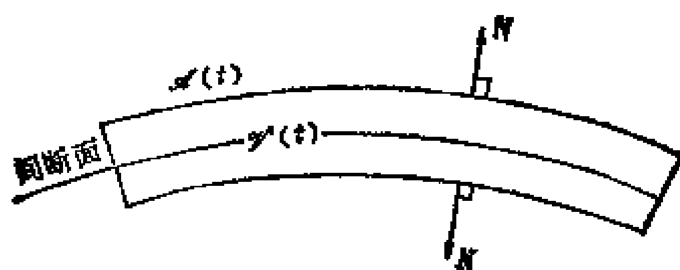


图 4.2 构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的间断面

§4.2 外力与内力、体力与接触力、Euler运动律、Cauchy 应力原理、应力基本定理

外界作用于物体的力称为**外力**,其中可包括力与力偶。外力又可区分为体力(偶)与面力(偶),前者分布于体积或质量上,后者分布于面积上。作用于物体 $\mathscr{B}$ 的任何一部分 $\mathscr{B}'$ 上的体力可表示为

$$\mathbf{f}_b = \int_{\mathscr{B}'} \mathbf{f}\rho dv$$

式中 $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$ 为作用于每单位质量的外力，而体力偶则可表示为

$$\int_{\mathscr{B}'} \mathbf{l}\ \rho dv$$

式中 $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\mathbf{p}, t)$ 为作用于每单位质量的外力偶。

物体的各部分之间作用的力称为**内力**。假设相互作用的体力可以略去,只需考虑相互作用的接触力即面力,或拽力。

Cauchy 应力原理: 假定作用在某点处外法线方向为 $\mathbf{n}$ (单

位矢量）的面上每单位面积的力 $\mathbf{t}_n$ 与力偶 $\mathbf{m}_n$ 只依赖于点的位置(或矢径 $\mathbf{p}$) 与截面的法向 $\mathbf{n}$，即

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{k}(\mathbf{p}, \mathbf{n}), \quad \mathbf{m}_n = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{n}) \tag{4.2.1}$$

以后称 $\mathbf{t}_n$ 为拽力或应力矢量，$\mathbf{m}_n$ 为拽力偶或偶应力矢量。因此，如果通过同一点有两个相切的面，那么在该点处两面的 $\mathbf{n}$ 相同，则 $\mathbf{t}_n$，$\mathbf{m}_n$ 也必各相同。

Euler **运动律**，其中包括有以下两部分。

Euler 第一运动律： 作用于物体任一部分 $\mathscr{V}'$ 的总力等于物体该部分动量的变化率，即

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}'} \mathbf{v}\rho dv = \int_{\mathscr{V}'} \mathbf{f}\,\rho dv + \int_{\mathscr{A}'} \mathbf{t}_n da \tag{4.2.2}$$

式中 $\mathscr{A}'$ 表示 $\mathscr{V}'$ 的表面，$\mathbf{n}$ 为其外法线方向的单位矢量。利用 Reynolds 输运定理(3.7.16)式，上式左端可改写为

$$\int_{\mathscr{V}'} \mathbf{a}\rho dv$$

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}}$ 与 $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{p}}$ 各为质点的速度与加速度。

Euler 第二运动律： 作用于物体任一部分 $\mathscr{V}'$ 的总力矩等于物体该部分动量矩的变化率，即

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{V}'} \mathbf{p}\times\mathbf{v}\rho dv = \int_{\mathscr{V}'} \mathbf{l}\,\rho dv + \int_{\mathscr{V}'} \mathbf{p}\times\mathbf{f}\rho dv$$
$$+ \int_{\mathscr{A}'} \mathbf{m}_n da + \int_{\mathscr{A}'} \mathbf{p}\times\mathbf{t}_n da \tag{4.2.3}$$

利用 Reynolds 输运定理(3.7.16)式，上式之左端可改写为

$$\int_{\mathscr{V}'} \mathbf{p}\times\mathbf{a}\rho dv$$

应力基本定理： 拽力 $\mathbf{t}_n$ 与拽力偶 $\mathbf{m}_n$（见(4.2.1)式）为 $\mathbf{n}$ 的线性函数，它可写成以下的形式：

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{k}(\mathbf{p}, \mathbf{n}) = \overset{))}{\mathbf{t}}(\mathbf{p})\cdot\mathbf{n} \tag{4.2.4}$$

$$\mathbf{m}_n = \mathbf{h}(\mathbf{p},\ \mathbf{n}) = \overset{\gg}{\mathbf{m}}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} \qquad (4.2.5)$$

式中 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 称为 Cauchy 应力张量，$\overset{\gg}{\mathbf{m}}$ 称为 Cauchy 偶应力张量，它们都是构形 $\mathscr{A}(t)$ 中的二阶张量。

证 从所研究的点 $\mathbf{p}$ 处取出一个四面体 $\mathscr{V}'$，如图 4.3 所示。设四面体的四个面的面积为 $A_{(1)}$，$A_{(2)}$，$A_{(3)}$ 与 A，以 $\mathbf{n}_{(1)}$，$\mathbf{n}_{(2)}$，$\mathbf{n}_{(3)}$ 与 $\mathbf{n}$ 表示四个面的外法线方向单位矢量，以 $\mathscr{a}'$ 表示四面体的表面，由封闭面的条件，

$$\int_{\mathscr{a}'} \mathbf{n}\, da = \mathbf{0} \qquad (4.2.6)$$

故有

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{A}\left(A_{(1)}\mathbf{n}_{(1)} + A_{(2)}\mathbf{n}_{(2)} + A_{(3)}\mathbf{n}_{(3)}\right) \qquad (4.2.7)$$

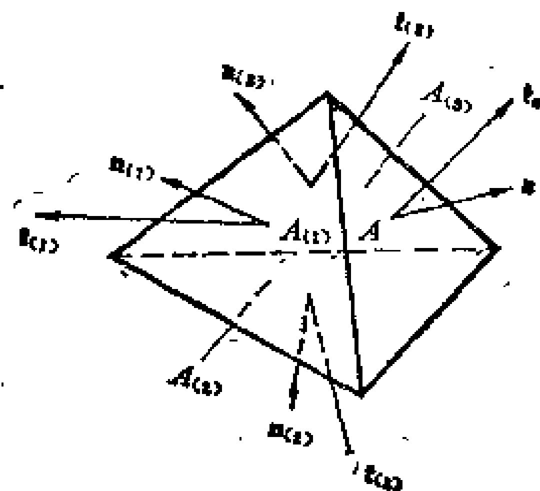


图 4.3

我们将让四面体逐渐趋近于所研究的 $\mathbf{p}$ 点，因此 A 与 $A_{(i)} \to 0$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$。由 Cauchy 应力原理(4.2.1)式的第一式，作用于 A 与 $A_{(i)}(i = 1,\ 2,\ 3)$ 各面上的拽力为

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{k}(\mathbf{p},\mathbf{n}),\quad \mathbf{t}_{(i)} = \mathbf{k}(\mathbf{p},\mathbf{n}_{(i)}),\quad (i = 1,\ 2,\ 3) \qquad (4.2.8)$$

由 Euler 第一运动律(4.2.2)式，

$$\int_{v'} \mathbf{f}\rho dv + \int_{a'} \mathbf{t}_n da = \int_{v'} \mathbf{a}\rho dv \tag{4.2.9}$$

当四面体趋近于 $\mathbf{p}$ 点时，上式中的体积分项为高次小量，故得①

$$\mathbf{t}_n = -\frac{1}{A}(A_{(1)}\mathbf{t}_{(1)} + A_{(2)}\mathbf{t}_{(2)} + A_{(3)}\mathbf{t}_{(3)}) \tag{4.2.10}$$

将(4.2.8)代入(4.2.10)得

$$\mathbf{k}(\mathbf{p}, \mathbf{n}) = -\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{3} A_{(i)}\mathbf{k}(\mathbf{p}, \mathbf{n}_{(i)})$$

式中的 $\mathbf{n}$ 可用(4.2.7)式代入，得到

$$\mathbf{k}\left(\mathbf{p}, -\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{3} A_{(i)}\mathbf{n}_{(i)}\right) = -\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{3} A_{(i)}\mathbf{k}(\mathbf{p}, \mathbf{n}_{(i)}) \tag{4.2.11}$$

(4.2.11)式对于满足(4.2.7)式的任意的 $\mathbf{n}_{(i)}$ 与 $A_{(i)}(i=1, 2, 3)$均成立。因此对于一定的 $\mathbf{p}$, $\mathbf{k}(\mathbf{p}, \mathbf{n})$ 必为 $\mathbf{n}$ 的线性函数，因而可表示成(4.2.4)式的形式②。

同理，由 Cauchy 应力原理 (4.2.1) 的第二式，作用于A与$A_{(i)}(i=1, 2, 3)$ 各面上的拽力偶为

$$\mathbf{m}_n = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{n}),\ \mathbf{m}_{(i)} = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{n}_{(i)}), (i=1, 2, 3) \tag{4.2.12}$$

由 Euler 第二运动律(4.2.3)式可证(4.2.5)式。 [证毕]

通常应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 与 $\overset{\gg}{\mathbf{m}}$(略去自变量 $\mathbf{p}$ 未写)可按当地(即所

① 注意：与 (4.2.9) 式中的 $\mathbf{t}_n$ 不同，(4.2.8) 与 (4.2.10) 式中的 $\mathbf{t}_n$ 表示图 4.3 中作用于A面的应力矢量。

② 选定 $\mathbf{n}_{(i)}(i=1, 2, 3)$，并已知 $\mathbf{t}_{(i)}(i=1, 2, 3)$ 时，可选 (4.2.4) 式的 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}(\mathbf{p})$ 为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{t}_{(i)}\mathbf{n}^{(i)}$$

式中 $\mathbf{n}^{(i)}$ 为 $\mathbf{n}_{(i)}$ 的对偶矢量：$\mathbf{n}^{(i)}\cdot\mathbf{n}_{(j)} = \delta^i_j$

作用点 p 处)的基矢量分解,分解式为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = t^{i}_{\cdot j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j = t^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j \tag{4.2.13}$$

$$\overset{\gg}{\mathbf{m}} = m^{i}_{\cdot j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j = m^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j \tag{4.2.14}$$

已知某点的 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 与 $\overset{\gg}{\mathbf{m}}$,则可计算作用于该处的面元 $d\overset{>}{\mathbf{a}} = \mathbf{n}\ da$ 上的力与力偶:

$$\mathbf{t}_n da = \overset{\gg}{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n} da = \overset{\gg}{\mathbf{t}} \cdot d\overset{>}{\mathbf{a}} \tag{4.2.15}$$

$$\mathbf{m}_n da = \overset{\gg}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n} da = \overset{\gg}{\mathbf{m}} \cdot d\overset{>}{\mathbf{a}} \tag{4.2.16}$$

由上述的应力基本定理(4.2.4)与(4.2.5)式可以导出

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n &= -\mathbf{t}_{-n} \\ \mathbf{m}_n &= -\mathbf{m}_{-n} \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

此式表明在物体内的曲面"一"侧的材料作用于"+"侧材料的(偶)应力矢量与"+"侧的材料作用于"一"侧材料的(偶)应力矢量大小相等,方向相反(图 4.4)

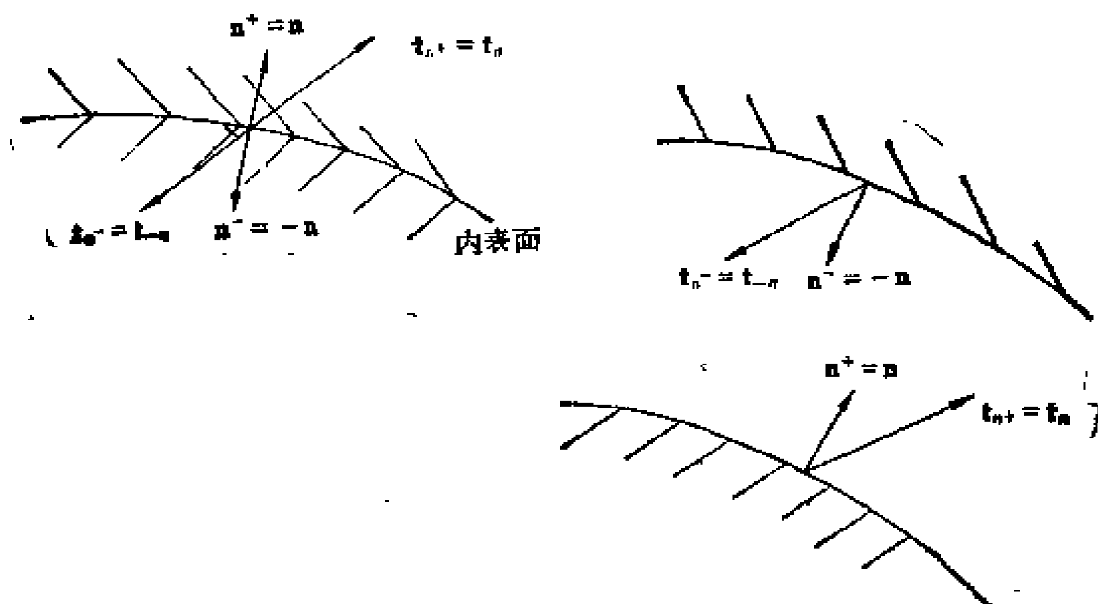


图 4.4

有人把 (4.2.17) 式说成是牛顿第三定律的作用与反作用的关

系。但是如 Leigh 所指出①，在无相互体力作用的连续介质力学中，根本不需要牛顿第三定律。(4.2.17) 式乃是 Euler 运动律与 Cauchy 应力原理的推论。

§4.3 Cauchy 第一运动律(动量方程)与第二运动律(动量矩方程)

将(4.2.15)式代入 Euler 第一运动律(4.2.2)式，得

$$\frac{d}{dt}\int_{v'} \mathbf{v}\rho dv = \int_{a'} \overset{\gg}{\mathbf{t}} \cdot d\overset{>}{\mathbf{a}} + \int_{v'} \mathbf{f}\rho dv \qquad (4.3.1)$$

对比平衡方程一般积分形式(4.1.2)式，可知对于动量说来，(4.1.2)式中各记号的含义为

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{q} = -\overset{\gg}{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{f} \qquad (4.3.2)$$

因此微分形式的平衡方程(4.1.3)式成为

$$\rho\dot{\mathbf{v}} - \overset{\gg}{\mathbf{t}} \cdot \overset{>}{\boldsymbol{\nabla}} - \rho\mathbf{f} = \mathbf{0}$$

即(以 $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ 表示加速度)

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} \cdot \overset{>}{\boldsymbol{\nabla}} + \rho\mathbf{f} = \rho\mathbf{a} \qquad (4.3.3)$$

(4.3.3)式称为 Cauchy 第一运动律(或称 Cauchy 动量方程)，其分量形式为

$$t^{ij}{}_{;j} + \rho f^i = \rho a^i \qquad (4.3.3)'$$

间断方程(4.1.5)则成为

$$[[\rho\mathbf{v}\hat{v}_n]] - [[\overset{\gg}{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n}]] - \mathbf{f}_{(d)} = \mathbf{0} \qquad (4.3.4)$$

在无间断时，

$$[[\overset{\gg}{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n}]] = \mathbf{0}$$

---

① D. C. Leigh, Nonlinear Continuum Mechanics, 1968, McGraw-Hill, p. 131.

可得 $$\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}}{}^{+}\cdot\mathbf{n}-\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}}{}^{-}\cdot\mathbf{n}=0,\quad \mathbf{t}_n^{+}=\mathbf{t}_n^{-}$$

再利用(4.2.17),得

$$\mathbf{t}_n^{+}=-\mathbf{t}_{-n}^{-} \tag{4.3.5}$$

但在间断面的两侧,(4.3.5)式一般不成立。

将(4.2.16)式代入 Euler 第二运动律(4.2.3)式,得

$$\frac{d}{dt}\int_{v'}\mathbf{p}\times\mathbf{v}\rho dv=\int_{v'}\mathbf{l}\rho dv+\int_{v'}\mathbf{p}\times\mathbf{f}\rho dv$$

$$+\int_{a'}\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{m}}\cdot d\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}+\int_{a'}\mathbf{p}\times\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}}\cdot d\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}$$

与平衡方程的一般积分形式(4.1.2)式对比,可知对于动量矩来说,(4.1.2)式各记号的含义如下(同时写出各个张量的分量形式):

$$\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{p}\times\mathbf{v},\quad \varphi_i=\varepsilon_{lmj}p^j v^m$$

$$\mathbf{q}=-(\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{m}}+\mathbf{p}\times\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}}),\quad q_i^{\cdot k}=-(m_i^{\cdot k}+\varepsilon_{lmj}p^j t^{mk}) \tag{4.3.6}$$

$$\mathbf{s}=\mathbf{l}+\mathbf{p}\times\mathbf{f},\quad s_i=l_i+\varepsilon_{lmj}p^j f^m$$

故微分形式的平衡方程(4.1.3)成为

$$\rho(\mathbf{p}\times\mathbf{v})^{\cdot}-(\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{m}}+\mathbf{p}\times\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}})\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}-\rho(\mathbf{l}+\mathbf{p}\times\mathbf{f})=0 \tag{4.3.7}$$

式中

$$(\mathbf{p}\times\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}})\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}=(\overset{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}}:\mathbf{p}\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}})\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}=\overset{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}}:[(\mathbf{p}\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}})\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}]$$

$$=\overset{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}}:\left[\frac{\partial}{\partial x^i}(\mathbf{p}\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}})\cdot\mathbf{g}^i\right]$$

$$=\overset{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}}:\left[\mathbf{p}\frac{\partial\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}}}{\partial x^i}\cdot\mathbf{g}^i+\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial x^i}\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{g}^i\right]$$

$$=\overset{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}}:\left[\mathbf{p}(\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla})+\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial x^i}\mathbf{g}^i\cdot\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}}{}^{*}\right]$$

$$=\overset{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}}:[\mathbf{p}(\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla})+\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{I}}\cdot\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}}{}^{*}]$$

$$=\mathbf{p}\times(\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla})-\overset{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}}:\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{t}}$$

因此(4.3.7)式可改写作

$$\mathbf{p}\times(\rho\mathbf{a}-\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\rangle}{\nabla}-\rho\mathbf{f})-\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{m}}\cdot\overset{\rangle}{\nabla}+\overset{\rangle\rangle\rangle}{\boldsymbol{\epsilon}}:\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}-\rho\mathbf{l}=\mathbf{0}$$

利用动量方程(4.3.3),上式成为

$$\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{m}}\cdot\overset{\rangle}{\nabla}+\rho\mathbf{l}=\overset{\rangle\rangle\rangle}{\boldsymbol{\epsilon}}:\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}} \tag{4.3.8}$$

(4.3.8)式称为 Cauchy 第二运动律(或称动量矩方程)。

有偶应力与体力偶存在的材料称为极材料。当然对于极材料说来,物体的动量矩除了 Euler 第二运动律 (4.2.3) 式已考虑的 $\int_v \mathbf{p}\times\mathbf{v}\rho dv$ 之外,可能还存在分布的动量矩,这是(4.2.3)式所未予考虑的。

大部分材料属于非极材料,即无偶应力作用 ($\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{m}}=\mathbf{0}$), 也没有体力偶 ($\mathbf{l}=\mathbf{0}$)。由动量矩方程(4.3.8), $\overset{\rangle\rangle\rangle}{\boldsymbol{\epsilon}}:\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}=\mathbf{0}$, 故 Cauchy 应力张量 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}$ 为对称,即

$$\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}=\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}^{*} \tag{4.3.9}$$

Cauchy 应力张量可记作

$$\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}=t^{rs}\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s \tag{4.3.10}$$

若令

$$\overset{\rangle}{\mathbf{t}}^{s}=t^{rs}\mathbf{g}_r \tag{4.3.11}$$

则有

$$\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}=\overset{\rangle}{\mathbf{t}}^{s}\mathbf{g}_s,\ \overset{\rangle}{\mathbf{t}}^{s}=\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{g}^{s} \tag{4.3.12}$$

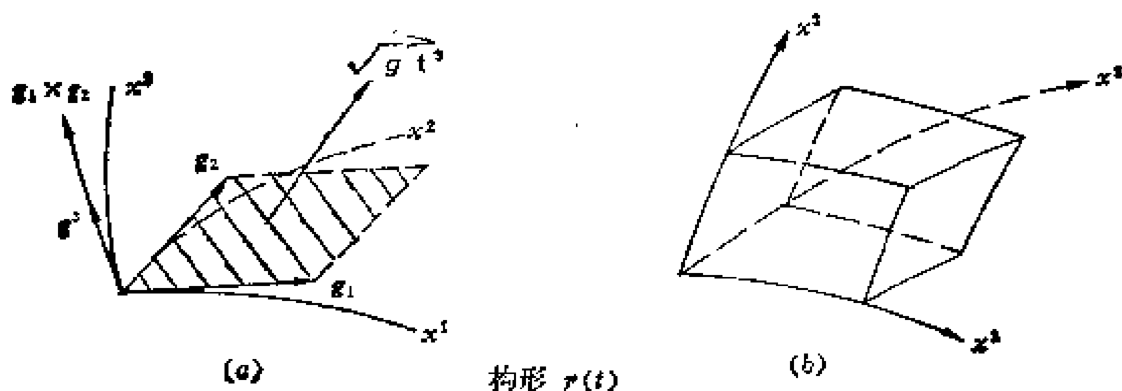
因为 $\mathbf{g}^s$ 垂直于坐标面,故 $\overset{\rangle}{\mathbf{t}}^{s}$ 表示作用于垂直于 $\mathbf{g}^s$ 的坐标面上的应力矢量(拽力)乘以 $|\mathbf{g}^s|=\sqrt{g^{ss}}$ (对 s 不取和)。换句话说,$\overset{\rangle}{\mathbf{t}}^{s}$ 表示作用于以 $\mathbf{g}^s$ 所代表的面元上的力,这个面元的法线方向沿 $\mathbf{g}^s$, 面积大小等于 $|\mathbf{g}^s|$。例如考虑图 4.5 (a) 的 x^1x^2 坐标面

上由协变基矢量 $\mathbf{g}_1$ 与 $\mathbf{g}_2$ 所构成的平行四边形面元，此面元可用矢量 $\mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2$ 表示，但

$$\mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2=\sqrt{g}\;\mathbf{g}^3$$

因此作用于此面元上的力为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot(\mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2)=\sqrt{g}\;\overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{g}^3=\sqrt{g}\;\overset{\rangle}{\mathbf{t}}{}^3 \tag{4.3.13}$$



(a)　　构形 $r(t)$　　(b)

图 4.5

将(4.3.12)第一式 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 的表示形式代入动量平衡方程，其中

$$\begin{aligned}\overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\rangle}{\nabla}&=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\overset{\rangle}{\mathbf{t}}{}^j\mathbf{g}_j\right)\cdot\mathbf{g}^i=\frac{\partial\overset{\rangle}{\mathbf{t}}{}^j}{\partial x^i}\mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}^i+\overset{\rangle}{\mathbf{t}}{}^j\frac{\partial\mathbf{g}_j}{\partial x^i}\cdot\mathbf{g}^i\\&=\frac{\partial\overset{\rangle}{\mathbf{t}}{}^i}{\partial x^i}+\overset{\rangle}{\mathbf{t}}{}^j\Gamma^i_{ji}=\frac{\partial\overset{\rangle}{\mathbf{t}}{}^i}{\partial x^i}+\overset{\rangle}{\mathbf{t}}{}^j\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^j}\\&=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\;\overset{\rangle}{\mathbf{t}}{}^j\right)\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

因此 Cauchy 动量方程(4.3.3)可写成

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\;\overset{\rangle}{\mathbf{t}}{}^j\right)+\rho\mathbf{f}=\rho\mathbf{a} \tag{4.3.15}$$

或

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\,t^{ij}\mathbf{g}_j)+\rho\mathbf{f}=\rho\mathbf{a} \qquad (4.3.15)'$$

(4.3.15)式各项的物理意义可以从图 4.5(b) 的由三对相邻坐标面构成的六面体的动量平衡看出。设 dx^1, dx^2, dx^3 为三对相邻的坐标面的坐标增量，则利用(4.3.13)式的结果，作用于六面体上的动量方程应为

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}\,\overset{\rangle}{\mathbf{t}}{}^1dx^2dx^3)dx^1+\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}\,\overset{\rangle}{\mathbf{t}}{}^2dx^3dx^1)dx^2$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g}\,\overset{\rangle}{\mathbf{t}}{}^3dx^1dx^2)dx^3$$

$$+\sqrt{g}\,\rho\mathbf{f}dx^1dx^2dx^3=\sqrt{g}\,\rho\mathbf{a}dx^1dx^2dx^3$$

上式除以 $\sqrt{g}\,dx^1dx^2dx^3$ 以后，即为 Cauchy 动量方程(4.3.15)式。(4.3.15)式的分量形式为①

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}\,t^{ij})+t^{rs}\Gamma^i_{rs}+\rho f^i=\rho a^i \qquad (4.3.15)''$$

如果采用的 Euler 坐标 x^i 为笛卡儿坐标，则 Cauchy 动量方程的分量形式(4.3.3)′或(4.3.15)″简化为

$$t^{ij}{}_{,j}+\rho f^i=\rho a^i \qquad (4.3.16)$$

最后指出，在连续介质力学中为了方便还采用 Kirchhoff (或加权)应力张量：

$$\underset{\circ}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}}=\mathscr{J}\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}} \qquad (4.3.17)$$

除了相差一倍数 $\mathscr{J}$ (体积比)以外，它和 Cauchy 应力张量 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}$ 并无本质的区别。

---

① 由(4.3.3)′式，并利用等式 $(\partial\sqrt{g}/\partial x^i)/\sqrt{g}=\Gamma^r_{ir}$，也可直接得到(4.3.15)″式。

§ 4.4　第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量 Boussinesq 动量方程

一、第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量的定义、Boussinesq 动量方程

由 Lagrange 型的微分形式平衡方程(4.1.11)，将(4.3.2)式的 $\boldsymbol{\varphi}$，$\mathbf{q}$ 与 $\mathbf{s}$ 代入后，得到动量平衡方程

$$\rho_0\dot{\mathbf{v}} = (\mathscr{J}\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}} \cdot \overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^*) \cdot \overset{\langle}{\Box} + \rho_0\mathbf{f} \tag{4.4.1}$$

记两点张量

$$\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}} = \mathscr{J}\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}} \cdot \overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^* = \tau^{rB}\mathbf{g}_r\mathbf{G}_B \tag{4.4.2}$$

$$\tau^{rB} = \mathscr{J}t^{rs}X^B_{,s}$$

$\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}$ 称为第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量(或称 Piola 应力张量，又称名义应力张量)

于是 Lagrange 型的动量平衡方程(4.4.1)可通过 $\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}$ 表示为①

$$\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}} \cdot \overset{\langle}{\Box} + \rho_0\mathbf{f} = \rho_0\mathbf{a} \tag{4.4.3a}$$

(4.4.4a) 式称为 Boussinesq 动量方程，其分量形式为

$$\tau^{iB}{}_{;B} + \rho_0 f^i = \rho_0 a^i \tag{4.4.3b}$$

式中

$$\begin{aligned}\tau^{iB}{}_{:B} &= \tau^{iB}{}_{;B} + \tau^{iB}{}_{;j}x^j_{,B} \\ &= \tau^{iB}{}_{,B} + \tau^{ik}\Gamma^B_{Bk} + (\tau^{iB}{}_{,j} + \tau^{kB}\Gamma^i_{jk})x^j_{,B} \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^B}(\sqrt{G}\tau^{iB}) + \tau^{iB}{}_{;j}x^j_{,B}\end{aligned} \tag{4.4.3c}$$

---

① 利用后面的习题4.2，易见 Boussinesq 动量方程 (4.4.3a) 就是 Cauchy 动量方程的 $\mathscr{J}$ 倍。

(4.4.2)式是 $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$ 通过 Cauchy 应力张量 $\overset{))}{\mathbf{t}}$ 的表示式。由此，$\overset{))}{\mathbf{t}}$ 亦可通过 $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$ 表示：

$$
\begin{aligned}
\overset{))}{\mathbf{t}} &= \frac{1}{\mathscr{J}} \overset{)(}{\boldsymbol{\tau}} \cdot \overset{()}{\mathbf{D}}{}^* = t^{rs}\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s \\
t^{rs} &= \frac{1}{\mathscr{J}} \tau^{rB} x^s_{,B}
\end{aligned}
\tag{4.4.4}
$$

而(4.3.17)式所定义的 Kirchhoff 应力张量 $\underset{0}{\overset{))}{\mathbf{t}}}$ 通过 $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$ 的表示式则为

$$
\begin{aligned}
\underset{0}{\overset{))}{\mathbf{t}}} &= \overset{)(}{\boldsymbol{\tau}} \cdot \overset{()}{\mathbf{D}}{}^* = \underset{0}{t}{}^{rs}\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s \\
\underset{0}{t}{}^{rs} &= \tau^{rB} x^s_{,B}
\end{aligned}
\tag{4.4.4$'$}
$$

二、关于第一类 Piola-kirchhoff 应力张量的讨论

现在来讨论第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$ 的含义。回顾 Lagrange 型微分形式平衡方程（4.1.11）的推导过程，可知(4.4.1)式中出现 $\mathscr{J}\overset{))}{\mathbf{t}} \cdot \overset{)(}{\overset{-1}{\mathbf{D}}}{}^*$ 代替 $\overset{))}{\mathbf{t}}$ 的原因，是由于把构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的面元 $d\overset{)}{\mathbf{a}}$ 变换为构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的面元 $d\overset{(}{\mathbf{A}}$，变换关系为（2.4.13）式，即

$$
d\overset{)}{\mathbf{a}} = \mathscr{J}\overset{)(}{\overset{-1}{\mathbf{D}}}{}^* \cdot d\overset{(}{\mathbf{A}} \tag{2.4.13}
$$

我们来研究构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的面元 $d\overset{(}{\mathbf{A}} = \mathbf{N}\ dA$，变形后成为构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的面元 $d\overset{)}{\mathbf{a}} = \overset{)}{\mathbf{n}}da$（见图 4.6）。由(4.2.15)式，作用于面元 $d\overset{)}{\mathbf{a}}$ 上的力为

$$
\overset{))}{\mathbf{t}} \cdot d\overset{)}{\mathbf{a}} = \overset{))}{\mathbf{t}} \cdot \mathscr{J}\overset{)(}{\overset{-1}{\mathbf{D}}}{}^* \cdot d\overset{(}{\mathbf{A}}
$$

$$= (\mathscr{J}\overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\overset{-1}{\overset{><}{\mathbf{D}}}{}^{*})\cdot d\overset{<}{\mathbf{A}} = \overset{><}{\boldsymbol{\tau}}\cdot d\overset{<}{\mathbf{A}} \qquad (4.4.5)$$

由此可见，为了要求作用于构形 $\mathscr{r}(t)$ 中面元 $d\overset{>}{\mathbf{a}}$ 上的力，可以用 Cauchy 应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 点积此面元矢量 $d\overset{>}{\mathbf{a}}$，也可以用第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{><}{\boldsymbol{\tau}}$ 点积在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中对应于 $d\overset{>}{\mathbf{a}}$ 的在变形前的面元 $d\overset{<}{\mathbf{A}}$。这正说明 $\overset{><}{\boldsymbol{\tau}}$ 的物理意义。但是要注意，(4.4.5)式的力实际上是作用于 $d\overset{>}{\mathbf{a}}$ 上，而不是作用于 $d\overset{<}{\mathbf{A}}$ 上。我们称 Cauchy 应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 是按变形后即构形 $\mathscr{r}(t)$ 的面积"折算"的，而第一类 Piola-Kirchhoff 应力 $\overset{><}{\boldsymbol{\tau}}$ 是按变形前即构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 的面积"折算"的。

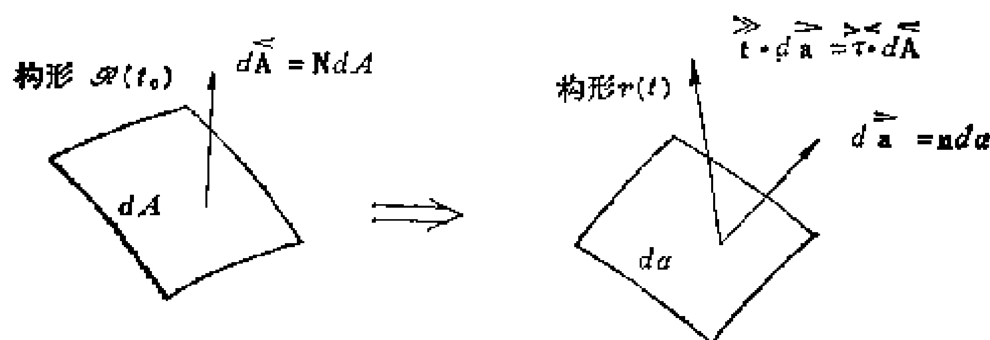


图 4.6

由(4.2.4)式，Cauchy 应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 与构形 $\mathscr{r}(t)$ 中面元 $d\overset{>}{\mathbf{a}}$ 的法向单位矢量 $\mathbf{n} = d\overset{>}{\mathbf{a}}/|d\overset{>}{\mathbf{a}}|$ 的点积等于拽力，即

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}} = \overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n} \qquad (4.2.4)$$

拽力 $\mathbf{t}_{\mathbf{n}}$ 表示在面元 $d\overset{>}{\mathbf{a}}$ 上每单位面积作用的力(见图 4.7a)。将(4.4.5)式除以 $|d\overset{<}{\mathbf{A}}|$，得到

$$\overset{><}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{N} = \overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n}\frac{|d\overset{>}{\mathbf{a}}|}{|d\overset{<}{\mathbf{A}}|} = \sigma_{\mathbf{n}}\mathbf{t}_{\mathbf{n}} \qquad (4.4.6)$$

式中 $\sigma_{\mathbf{n}}$ 为面积比。因此第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$ 与变形前 $\mathscr{R}(t_0)$ 构形中面元的法向单位矢量 $\mathbf{N}$ 的点积 $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{N}$ 等于作用于变形后 $r(t)$ 构形中面积 $\sigma_{\mathbf{n}}$ 的面元上的力(图 4.7*b*)。这个面积 $\sigma_{\mathbf{n}}$ 不是单位面积，但是在变形前的 $\mathscr{R}(t_0)$ 中曾经是单位面积(图 4.7*c*)。我们称(4.4.6)式为拟拽力。

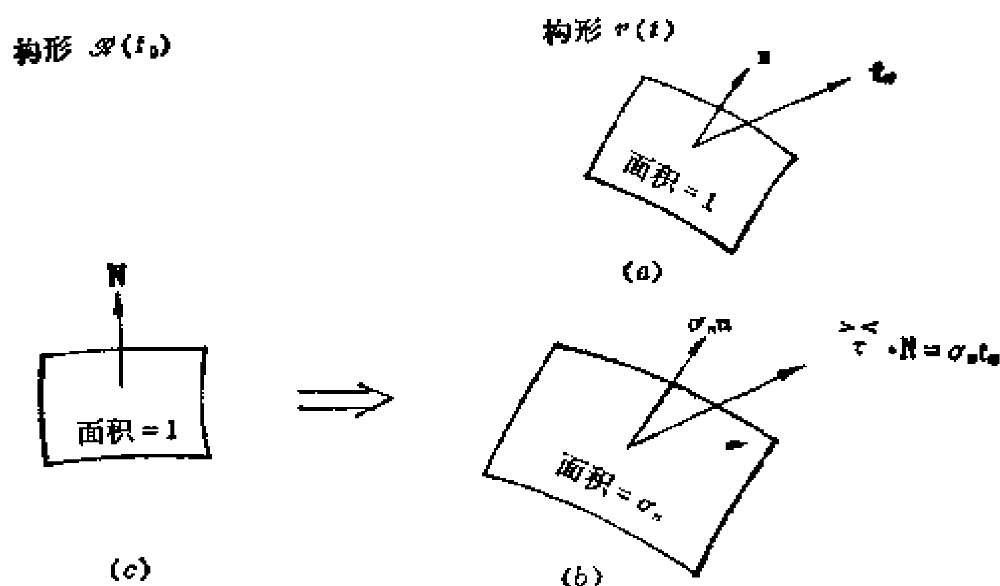


图 4.7

第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$(4.4.2) 式也可写成以下形式:

$$\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}=\overset{)}{\boldsymbol{\tau}}^{B}\mathbf{G}_{B} \tag{4.4.7a}$$

式中

$$\overset{)}{\boldsymbol{\tau}}^{B}=\tau^{iB}\mathbf{g}_{i} \tag{4.4.7b}$$

因此

$$\overset{)}{\boldsymbol{\tau}}^{B}=\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{G}^{B} \tag{4.4.8}$$

因为 $\mathbf{G}^B$ 垂直于构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的坐标面，故按(4.4.5)式，$\overset{)}{\boldsymbol{\tau}}^{B}$ 表示作用于在构形 $r(t)$ 中的一个面元上的力，这个面元对应于变形

前的构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中以 $\mathbf{G}^B$ 所代表的面元，即在变形前这个面元的法线方向曾经是沿着 $\mathbf{G}^B$，面积大小等于 $|\mathbf{G}^B|$。例如考虑图 4.8 (a) 构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的 $X^{\mathrm{I}}X^{\mathrm{II}}$ 坐标面上由协变基矢量 $\mathbf{G}_{\mathrm{I}}$ 与 $\mathbf{G}_{\mathrm{II}}$ 所构成的平行四边形面元，此面元可用矢量 $\mathbf{G}_{\mathrm{I}}\times\mathbf{G}_{\mathrm{II}}$ 表示，且

$$\mathbf{G}_{\mathrm{I}}\times\mathbf{G}_{\mathrm{II}}=\sqrt{G}\,\mathbf{G}^{\mathrm{III}}$$

$\mathbf{G}_{\mathrm{I}}$ 与 $\mathbf{G}_{\mathrm{II}}$ 在变形后成为图 4.8(b) 构形 $\mathscr{r}(t)$ 中的 Lagrange 坐标系 $\{X^A, t\}$ 的随体基矢量 $\hat{\mathbf{g}}_{\mathrm{I}}$ 与 $\hat{\mathbf{g}}_{\mathrm{II}}$，此面元可用矢量 $\hat{\mathbf{g}}_{\mathrm{I}}\times\hat{\mathbf{g}}_{\mathrm{II}}$ 表示，且

$$\hat{\mathbf{g}}_{\mathrm{I}}\times\hat{\mathbf{g}}_{\mathrm{II}}=\sqrt{\hat{g}}\,\mathbf{g}^{\mathrm{III}}$$

由(4.4.5)式，并利用(4.4.8)式，作用于构形 $\mathscr{r}(t)$ 中的面元 $\hat{\mathbf{g}}_{\mathrm{I}}\times\hat{\mathbf{g}}_{\mathrm{II}}$ 上的力为

$$\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}\cdot(\mathbf{G}_{\mathrm{I}}\times\mathbf{G}_{\mathrm{II}})=\sqrt{G}\,\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{G}^{\mathrm{III}}=\sqrt{G}\,\overset{)}{\boldsymbol{\tau}}{}^{\mathrm{III}}\qquad(4.4.9)$$

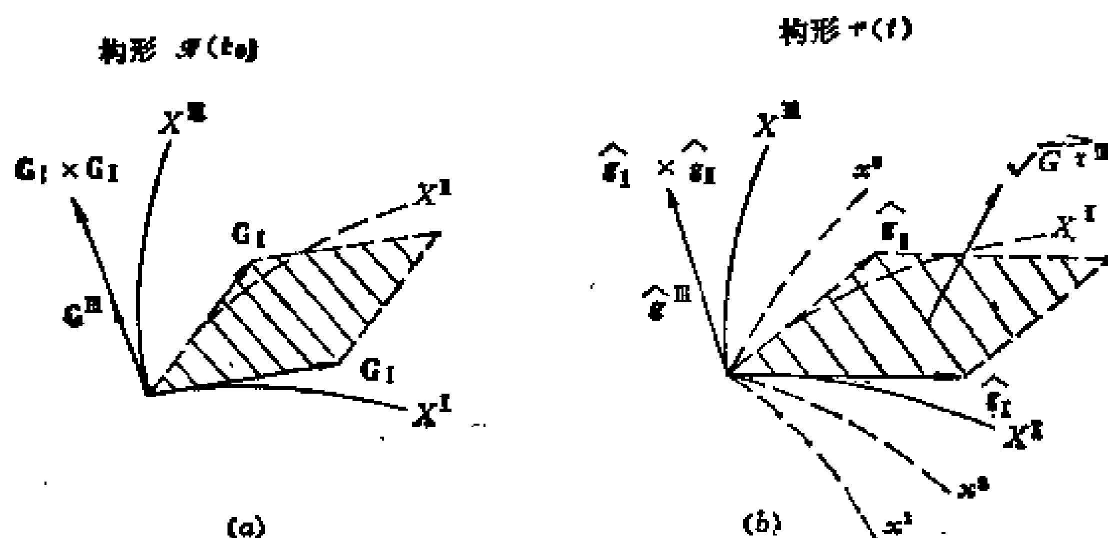


图 4.8

三、Boussinesq 动量方程的另一形式

将两点张量的全梯度公式(1.2.14)用于 $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$，得

$$\overset{)(\,(}{\boldsymbol{\tau}\square} = \overset{)(\,(}{\boldsymbol{\tau}\nabla} + (\overset{)(\,)}{\boldsymbol{\tau}\nabla}) \cdot (\mathbf{p}\overset{(}{\nabla}) \tag{4.4.10}$$

式中 $\mathbf{p}\overset{(}{\nabla} = \overset{)(}{\mathbf{D}}$ 见(2.3.14)式。由此可得

$$\overset{)(\,(}{\boldsymbol{\tau}\square} = \frac{\partial \overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}}{\partial X^B}\mathbf{G}^B + \left(\frac{\partial \overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}}{\partial x^r}\mathbf{g}^r\right) \cdot (x^i_{,B}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^B)$$

$$= \left(\frac{\partial \overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}}{\partial X^B} + x^r_{,B}\frac{\partial \overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}}{\partial x^r}\right)\mathbf{G}^B \tag{4.4.11}$$

(1.2.19)与(1.2.20)式曾引进"全偏导数"记号:

$$\frac{d(\cdots)}{dX^B} = \frac{\partial(\cdots)}{\partial X^B} + x^i_{,B}\frac{\partial(\cdots)}{\partial x^i}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial X^B} + x^i_{,B}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(\cdots)$$

$$\frac{d(\cdots)}{dx^i} = \frac{\partial(\cdots)}{\partial x^i} + X^B_{,i}\frac{\partial(\cdots)}{\partial X^B}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + X^B_{,i}\frac{\partial}{\partial X^B}\right)(\cdots)$$

但是注意这里对坐标 X^B, x^i 求偏导数时,时间 t 是看作固定不变的。

利用(4.4.12)式(或直接由(1.2.21)的第二式),两点张量 $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$ 的全梯度(4.4.11)式可写作

$$\overset{)(\,(}{\boldsymbol{\tau}\square} = \frac{d\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}}{dX^B}\mathbf{G}^B \tag{4.4.12}$$

因此 $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$ 的全散度为

$$\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}} \cdot \overset{(}{\square} = \frac{d\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}}{dX^B} \cdot \mathbf{G}^B \tag{4.4.13}$$

将 $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$ 的 (4.4.7a) 形式代入,得

$$\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}} \cdot \overset{(}{\square} = \frac{d}{dX^B}\ (\overset{\rangle}{\boldsymbol{\tau}}{}^M \mathbf{G}_M) \cdot \mathbf{G}^B$$

$$= \left(\frac{d\overset{\rangle}{\boldsymbol{\tau}}{}^M}{dX^B}\,\mathbf{G}_M + \overset{\rangle}{\boldsymbol{\tau}}{}^M \frac{d\mathbf{G}_M}{dX^B}\right) \cdot \mathbf{G}^B$$

$$= \frac{d\overset{\rangle}{\boldsymbol{\tau}}{}^B}{dX^B} + \overset{\rangle}{\boldsymbol{\tau}}{}^M \left(\frac{d\mathbf{G}_M}{dX^B} \cdot \mathbf{G}^B\right) \qquad (4.4.13)'$$

考虑到 $\mathbf{G}_M$ 只是 $X^A(A = \text{I}, \text{II}, \text{III})$ 的函数，而与 $x^r(r = 1, 2, 3)$ 无关，故

$$\frac{d\mathbf{G}_M}{dX^B} \cdot \mathbf{G}^B = \frac{\partial \mathbf{G}_M}{\partial X^B} \cdot \mathbf{G}^B = \Gamma^B_{BM}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial X^M} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d\sqrt{G}}{dX^M}$$

故(4.4.13)$'$式可写作

$$\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}} \cdot \overset{(}{\square} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d}{dX^B}\,(\sqrt{G}\,\overset{\rangle}{\boldsymbol{\tau}}{}^B) \qquad (4.4.13)''$$

将上式代入 (4.4.3a)，可以得到 Boussinesq 动量方程的另一形式：

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d}{dX^B}\,(\sqrt{G}\ \overset{\rangle}{\boldsymbol{\tau}}{}^B) + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \mathbf{a} \qquad (4.4.14a)$$

仿照 Cauchy 动量方程(4.3.15)的几何意义的讨论，利用图 4.8 与 (4.4.9)式的结果，可以看出 (4.4.14a) 式的物理意义：它表示在构形 $\mathscr{R}(t)$ 中由矢量 $\hat{\mathbf{g}}_{\text{I}} dX^{\text{I}}$，$\hat{\mathbf{g}}_{\text{II}} dX^{\text{II}}$ 与 $\hat{\mathbf{g}}_{\text{III}} dX^{\text{III}}$ 构成的六面体的动量平衡方程。这个六面体在变形前的构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中乃是由 $\mathbf{G}_{\text{I}} dX^{\text{I}}$，$\mathbf{G}_{\text{II}} dX^{\text{II}}$ 与 $\mathbf{G}_{\text{III}} dX^{\text{III}}$ 构成的六面体。

将 (4.4.7b) 式的 $\overset{\rangle}{\boldsymbol{\tau}}{}^B$ 代入上述 (4.4.14a) 式左端的第一项：

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d}{dX^B}\,(\sqrt{G}\ \overset{\rangle}{\boldsymbol{\tau}}{}^B) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d}{dX^B}\,(\sqrt{G}\,\tau^{iB} \mathbf{g}_i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial}{\partial X^B} + x^i_{,B}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(\sqrt{G}\tau^{iB}\mathbf{g}_i)$$

注意到 $\sqrt{G}$ 只与 $X^A(A=\text{I, II, III})$ 有关，$\mathbf{g}_i$ 只与 $x^r(r=1, 2, 3)$ 有关，上式可写作

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{d}{dX^B}(\sqrt{G}\,\vec{\boldsymbol{\tau}}^B) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial X^B}(\sqrt{G}\tau^{iB})\mathbf{g}_i$$

$$+ x^i_{,B}\frac{\partial}{\partial x^i}(\tau^{iB}\mathbf{g}_i)$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial X^B}(\sqrt{G}\tau^{iB}) + x^i_{,B}\tau^{iB}_{;i}\right]\mathbf{g}_i \tag{4.4.15}$$

(4.4.15)代入动量方程(4.4.14a)可得动量方程的分量形式

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial X^B}(\sqrt{G}\tau^{iB}) + x^j_{,B}\tau^{iB}_{;j} + \rho_0 f^i = \rho_0 a^i \tag{4.4.14b}$$

与以前的 (4.4.3b) 式(注意到 (4.4.3c)式)完全相符。

如果我们采用的 Euler 坐标 x^i 为笛卡儿坐标(故 $\Gamma^i_{jk}=0$)，且设 τ^{iB} 表示为 $X^A(A=\text{I, II, III})$ 的函数，而不显含 $x^r(r=1, 2, 3)$，(故 $\tau^{iB}_{,j}=0$)，则 Boussinesq 动量方程的分量形式 (4.4.3b) 或 (4.4.14b) 简化为

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial X^B}(\sqrt{G}\tau^{iB}) + \rho_0 f^i = \rho_0 a^i \tag{4.4.16}$$

如果不但 Euler 坐标 x^i，而且 Lagrange 坐标 X^A 也取为笛卡儿坐标(故 $\sqrt{G}=1$)，则(4.4.16)式又可再简化为

$$\tau^{iB}_{,B} + \rho_0 f^i = \rho_0 a^i \tag{4.4.17}$$

习题 4.1 证明(4.3.11)式的 $\vec{\mathbf{t}}^S$ 与 (4.4.7b) 式的 $\vec{\boldsymbol{\tau}}^B$ 满足以下关系

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}^B = \mathscr{J}X^B_{,S}\vec{\mathbf{t}}^S, \quad \vec{\mathbf{t}}^S = \mathscr{J}^{-1}x^S_{,B}\vec{\boldsymbol{\tau}}^B$$

习题 4.2 利用习题 4.1 的结果证明

$$\mathscr{J}(\overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\overset{>}{\nabla}) = \overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{\langle}{\square}$$

【提示】由(4.3.14)式

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\overset{>}{\nabla} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,\overset{>}{\mathbf{t}}^k) \tag{a}$$

式中，利用习题 4.1 的结果与(2.4.6)式，

$$\sqrt{g}\,\overset{>}{\mathbf{t}}^k = \sqrt{g}\,\mathscr{J}x^k_{;B}\overset{>}{\boldsymbol{\tau}}^B = \sqrt{G}\,|X^A_{;i}|\,x^k_{;B}\overset{>}{\boldsymbol{\tau}}^B \tag{b}$$

将 (b) 代入 (a) 式，并利用"全偏导数"记号(4.4.12)'，得

$$\begin{aligned}
\overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\overset{>}{\nabla} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{d}{dx^k}(\sqrt{G}\,|X^A_{;i}|\,x^k_{;B}\overset{>}{\boldsymbol{\tau}}^B) \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\Big[\frac{d}{dx^k}(|X^A_{;i}|\,x^k_{;B})\sqrt{G}\,\overset{>}{\boldsymbol{\tau}}^B \\
&\quad + |X^A_{;i}|\,x^k_{;B}\frac{d}{dx^k}(\sqrt{G}\,\overset{>}{\boldsymbol{\tau}}^B)\Big]
\end{aligned}$$

由习题 2.3 的第一等式，上式右端方括弧中第一项为零，再利用(2.4.6)第二式及(4.4.13)″式，可得

$$\begin{aligned}
\overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\overset{>}{\nabla} &= \frac{1}{\mathscr{J}\sqrt{G}}\,x^k_{;B}\frac{d}{dx^k}(\sqrt{G}\,\overset{>}{\boldsymbol{\tau}}^B) \\
&= \frac{1}{\mathscr{J}\sqrt{G}}\frac{d}{dX^B}(\sqrt{G}\,\overset{>}{\boldsymbol{\tau}}^B) \\
&= \frac{1}{\mathscr{J}}\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{\langle}{\square}
\end{aligned}$$

四、动量率方程

在连续介质力学及塑性力学的文献中有时要用到动量率方程。动量率方程的最简单表示形式为

$$\dot{\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}}\cdot\overset{\langle}{\square} + \rho_0\dot{\mathbf{f}} = \rho_0\dot{\mathbf{a}} \tag{4.4.18}$$

上式可由 Boussinesq 动量方程 (4.4.3a) 对时间 t 求物质导数而

得，只需要注意到

$$\frac{d}{dt}(\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{(}{\square})=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}}{dX^B}\cdot\mathbf{G}^B\right)$$

$$=\frac{d}{dX^B}\left(\frac{d\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}}{dt}\cdot\mathbf{G}^B\right)$$

$$=\frac{d\dot{\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}}}{dX^B}\cdot\mathbf{G}^B=\dot{\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}}\cdot\overset{(}{\square}$$

(4.4.18)式的 $\dot{\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}}$ 可由(4.4.2)求得

$$\dot{\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}}=\frac{D\tau^{iB}}{Dt}\,\mathbf{g}_i\mathbf{G}_B \tag{4.4.19}$$

式中，利用(3.1.30)与(3.1.34)，

$$\frac{D\tau^{iB}}{Dt}=\frac{d\tau^{iB}}{dt}+v^s\tau^{rB}\Gamma^i_{sr}$$

$$=\left(\frac{\partial\tau^{iB}}{\partial t}\right)_{X^M,x^r}+v^s\nabla_s\tau^{iB} \tag{4.4.20}$$

故

$$\dot{\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}}\cdot\overset{(}{\square}=\left(\frac{D\tau^{iB}}{Dt}\right)_{;B}\mathbf{g}_i \tag{4.4.21}$$

式中，由(1.2.15)，

$$\left(\frac{D\tau^{iB}}{Dt}\right)_{:B}=\left(\frac{D\tau^{iB}}{Dt}\right)_{;B}+\left(\frac{D\tau^{ib}}{Dt}\right)_{;r}x^r_{,M} \tag{4.4.22}$$

故动量率方程(4.4.18)的分量形式为

$$\left(\frac{D\tau^{iB}}{Dt}\right)_{:B}+\rho_0\frac{Df^i}{Dt}=\rho_0\frac{Da^i}{Dt} \tag{4.4.23}$$

若采用的 Euler 坐标 x^i 与 Lagrange 坐标 x^A 均为直角坐标，且设自变量为 X^A，即 τ^{iB}, f^i, a^i 为只依赖于 X^A（而不以显式形式依赖于 x^r），则(4.4.23)简化为

$$\frac{d}{dX^B}\left(\frac{d\tau^{iB}}{dt}\right)+\rho_0\frac{df^i}{dt}=\rho_0\frac{da^i}{dt} \tag{4.4.24}$$

式中

$$\frac{d}{dt}=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{X^B},\quad \frac{d}{dX^B}=\left(\frac{\partial}{\partial X^B}\right)_t$$

§4.5 第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量、Kirchhoff 动量方程

一、第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量的定义

在§4.2中定义了 Cauchy 应力张量 $\overset{))}{\mathbf{t}}$ 与 Kirchhoff 应力张量 $\overset{))}{\underset{0}{\mathbf{t}}}$，它是构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的张量。§4.4中定义了第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$，它是两点张量，前矢量在构形 $\mathscr{R}(t)$中，而后矢量在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中。现在引进第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{((}{\mathbf{T}}$，它是构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的张量。

在(4.4.2) $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$ 的表示式中

$$\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}=\tau^{rB}\mathbf{g}_r\mathbf{G}_B \tag{4.4.2}$$

后矢量 $\mathbf{G}_B$ 是构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的 Lagrange 坐标系 $\{X^A\}$ 的基矢量，而前矢量 $\mathbf{g}_r$ 是构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的 Euler 坐标系 $\{x^r\}$ 的基矢量。利用基矢量的坐标转换关系：

$$\mathbf{g}_r=X^A_{;r}\hat{\mathbf{g}}_A$$

可以把(4.4.2)式中的前矢量转换为构形 $\mathscr{R}(t)$ 中 Lagrange 坐标系 $\{X^A,t\}$ 的基矢量 $\hat{\mathbf{g}}_A$，得到

$$\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}=\tau^{rB}X^A_{;r}\hat{\mathbf{g}}_A\mathbf{G}_B=T^{AB}\hat{\mathbf{g}}_A\mathbf{G}_B \tag{4.5.1}$$

式中

$$T^{AB}=X^A_{,r}\tau^{rB} \tag{4.5.2}$$

(4.5.1)式就是 $\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}$ 在 Lagrange 坐标基矢量中的分解式。将(4.4.2)的 τ^{rB} 代入(4.5.2)可得 T^{AB} 通过 Cauchy 应力张量 t^{rs} 的表示式：

$$T^{AB}=\mathscr{J}t^{rs}X^A_{,r}X^B_{,s}=\mathscr{J}\hat{t}^{AB}=\underset{\circ}{\hat{t}}{}^{AB} \tag{4.5.3}$$

式中

$$\hat{t}^{AB}=t^{rs}X^A_{,r}X^B_{,s} \tag{4.5.4}$$

根据转换公式(4.5.4)，$\hat{t}^{AB}$ 显然为 Cauchy 应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 在Lagrange 坐标系 $\{X^A,\ t\}$ 中的逆变分量，即

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}=t^{rs}\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s=\hat{t}^{AB}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B=\frac{1}{\mathscr{J}}T^{AB}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B \tag{4.5.5}$$

而 $\underset{\circ}{\hat{t}}{}^{AB}$ 则为 Kirchhoff 应力张量 $\underset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}$（见(4.3.17)式）的逆变分量，即

$$\underset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}=\underset{\circ}{\hat{t}}{}^{AB}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B=T^{AB}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B \tag{4.5.6}$$

因为 Cauchy 应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 是对称的，$\hat{t}^{AB}=\hat{t}^{BA}$，故由(4.5.3)式

$$T^{AB}=T^{BA} \tag{4.5.7}$$

定义第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{\ll}{\mathbf{T}}$ 为在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 的 Lagrange 坐标系 $\{X^A\}$ 中以 T^{AB} 为逆变分量的张量，即

$$\overset{\ll}{\mathbf{T}}=T^{AB}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B \tag{4.5.8}$$

由(4.5.7)式，$\overset{\ll}{\mathbf{T}}$ 为对称张量。

综观上面的(4.5.1)，(4.5.5)，(4.5.6)与(4.5.8)式，可见 T^{AB} 同时是许多种应力张量如 $\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}$，$\mathscr{J}\overset{\gg}{\mathbf{t}}=\underset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}$ 与 $\overset{\ll}{\mathbf{T}}$ 的逆变分量，但是并矢基不同而已。利用这一点，可以建立各个应力张量之间的关系。例如利用(2.3.19)式

$$\hat{\mathbf{g}}_A = \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{G}_A = \mathbf{G}_A \cdot \overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^* \tag{4.5.9}$$

可得以下的关系，及相应的分量形式：

$$\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}} = \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \overset{((}{\mathbf{T}}, \quad \tau^{rB} = x^r_{,A} T^{AB} \tag{4.5.10}$$

$$\underset{\cdot}{\overset{))}{\mathbf{t}}} = \mathscr{J} \cdot \overset{))}{\mathbf{t}} = \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \overset{((}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^*, \quad \underset{\cdot}{t}{}^{rs} = \mathscr{J} t^{rs} = x^r_{,A} T^{AB} x^s_{,B} \tag{4.5.11}$$

(4.5.11)式也可以通过将(4.5.10)式代入(4.4.4)式而得到。由上述两式，也可以得到 $\overset{((}{\mathbf{T}}$ 通过其他应力张量的表示式：

$$\overset{((}{\mathbf{T}} = \overset{-1}{\overset{\circ}{\mathbf{D}}} \cdot \overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}, \quad T^{AB} = X^A_{,r} \tau^{rB} \tag{4.5.12}$$

$$\overset{((}{\mathbf{T}} = \mathscr{J} \overset{-1}{\overset{\circ}{\mathbf{D}}} \cdot \overset{))}{\mathbf{t}} \cdot \overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^* = \overset{-1}{\overset{\circ}{\mathbf{D}}} \cdot \underset{\cdot}{\overset{))}{\mathbf{t}}} \cdot \overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^* \tag{4.5.13a}$$

$$T^{AB} = \mathscr{J} X^A_{,r} t^{rs} X^B_{,s} = X^A_{,r} \underset{\cdot}{t}{}^{rs} X^B_{,s} \tag{4.5.13b}$$

(4.5.13)式也可以通过将 (4.4.2) 式代入 (4.5.12) 式而得到。由(4.5.10)—(4.5.13)式可看出，在张量 $\underset{\cdot}{\overset{))}{\mathbf{t}}}$，$\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$，$\overset{((}{\mathbf{T}}$ 之间满足以变形梯度或逆变形梯度点积(即 $\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot$，$\overset{-1}{\overset{\circ}{\mathbf{D}}}\cdot$ 或 $\cdot\overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^*$，$\cdot\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^*$) 所表示的关系，而在分量 $\underset{\cdot}{t}{}^{rs}$，$\tau^{rB}$，$T^{AB}$ 之间满足张量分量的坐标转换 ($x^i \longleftrightarrow X^M$) 关系。

二、第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量的含义

由(4.4.5)式及图 4.6，并利用(4.5.10)式，作用于构形 $\mathscr{R}(t)$ 中面元 $d\overset{)}{\mathbf{a}}$ 的力

$$\overset{))}{\mathbf{t}} \cdot d\overset{)}{\mathbf{a}} = \overset{)(}{\boldsymbol{\tau}} \cdot d\overset{(}{\mathbf{A}} = \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \overset{((}{\mathbf{T}} \cdot d\overset{(}{\mathbf{A}} \tag{4.5.14}$$

由此可见 $\overset{((}{\mathbf{T}} \cdot d\overset{(}{\mathbf{A}}$ 还必须经过与线元从构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 到构形 $\mathscr{R}(t)$ 相同的变换：

$$d\mathbf{P} \overset{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{\Rightarrow} d\mathbf{p} = \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{P}$$

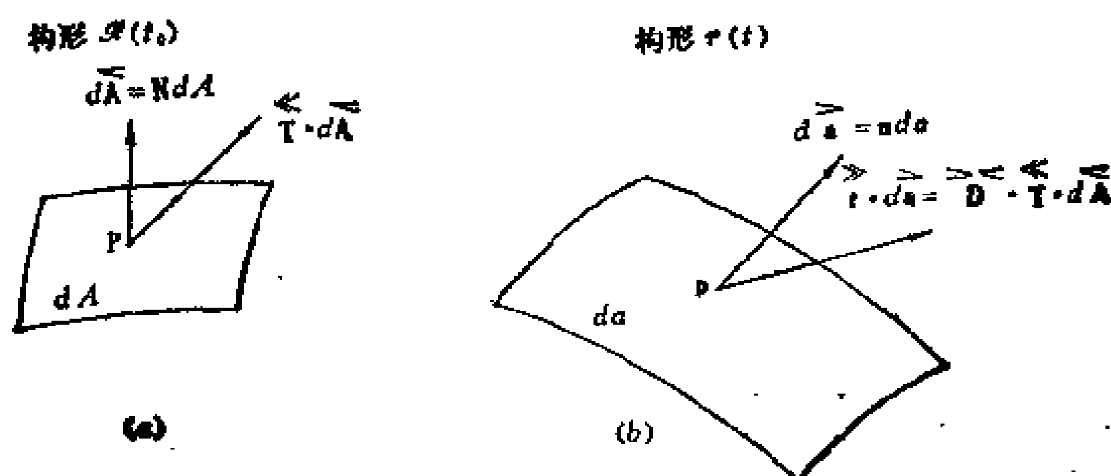
才能得到作用于面元 $d\overset{)}{\mathbf{a}}$ 上的力：

$$\overset{((}{\mathbf{T}} \cdot d\overset{(}{\mathbf{A}} \overset{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{\Rightarrow} \overset{))}{\mathbf{t}} \cdot d\overset{)}{\mathbf{a}} = \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \overset{((}{\mathbf{T}} \cdot d\overset{(}{\mathbf{A}}$$

参考图 4.9。但注意图 4.9(a) 中的 $\overset{((}{\mathbf{T}} \cdot d\overset{(}{\mathbf{A}}$ 并非是作用于构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中面元 $d\overset{(}{\mathbf{A}}$ 的力；它经过"$\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot$"变换以后，得到作用于构形 $r(t)$ 中面元 $d\overset{)}{\mathbf{a}}$ 的力。

(4.5.14)式除以 $|d\overset{(}{\mathbf{A}}|$ 以后，得到

$$\sigma_n \overset{)}{\mathbf{t}}_n = \overset{)(}{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{N} = \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \overset{((}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{N} \qquad (4.5.15)$$



$$d\overset{(}{\mathbf{A}} \Longrightarrow d\overset{)}{\mathbf{a}} = \mathscr{J} \overset{)(}{\mathbf{D}}^* \cdot d\overset{(}{\mathbf{A}}$$

$$d\mathbf{P} \Longrightarrow d\mathbf{p} = \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{P}$$

$$\overset{((}{\mathbf{T}} \cdot d\overset{(}{\mathbf{A}} \Longrightarrow \overset{))}{\mathbf{t}} \cdot d\overset{)}{\mathbf{a}} = \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \overset{((}{\mathbf{T}} \cdot d\overset{(}{\mathbf{A}}$$

图 4.9

因此 $\overset{((}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{N}$ 经过"$\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot$"变换以后等于作用在 $r(t)$ 构形中面积为 σ_n 的面元上的力(图 4.10)。但注意图 4.10(a) 中，$\overset{((}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{N}$ 并非作

用于构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中单位面积的力；但它经过“$\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot$”的变换以后，得到作用于构形 $\mathscr{r}(t)$ 中面积为 σ_n 的面元上的力。

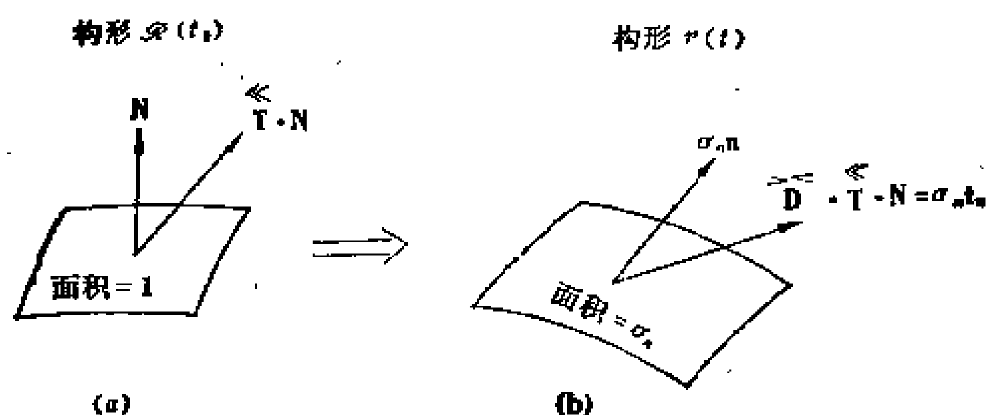


图 4.10

习题 4.3 设 $\overset{))}{\mathbf{t}}=t^{rs}\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s$，证明

$$\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}=\mathscr{J}\overset{))}{\mathbf{t}}\cdot\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^*=\mathscr{J}t^{rs}\mathbf{g}_r\mathbf{G}_s=\underset{\cdot}{t}^{rs}\mathbf{g}_r\mathbf{G}_s$$

$$\overset{((}{\mathbf{T}}=\mathscr{J}\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot\overset{))}{\mathbf{t}}\cdot\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^*=\mathscr{J}t^{rs}\mathbf{G}_r\mathbf{G}_s=\underset{\cdot}{t}^{rs}\mathbf{G}_r\mathbf{G}_s$$

式中 $\mathbf{G}_r$ 为在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 的 $\{x^r, t_0\}$ 坐标系中的协变基矢量。因此 $\underset{\cdot}{t}^{rs}=\mathscr{J}t^{rs}$ 同时是几个应力张量的逆变分量，但各个应力张量的并矢基不同。

三、Kirchhoff 动量方程

将(4.5.10)式 $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$ 代入 Boussinesq 动量方程(4.4.4)式中，得到 Kirchhoff 动量方程及其分量形式

$$(\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot\overset{((}{\mathbf{T}})\cdot\overset{(}{\square}+\rho_0\mathbf{f}=\rho_0\mathbf{a}$$

$$(x^i_{;N}T^{NM})_{;M}+\rho_0 f^i=\rho_0 a^i \qquad (4.5.16)$$

式中

$$(x^i_{,N}T^{NM})_{;M} = (x^i_{,N}T^{NM})_{,M} + x^i_{,N}T^{NL}\Gamma^M_{ML}$$
$$+ [(x^i_{,N}T^{NM})_{,j} + (x^k_{,N}T^{NM})\Gamma^i_{jk}]x^j_{,M} \qquad (4.5.17)$$

设 $x^i_{,N}$ 与 T^{NM} 只是 $X^A(A = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$ 的函数，而不显含 x^r $(r = 1, 2, 3)$，则(4.5.17)式成为

$$(x^i_{,N}T^{NM})_{;M} = (x^i_{,N}T^{NM})_{,M} + (x^i_{,N}\Gamma^M_{ML} + x^k_{,N}x^j_{,L}\Gamma^i_{jk})T^{NL} \qquad (4.5.17)'$$

四、动量方程在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的表示

Boussinesq 动量方程(4.4.3)与 Kirchhoff 动量方程 (4.5.16)′虽然和 Cauchy 动量方程(4.3.3)式不同，采用 Lagrange 坐标(物质描述法)，但它们也同样是构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的矢量方程。我们可以利用转移张量将它们平移到构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中来，成为构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的矢量方程。由(1.2.39)式，转移张量的全梯度为零，可以任意地移进或移出 $\overset{\langle}{\square}$ 运算符，因此只需把 $\overset{\langle}{\square}$ 运算符内的全部张量都平移到构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中即可。我们还假定全部自变量都只有 $X^A(A= \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$，不显含 $x^r(r = 1, 2, 3)$，则运算符 $\overset{\langle}{\square}$ 可改为构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的 $\overset{\langle}{\nabla}$。于是 Boussinesq 动量方程(4.4.4)成为

$$\overset{\langle\langle}{\boldsymbol{\tau}} \cdot \overset{\langle}{\nabla} + \rho_0\overset{\langle}{\mathbf{f}} = \rho_0\overset{\langle}{\mathbf{a}} \qquad (4.5.18a)$$

式中由(4.4.2)，并利用(1.1.15)或(1.1.15)′，

$$\overset{\langle}{\mathbf{f}} = f^A\mathbf{G}_A, \quad \overset{\langle}{\mathbf{a}} = a^A\mathbf{G}_A \qquad (4.5.19)$$

$$\overset{\langle\langle}{\boldsymbol{\tau}} = \overset{\langle\rangle}{\mathbf{I}} \cdot \overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}} = g^A_r\tau^{rB}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B = \tau^{AB}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B \qquad (4.5.20a)$$

式中

$$\tau^{AB} = g^A_r\tau^{rB} \qquad (4.5.20b)$$

故(4.5.18a)式的分量形式为

$$\tau^{AB}_{;B} + \rho_0 f^A = \rho_0 a^A \qquad (4.5.18b)$$

Kirchhoff 动量方程(4.5.16)则成为

$$(\overset{\langle\langle}{\mathbf{D}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}) \cdot \overset{\langle}{\nabla} + \rho_0 \overset{\langle}{\mathbf{f}} = \rho_0 \overset{\langle}{\mathbf{a}} \qquad (4.5.21)$$

但 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{D}} = \mathbf{p}\overset{\langle\langle}{\nabla} = (\mathbf{P} + \overset{\langle}{\mathbf{u}})\overset{\langle}{\nabla} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{I}} + \overset{\langle\langle}{\mathbf{u}\nabla}$

故(4.5.21)式可改写为

$$[(\overset{\langle\langle}{\mathbf{I}} + \overset{\langle\langle}{\mathbf{u}\nabla}) \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}] \cdot \overset{\langle}{\nabla} + \rho_0 \overset{\langle}{\mathbf{f}} = \rho_0 \overset{\langle}{\mathbf{a}} \qquad (4.5.22a)$$

其分量形式为

$$[(\delta^A_N + u^A_{;N})T^{NM}]_{;M} + \rho_0 f^A = \rho_0 a^A \qquad (4.5.22b)$$

§4.6 Новожилов 动量方程与 Signorini 动量方程

Boussinesq 动量方程(4.5.18)与 Kirchhoff 动量方程(4.5.21)虽然是构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的矢量方程，但它们各是原来在 $\mathscr{r}(t)$ 中的动量方程(4.4.4)与(4.5.16)经过平移的结果，实际上与平移前并无质的区别。

另外一种方法是将动量方程从构形 $\mathscr{r}(t)$ 中经过某种变换(而不是平移)成为在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的矢量方程

一、Новожилов 方程

将 Kirchhoff 动量方程(4.5.16) 进行以逆变形梯度表示的变换，即"$\overset{-1}{\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}}\cdot$"的变换。由(2.3.11)式，可知这是一个把构形 $\mathscr{r}(t)$ 中的 $d\mathbf{p}$ 变成构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的 $d\mathbf{P}$ 的变换，而以变形梯度表示的变换"$\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}\cdot$"则是把构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的线元 $d\mathbf{P}$ 变成构形 $\mathscr{r}(t)$ 中的线元 $d\mathbf{p}$。由 (2.8.23) 式，"$\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}\cdot$"也是把构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中沿 Green 变形张量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}$ 主方向的单位矢量 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(\Gamma = \mathrm{I, II, III})$ 变换成 Cauchy 变形张量 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}$ 主方向单位矢量 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(\gamma = 1, 2, 3)$ 并放大 $\underset{\Gamma}{\lambda}$ 倍，即

$$\underset{\Gamma}{\lambda}\underset{\gamma}{\mathbf{n}} = \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \underset{\Gamma}{\mathbf{N}} \quad (\Gamma = \gamma,\ \text{不取和})$$

反之，由(2.8.24)式，以逆变换梯度表示的变换 “$\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot$” 则把 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}$ 变换成 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}$，并缩小 $\underset{\Gamma}{\lambda}$ 倍，即

$$\underset{\Gamma}{\lambda}^{-1}\underset{\Gamma}{\mathbf{N}} = \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} \cdot \underset{\gamma}{\mathbf{n}} \qquad (\Gamma = \gamma,\ \text{不取和})$$

Kirchhoff 动量方程的体力 $\mathbf{f}$ 与加速度 $\mathbf{a}$ 经过上述 “$\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot$” 的变换以后，变成①

$$\overset{(}{\mathbf{F}} = \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{f} \qquad \overset{(}{\mathbf{A}} = \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{a} \tag{4.6.1}$$

这里 $\overset{(}{\mathbf{F}}$ 称为拟体力，$\overset{(}{\mathbf{A}}$ 称为拟加速度，它们必须经过以变形梯度表示的变换（即 “$\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot$”）以后才变成真实的体力 $\mathbf{f}$ 与加速度 $\mathbf{a}$。

先把 Kirchhoff 动量方程(4.5.16)左端第一项进行展开：

$$(\overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot \overset{((}{\mathbf{T}}) \cdot \overset{(}{\square} = \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot (\overset{((}{\mathbf{T}} \cdot \overset{(}{\nabla}) + (\overset{)(}{\mathbf{D}}\,\overset{(}{\square}) : \overset{((}{\mathbf{T}} \tag{4.6.2}$$

于是，利用(4.6.1)与(4.6.2)式，Kirchhoff 动量方程(4.5.16)经过 “$\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot$” 的变换以后成为

$$\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} \cdot [\overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot (\overset{((}{\mathbf{T}} \cdot \overset{(}{\nabla}) + (\overset{)(}{\mathbf{D}}\overset{(}{\square}) : \overset{((}{\mathbf{T}}] + \rho_0\overset{(}{\mathbf{F}} = \rho_0\overset{(}{\mathbf{A}}$$

即

$$\overset{((}{\mathbf{T}} \cdot \overset{(}{\nabla} + \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} \cdot [(\overset{)(}{\mathbf{D}}\overset{(}{\square}) : \overset{((}{\mathbf{T}}] + \rho_0\overset{(}{\mathbf{F}} = \rho_0\overset{(}{\mathbf{A}} \tag{4.6.3}$$

可以证明上式左端第二项可以通过 Green 变形张量 $\overset{((}{\mathbf{C}}$ 与 $\overset{((}{\mathbf{T}}$ 表示（证明见下文）：

---

① 注意勿将(4.6.1)式中的 $\overset{(}{\mathbf{A}}$ 与微面元 $d\overset{(}{\mathbf{A}}$ 混淆。

$$\overset{-1}{\overset{\circ}{\mathbf{D}}} \cdot [(\overset{\times}{\mathbf{D}}\overset{\langle}{\square}):\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}] = \overset{-1}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}} \cdot \left(\mathbf{C}\nabla - \frac{1}{2}\nabla\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}\right):\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} \qquad (4.6.4)$$

因此(4.6.3)式成为

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\langle}{\nabla} + \overset{-1}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}} \cdot \left(\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}\overset{\langle}{\nabla} - \frac{1}{2}\overset{\langle}{\nabla}\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}\right):\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} + \rho_0\overset{\langle}{\mathbf{F}} = \rho_0\overset{\langle}{\mathbf{A}} \quad (4.6.5a)$$

其分量形式为

$$T^{AM}_{;M} + \overset{-1}{C}{}^{AB}\left(C_{BN;M} - \frac{1}{2}\nabla_B C_{NM}\right)T^{NM} + \rho_0 F^A = \rho A^A$$

$$(4.6.5b)$$

(4.6.5) 式称为 Новожилов 动量方程，它显含 Green 变形张量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}$，而逆变形梯度 $\overset{-1}{\overset{\circ}{\mathbf{D}}}$ 只隐含在拟体力 $\overset{\langle}{\mathbf{F}}$ 与拟加速度 $\overset{\langle}{\mathbf{A}}$ 之中。

现在来证明(4.6.4)等式。利用(2.5.1)与(1.2.21)第二式，得到

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}\overset{\langle}{\nabla} = (\overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \overset{\times}{\mathbf{D}})\overset{\langle}{\square} = \frac{d}{dX^M}(x^r_{,A}x_{r,B}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B)\mathbf{G}^M$$

$$= (x^r_{,A}x_{r,B})_{;M}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B\mathbf{G}^M$$

$$= (x^r_{;AM}x_{r;B} + x^r_{,A}x_{r:BM})\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B\mathbf{G}^M$$

$$= (x^r_{;AN}x_{r;M} + x^r_{,A}x_{r:MN})\mathbf{G}^A\mathbf{G}^M\mathbf{G}^N$$

式中由(1.2.53)式我们约定

$$x_{r,B} = x_{r;B} = x_{r:B} = g_{rs}x^s_{,B}$$

于是可得

$$(\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}\overset{\langle}{\nabla}):\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} = (x^r_{;AN}x_{r;M} + x^r_{,A}x_{r:MN})T^{MN}\mathbf{G}^A \qquad (4.6.6)$$

由于 T^{MN} 为对称，故(4.6.6)式右端括弧内第一项指标M与N可以互换，同时又因为(利用(1.2.15)式，并假定 $x^r_{,M}$ 只是 X^K 的函数)，

$$x^r_{;MA} = (x^r_{,M})_{:A} = (x^r_{,M})_{;A} + x^s_{,A}(x^r_{,M})_{;s}$$

$$= \frac{\partial}{\partial X^A}x^r_{,M} - x^r_{,N}\Gamma^N_{AM} + x^s_{,A}(x^m_{,M}\Gamma^r_{sm})$$

对于M与A为对称：

$$x^r_{;MA}=x^r_{;AM}$$

故(4.6.6)式可化成

$$\begin{aligned}(\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}\overset{\langle}{\nabla}):\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} &= \left[\frac{1}{2}(x^r_{;MA}x_{r,N}+x^r_{;NA}x_{r,M})+x^r_{,A}x_{r;MN}\right]T^{MN}\mathbf{G}^A\\ &=\left[\frac{1}{2}\square_A(x^r_{,M}x_{r,N})+x^r_{,A}x_{r;MN}\right]T^{MN}\mathbf{G}^A\\ &=\frac{1}{2}(\overset{\langle}{\nabla}\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}):\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}+\overset{()}{\mathbf{D}}{}^*\cdot(\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}\overset{\langle}{\square}):\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}\end{aligned}$$

移项，得

$$\overset{()}{\mathbf{D}}{}^*\cdot(\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}\overset{\langle}{\square}):\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}=\left(\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}\overset{\langle}{\nabla}-\frac{1}{2}\overset{\langle}{\nabla}\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}\right):\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} \qquad (4.6.7)$$

将以下的等式(即(2.5.1)第二式)点积(4.6.7)式的两端：

$$\overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}}\cdot\overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^*=\overset{-1}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}}$$

就得到(4.6.4)式。 [证毕]

二、Signorini 动量方程

将 Kirchhoff 动量方程 (4.5.16) 进行 "$\overset{()}{\mathbf{D}}{}^*\cdot$" 的变换。由(2.8.23)式

$$\overset{()}{\mathbf{D}}{}^*=\underset{\mathrm{I}}{\lambda}\underset{\mathrm{I}}{\mathbf{N}}\underset{1}{\mathbf{n}}+\underset{\mathrm{II}}{\lambda}\underset{\mathrm{II}}{\mathbf{N}}\underset{2}{\mathbf{n}}+\underset{\mathrm{III}}{\lambda}\underset{\mathrm{III}}{\mathbf{N}}\underset{3}{\mathbf{n}}$$

故 "$\overset{()}{\mathbf{D}}{}^*\cdot$" 的变换把构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}$ ($\gamma=1,2,3$) 变换为构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的 $\underset{\Gamma}{\lambda}\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}$ ($\Gamma=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}$，不取和)：

$$\overset{()}{\mathbf{D}}{}^*\cdot\underset{\gamma}{\mathbf{n}}=\underset{\Gamma}{\lambda}\underset{\Gamma}{\mathbf{N}} \qquad (\Gamma=\gamma，不取和)$$

(4.5.16)式经过变换以后成为

$$\overset{\circ}{\mathbf{D}}^* \cdot [\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}} \cdot (\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\langle}{\nabla}) + (\overset{\rangle\langle\ \langle}{\mathbf{D}\square}) : \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}] + \rho_0 \overset{\circ}{\mathbf{D}}^* \cdot \mathbf{f}$$

$$= \rho_0 \overset{\circ}{\mathbf{D}}^* \cdot \mathbf{a}$$

利用(4.6.7)式后，又可化作

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}} \cdot (\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\langle}{\nabla}) + \left(\overset{\langle\langle\ \langle}{\mathbf{C}\nabla} - \frac{1}{2} \overset{\langle\ \langle\langle}{\nabla\mathbf{C}}\right) : \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} + \rho_0 \mathbf{f} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}$$

$$= \rho_0 \mathbf{a} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}} \tag{4.6.8a}$$

其分量形式为

$$C_{AN} T^{NM}_{;M} + \left(C_{AN;M} - \frac{1}{2} \nabla_A C_{NM}\right) T^{NM}$$

$$+ \rho_0 f_r x^r_{,A} = \rho_0 a_r x^r_{,A} \tag{4.6.8b}$$

(4.6.8)式就是 Signorini 动量方程。利用

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{I}} + 2\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}$$

它又可写作

$$(\overset{\langle\langle}{\mathbf{I}} + 2\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}) \cdot (\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\langle}{\nabla}) + (2\overset{\langle\langle\ \langle}{\mathbf{E}\nabla} - \overset{\langle\ \langle\langle}{\nabla\mathbf{E}}) : \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}$$

$$+ \rho_0 \mathbf{f} \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}} = \rho_0 \mathbf{a} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}} \tag{4.6.9a}$$

其分量形式为

$$(G_{AN} + 2E_{AN}) T^{NM}_{;M} + (2E_{AN;M} - \nabla_A E_{NM}) T^{NM}$$

$$+ \rho_0 f_r x^r_{,A} = \rho_0 a_r x^r_{,A} \tag{4.6.9b}$$

§4.7 各种张量主方向的关系

我们研究过许多张量，如变形张量，变形率张量，应力张量等。每个张量都有自己的主方向。现在我们来研究各个张量主方向之间的关系。

关于**变形张量**，我们已定义(见§3.3，七)右伸长张量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}$ 或右 Cauchy-Green 张量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}$ 的主方向为 Lagrange 方向 $\underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{N}}}$，$\Gamma = \mathrm{I}, \mathrm{II}$,

III；左伸长张量 $\overset{\gg}{\mathbf{V}}$ 或左 Cauchy-Green 张量 $\overset{\gg\, -1}{\mathbf{C}}$ 的主方向为 Euler 方向 $\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}$，$\gamma=1, 2, 3$。由(2.8.17)式，$\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}}$ 与 $\underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{N}}}$ 之间存在着如(3.3.18)式所示的关系：

$$\left.\begin{aligned}\underset{\gamma}{\overset{\rangle}{\mathbf{n}}} &= \overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}} \cdot \underset{\Gamma}{\mathbf{N}} \\ \underset{\Gamma}{\overset{\langle}{\mathbf{N}}} &= \overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}{}^{*} \cdot \underset{\gamma}{\mathbf{n}}\end{aligned}\right\} \quad (\gamma=\Gamma) \tag{4.7.1}$$

式中 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}$ 为变形梯度 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}$ 进行极分解所得的正交张量(见(2.8.19)式)。

变形率张量 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 的主方向为 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}^{d}$(见(3.3.24)式)，$\gamma=1, 2, 3$；它与 Euler 方向 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}$ 一般是不一致的。

关于应力张量，我们假定：

Cauchy 应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 的主方向为 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(\overset{\gg}{\mathbf{t}})$，$(\gamma=1, 2, 3)$

第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{\ll}{\mathbf{T}}$ 的主方向为 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(\overset{\ll}{\mathbf{T}})$ $(\Gamma=\mathrm{I, II, III})$。

一般说来，在 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(\overset{\gg}{\mathbf{t}})$ 与 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(\overset{\ll}{\mathbf{T}})$ 之间并不存在象(4.7.1)式那样的关系，除非材料为各向同性弹性材料(见下面(4.7.4)式)。

但是可以证明在 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(\overset{\gg}{\mathbf{t}})$ 与张量 $\overset{\ll\,1/2}{\mathbf{C}} \cdot \overset{\ll}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\ll\,1/2}{\mathbf{C}}$ 的主方向 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(\overset{\ll\,1/2}{\mathbf{C}} \cdot \overset{\ll}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\ll\,1/2}{\mathbf{C}})$ 之间也有象(4.7.1)式的关系，即

$$\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(\overset{\gg}{\mathbf{t}}) = \overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}} \cdot \underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(\overset{\ll\,1/2}{\mathbf{C}} \cdot \overset{\ll}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\ll\,1/2}{\mathbf{C}}) \tag{4.7.2}$$

$$\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(\overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}}\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}\cdot\overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}})=\overset{-1}{\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}}\cdot\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}) \tag{4.7.3}$$

证明 由(4.5.11)式，并利用(2.8.19)式，得到

$$\mathscr{J}\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}=\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}\cdot\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}{}^{*}=\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}\cdot\overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}}\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}\cdot\overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}}\cdot\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}{}^{*} \tag{4.7.4a}$$

两端进行 $\overset{-1}{\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}}\cdot$ 与 $\cdot\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ 的运算，得(注意 $\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}{}^{*}=\overset{-1}{\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}}$)

$$\mathscr{J}\overset{-1}{\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}}\cdot\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}\cdot\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}})=(\overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}}\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}\cdot\overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}})\cdot\overset{-1}{\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}}\cdot\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}) \tag{4.7.4b}$$

(4.7.4)式说明 Kirchhoff 应力张量 $\underset{\circ}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}}$ 与张量 $\overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}}\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}\cdot\overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}}$ 为"正交相似"张量，前者是后者经过旋转(以 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}$ 表示)的结果。故两者对应的主值相同，主方向相差以 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}$ 表示的转动。(4.7.2)、(4.7.3)式得证。

对于各向同性弹性材料，$\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}})$ 与 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}})$ 恒重合。此时，比较(4.7.1)与(4.7.2)式，可知 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}})$ 与 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(\overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}}\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}\cdot\overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}})$ 重合。因此 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}})$ 与 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}})$ 重合。此时由(4.7.1)或(4.7.2)式可得(各向同性弹性材料)

$$\begin{aligned}\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}})&=\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}\cdot\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}})\\ &\qquad\qquad(\Gamma=\gamma)\\ \underset{\Gamma}{\mathbf{N}}(\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}})&=\overset{-1}{\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}}\cdot\underset{\gamma}{\mathbf{n}}(\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}})\end{aligned} \tag{4.7.5}$$

习题 4.4 设取 $\underset{K}{\mathbf{N}}(\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}})$ 为局部基矢量 $\mathbf{G}_K(K=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})$，则有(以 $\underset{K}{\lambda}$ 表示 $\overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}}$ 的主值)

$$\mathbf{G}_K = \underset{K}{\mathbf{N}}(\overset{\gg}{\mathbf{C}}),\ \hat{\mathbf{g}}_k = \lambda\underset{K\,k}{\mathbf{n}}(\overset{\gg}{\mathbf{C}}) \qquad (K = k,\ \text{不取和})$$

试写出张量 $\overset{\ll}{\mathbf{T}}$, $\overset{\gg\ll}{\boldsymbol{\tau}}$, $\overset{\ll}{\mathbf{C}}^{1/2}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{T}}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{C}}^{1/2}$ 与 $\underset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}} = \mathscr{J}\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 在局部基矢量中的分解式。

答
$$\overset{\ll}{\mathbf{T}} = \sum_{K,L} T^{KL}\underset{K}{\mathbf{N}}(\overset{\ll}{\mathbf{C}})\underset{L}{\mathbf{N}}(\overset{\ll}{\mathbf{C}})$$

$$\overset{\gg\ll}{\boldsymbol{\tau}} = \sum_{K,L} T^{KL}\lambda\underset{K\,k}{\mathbf{n}}(\overset{\gg}{\mathbf{c}})\underset{L}{\mathbf{N}}(\overset{\ll}{\mathbf{C}}) \qquad (k = K)$$

$$\underset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}} = \mathscr{J}\overset{\gg}{\mathbf{t}} = \sum_{K,L} T^{KL}\lambda\lambda\underset{KL\,k}{\mathbf{n}}(\overset{\gg}{\mathbf{c}})\underset{l}{\mathbf{n}}(\overset{\gg}{\mathbf{c}}) \quad (k = K,\ l = L)$$

$$\overset{\ll}{\mathbf{C}}^{1/2}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{T}}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{C}}^{1/2} = \sum_{K,L} T^{KL}\lambda\lambda\underset{KLK}{\mathbf{N}}(\overset{\ll}{\mathbf{C}})\underset{L}{\mathbf{N}}(\overset{\ll}{\mathbf{C}})$$

§4.8 能 量 平 衡

一、机械能平衡方程

定义物体的任意部分 $\mathscr{V}'$ 的动能为

$$K = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}'} \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\rho dv = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}'} \mathbf{v}^2\rho dv$$

我们要把动能对时间 t 的导数（物质导数）写成一般积分形式(4.1.2)式。令(4.1.2)式中的 Φ 为

$$\Phi = K = \int_{\mathscr{V}'} \varphi\rho dv,\ \text{故}\ \varphi = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2$$

(4.1.2)式所要求的形式为

$$\dot{K} = -\int_{\mathscr{a}'} \overset{\rangle}{\mathbf{q}}\cdot d\overset{\rangle}{\mathbf{a}} + \int_{\mathscr{V}'} s\rho dv \tag{4.8.1}$$

式中 $\mathscr{a}'$ 为 $\mathscr{V}'$ 域的表面。

但由 Reynolds 输运定理(3.7.16)式，有

$$\dot{K}=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}'}\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\rho dv=\int_{\mathcal{V}'}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)^{\boldsymbol{\cdot}}\rho dv \tag{4.8.2}$$

式中的 $(\mathbf{v}^2/2)^{\boldsymbol{\cdot}}$ 可以利用 Cauchy 第一运动律(4.3.3)式求得:

$$\rho\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)^{\boldsymbol{\cdot}}=\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{v}\cdot(\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}+\rho\mathbf{f}) \tag{4.8.3}$$

此式右端第一项可以利用下面的分式计算:

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}\cdot\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}})\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}&=\mathbf{v}\cdot(\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla})+(\mathbf{v}\nabla):\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}\\&=\mathbf{v}\cdot(\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla})+\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}}:\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}\end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{v}\cdot(\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla})=(\mathbf{v}\cdot\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}})\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}-\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}:\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}} \tag{4.8.4}$$

将(4.8.4)式代入(4.8.3)式，得

$$\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}\mathbf{v}^2=(\mathbf{v}\cdot\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}})\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}+\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}-\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}:\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}} \tag{4.8.5}$$

(4.8.5) 式称为微分形式的机械能平衡方程。 将 (4.8.5) 式代入(4.8.2)式，并利用散度定理，得

$$\begin{aligned}\dot{K}&=\int_{\mathcal{V}'}(\mathbf{v}\cdot\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}})\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}\,dv+\int_{\mathcal{V}'}\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}\,dv-\int_{\mathcal{V}'}\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}:\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}}dv\\&=\int_{\mathcal{A}'}\mathbf{v}\cdot\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n}\,da+\int_{\mathcal{V}'}\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}dv-\int_{\mathcal{V}'}\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}:\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}}dv\end{aligned} \tag{4.8.6}$$

(4.8.6)式称为积分形式的机械能平衡方程。

对比(4.8.6)与(4.8.1)式可知，对于动能，一般积分形式平衡方程(4.1.2)式中的各个量为

$$\varphi=\frac{1}{2}\mathbf{v}^2,\ \mathbf{q}=-\mathbf{v}\cdot\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}},\ s=\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}-\frac{1}{\rho}\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}:\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}} \tag{4.8.7}$$

将 (4.8.7) 式代入一般微分形式的平衡方程 (4.1.3)，则重新得到

(4.8.5)式。

(4.8.5)与(4.8.6)式实际上均是 Cauchy 运动律的推论，它们又称为动能定理。

(4.8.6) 式右端前两项各表示物体 $\mathscr{P}'$ 部分所承受表面力与体积力的功率，右端末项中，$-\overset{\gg}{\mathbf{t}}:\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 表示每单位体积的内力功率，或者说 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}:\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 表示每单位体积的变形功率。在(4.8.7)的 s 表示式中 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}$ 表示每单位质量的机械能源，$(1/\rho)\overset{\gg}{\mathbf{t}}:\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 表示每单位质量的机械能汇。

二、能量平衡方程

前一部分中的机械能平衡方程是 Cauchy 运动律的推论。在这一部分中研究更普遍的能量平衡原理，它是独立于 Cauchy 运动律的物理规律，同时考虑到了热能密度、热流与热源，并通过能量平衡把这些热学量与力学量相耦合起来。

物体的任意部分 $\mathscr{P}'$ 的总能量被定义为

$$P = K + E \tag{4.8.8}$$

式中 K 为动能(见前)，E 为内能：

$$E = \int_{\mathscr{P}'} e\rho dv \tag{4.8.9}$$

这里 e 为每单位质量的内能。造成总能量 P 产生变化的原因有：机械功、热流矢量(或称热通量) $\mathbf{h}$ 与每单位质量的热源 σ，因此

$$\begin{aligned}\dot{K} + \dot{E} &= \int_{\partial\mathscr{P}'} \mathbf{v}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot d\vec{\mathbf{a}} + \int_{\mathscr{P}'} \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}dv \\ &\quad - \int_{\partial\mathscr{P}'} \mathbf{h}\cdot d\vec{\mathbf{a}} + \int_{\mathscr{P}'} \sigma\rho dv \\ &= \int_{\partial\mathscr{P}'} (\mathbf{v}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{t}} - \mathbf{h})\cdot d\mathbf{a} \\ &\quad + \int_{\mathscr{P}'} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{f} + \sigma)\rho dv\end{aligned} \tag{4.8.10}$$

式中 $d\vec{\mathbf{a}}=\mathbf{n}da$，热量与功之间用热功当量进行换算。(4.8.10)式称为积分形式的(总)能量平衡方程。它相同于在一般积分形式的平衡方程(4.1.2)中取

$$\varphi=\frac{1}{2}\mathbf{v}^2+e,\ \mathbf{q}=\mathbf{h}-\mathbf{v}\cdot\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}},\ s=\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}+\sigma \tag{4.8.11}$$

将(4.8.11)式的各个量代入(4.1.3)式中，易写出相应的微分形式的能量平衡方程。

为了简单起见，我们来研究(总)能量 P 与动能 K 之差，即内能 E。将积分形式的总能量平衡方程 (4.8.10) 与机械能平衡方程 (4.8.6)相减，得到。

$$\dot{E}=-\int_{a'}\mathbf{h}\cdot d\vec{\mathbf{a}}+\int_{v'}\sigma\rho dv+\int_{v'}\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}:\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}}dv \tag{4.8.12}$$

(4.8.12)式称为积分形式的热能平衡方程。它相当于在一般积分形式的平衡方程(4.1.2)中取

$$\varphi=e,\ \ \mathbf{q}=\mathbf{h},\ \ s=\sigma+\frac{1}{\rho}\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}:\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}} \tag{4.8.13}$$

注意变形功率 $\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}:\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}}$ (每单位体积)在机械能平衡方程 (4.8.6) 中起着汇的作用，而在热能平衡方程(4.8.12)中起着源的作用。在(4.8.12)式中正是通过含 $\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}:\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}}$ 的积分项把力学量与热学效应耦合起来。

将(4.8.13)的各个量代入(4.1.3)式，可得到微分形式的热能平衡方程，即场方程:

$$\rho\dot{e}+\mathbf{h}\cdot\vec{\nabla}-\rho\left(\sigma+\frac{1}{\rho}\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}:\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}}\right)=0$$

即

$$\rho\dot{e}=-\mathbf{h}\cdot\vec{\nabla}+\rho\sigma+\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}:\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}} \tag{4.8.14}$$

(4.8.12)与(4.8.14)式又各称为积分形式与微分形式的热力学

第一定律。

三、变形功率的几种表示

变形功率 w 定义为

$$w=\mathscr{J}\,\overset{\gg}{\mathbf{t}}:\overset{\gg}{\mathbf{d}}=\underset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}:\overset{\gg}{\mathbf{d}} \tag{4.8.15}$$

它表示参考构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中每单位体积（也就是构形 $\mathscr{r}(t)$ 中单位体积的 $\mathscr{J}$ 倍)的变形功率，因为 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}:\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 表示构形 $\mathscr{r}(t)$ 中每单位体积的变形功率。

由(4.4.4)与(4.5.11)式

$$\underset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}=\mathscr{J}\,\overset{\gg}{\mathbf{t}}=\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}=\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{T}}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*} \tag{4.8.16}$$

将(4.8.16)式中 $\underset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}=\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}$ 代入(4.8.15)式，得到①

$$\begin{aligned}w&=\underset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}:\overset{\gg}{\mathbf{d}}=\underset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}:(\overset{\gg}{\mathbf{d}}+\overset{\gg}{\mathbf{w}})=\underset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}:\overset{\gg}{\mathbf{L}}=(\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}):\overset{\gg}{\mathbf{L}}\\&=\operatorname{tr}(\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^{*})=\operatorname{tr}(\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}\cdot(\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}})^{*})\end{aligned}$$

利用(3.2.5)式，上式可写作

$$w=\operatorname{tr}(\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{()}{\dot{\mathbf{D}}}{}^{*})=\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}:\overset{)(}{\dot{\mathbf{D}}} \tag{4.8.17}$$

若将(4.8.16)式的最右端代入(4.8.15)，则得到①

$$\begin{aligned}w&=(\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{T}}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}):\overset{\gg}{\mathbf{d}}=\operatorname{tr}(\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{T}}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{d}})\\&=\operatorname{tr}(\overset{\ll}{\mathbf{T}}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{d}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}})\end{aligned}$$

利用(3.4.18)式，上式可写作

---

① 注意公式(见习题 3.20 的提示)
$\mathbf{A}:\mathbf{B}=\operatorname{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{*})=\operatorname{tr}(\mathbf{A}^{*}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{B}:\mathbf{A}=\operatorname{tr}(\mathbf{B}^{*}\cdot\mathbf{A})=\operatorname{tr}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{*})$
式中 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 为二阶张量。

$$w = \mathrm{tr}\,(\overset{\ll}{\mathbf{T}} \cdot \dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}) = \overset{\ll}{\mathbf{T}} : \dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}} \qquad (4.8.18)$$

因此，我们得到了变形功率 w 的三种不同的表示 (4.8.15)，(4.8.17)与(4.8.18)式。由(4.8.18)式，我们称 $(\overset{\ll}{\mathbf{T}}, \dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}})$ 是一个共轭对，或者 $\overset{\ll}{\mathbf{T}}$ 与 $\dot{\overset{\ll}{\mathbf{E}}}$ 为功共轭。有的人根据(4.8.17)式称 $\overset{\gg}{\boldsymbol{\tau}}$ 与 $\dot{\overset{\gg}{\mathbf{D}}}$ 功共轭，但是这不是严格意义下的功共轭，因为 $\dot{\overset{\gg}{\mathbf{D}}}$ 不是一个变形张量(它包含刚体旋转部分)。

(4.8.15)，(4.8.17)与(4.8.18)式的分量形式各为

$$w = \mathscr{J} t^{ij} d_{ij} = \underset{0}{t}^{ij} d_{ij} \qquad (4.8.15)'$$

$$= \tau_i^{\cdot A} \frac{D x^i_{,A}}{Dt} \qquad (4.8.17)'$$

$$= T^{AB} \frac{dE_{AB}}{dt} \qquad (4.8.18)'$$

式中

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \qquad (3.3.2)$$

$$\frac{D x^i_{,A}}{Dt} = v^i_{,r} x^r_{,A} \qquad (3.2.5e)$$

$$\frac{dE_{AB}}{dt} = d_{ij} x^i_{,A} x^j_{,B} = \underset{0}{d}_{AB} \qquad (3.4.19)$$

四、机械能平衡方程与能量平衡方程在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的表示

将(4.8.7)式中的各个量 φ，$\mathbf{q}$ 与 s 代入(4.1.10)式，得到在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中表示的积分形式的机械能平衡方程：

$$\dot{K} = \int_{\mathscr{A}'} \mathbf{v} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{t}} \mathscr{J} \overset{\gg}{\mathbf{D}}^{*-1} \cdot d\overset{\ll}{\mathbf{A}} + \int_{\mathscr{V}'} \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \overset{\gg}{\mathbf{t}} : \overset{\gg}{\mathbf{d}}\right) \rho_0 dV \qquad (4.8.19)$$

式中

$$K=\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}'}\mathbf{v}^2\rho_0 dV$$

$\mathscr{V}'$ 为在 $\mathscr{R}(t_0)$ 构形中对应于 v' 的固定域，$\mathscr{A}'$ 表示 $\mathscr{V}'$ 的表面。利用应力张量关系（4.4.2），变形功率 w 的表示式（4.8.15），(4.8.17)与(4.8.18)，可将(4.8.19)式写作

$$\dot{K}=\int_{\mathscr{A}'}\mathbf{v}\cdot\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}\cdot d\overset{(}{\mathbf{A}}+\int_{\mathscr{V}'}(\rho_0\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}-w)dV \qquad (4.8.19)'$$

式中

$$w=\mathscr{J}\,\overset{))}{\mathbf{t}}:\overset{))}{\mathbf{d}}=\underset{\circ}{\overset{))}{\mathbf{t}}}:\overset{))}{\mathbf{d}}=\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\dot{\overset{)(}{\mathbf{D}}}=\overset{((}{\mathbf{T}}:\dot{\overset{((}{\mathbf{E}}} \qquad (4.8.20)$$

相应地，将(4.8.7)式中的各个量 φ，$\mathbf{q}$ 与 s 代入(4.1.11)式，得到在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中表示的，即 Lagrange 型的微分形式机械能平衡方程：

$$\rho_0\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)=(\mathscr{J}\mathbf{v}\cdot\overset{))}{\mathbf{t}}\cdot\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^*)\cdot\overset{(}{\Box}+\rho_0\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}-\frac{1}{\rho}\overset{))}{\mathbf{t}}:\overset{))}{\mathbf{d}}\right)$$

即，

$$\rho_0\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)=(\mathbf{v}\cdot\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}})\cdot\overset{(}{\Box}+\rho_0\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}-w \qquad (4.8.21)$$

为了得到热能平衡方程在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中表示的积分形式与微分形式，只需将(4.8.13)式中的各个量 φ，$\mathbf{q}$ 与 s 代入(4.1.10)与(4.1.11)式。于是由(4.1.10)得到积分形式：

$$\dot{E}=-\int_{\mathscr{A}'}\mathbf{h}\cdot\mathscr{J}\overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^*\cdot d\mathbf{A}+\int_{\mathscr{V}'}\left(\sigma+\frac{1}{\rho}\overset{))}{\mathbf{t}}:\overset{))}{\mathbf{d}}\right)\rho_0 dV \qquad (4.8.22)$$

式中由(4.8.9)式

$$E = \int_{\mathscr{V}'} e\rho_0 dV \tag{4.8.9$'$}$$

定义在 $\mathscr{R}(t_0)$ 构形中的热流矢量 $\overset{\langle}{\mathbf{H}}$：

$$\overset{\langle}{\mathbf{H}} = \mathbf{h}\cdot \mathscr{J}\, \overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^{*} = \mathscr{J}\, \overset{-1}{\overset{\circ}{\mathbf{D}}}\cdot \mathbf{h} \tag{4.8.23}$$

显然有关系式：

$$\mathbf{h}\cdot d\overset{\rangle}{\mathbf{a}} = \overset{\langle}{\mathbf{H}}\cdot d\overset{\langle}{\mathbf{A}} \tag{4.8.24}$$

因此(4.8.22)式可改写成

$$\dot{E} = -\int_{\mathscr{A}'} \overset{\langle}{\mathbf{H}}\cdot d\overset{\langle}{\mathbf{A}} + \int_{\mathscr{V}'} (\sigma\rho_0 + w)dV \tag{4.8.22$'$}$$

由(4.1.11)得到热能平衡方程在 $\mathscr{R}(t_0)$ 构形中表示的微分形式：

$$\rho_0\dot{e} = -\overset{\langle}{\mathbf{H}}\cdot \overset{\langle}{\nabla} + \rho_0\sigma + w \tag{4.8.25}$$

(4.8.22)$'$与(4.8.25)式又各称为在 $\mathscr{R}(t_0)$ 构形中表示的积分形式与微分形式的热力学第一定律。

五、与 Seth 应变度量类对应的应力度量

我们可以把变形功率 w(参考构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中每单位体积)表示成

$$w = \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^{(n)} : \dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}}{}^{(n)} \tag{4.8.26}$$

的形式，式中 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}{}^{(n)}$ 为 Seth 应变度量类(见(2.9.32)式)，$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^{(n)}$ 是参考构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的对称张量，称为与 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}{}^{(n)}$ 为功共轭的应力度量。

当 $n=1$ 时，$\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}{}^{(1)}$ 就是 Green 应变张量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}$(见(2.9.33)式)，因此由(4.8.18)式，$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^{(1)}$ 就是第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量，即 (4.5.13a) 式：

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^{(2)} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} = \overset{-1}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{D}}}\cdot \underset{\bullet}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}}\cdot \overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^{*} \tag{4.8.27}$$

为了要求 $n=-1$ 情况的应力度量 $\overset{((}{\mathbf{T}}{}^{(-1)}$，我们可利用(3.4.32)式，得到

$$\overset{))}{\mathbf{d}}=\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot\dot{\overset{((}{\mathbf{E}}}{}^{(-1)}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*} \tag{4.8.28}$$

将(4.8.28)式代入变形功率 w 的表达式(4.8.15)，并经过化简后①，得到

$$\begin{aligned}
w&=\underset{\circ}{\overset{))}{\mathbf{t}}}:\overset{))}{\mathbf{d}}=\underset{\circ}{\overset{))}{\mathbf{t}}}:(\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot\dot{\overset{((}{\mathbf{E}}}{}^{(-1)}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*})=\mathrm{tr}(\underset{\circ}{\overset{))}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot\dot{\overset{((}{\mathbf{E}}}{}^{(-1)}\cdot\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*})\\
&=\mathrm{tr}(\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}\cdot\underset{\circ}{\overset{))}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}\cdot\dot{\overset{((}{\mathbf{E}}}{}^{(-1)})\\
&=(\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}\cdot\underset{\circ}{\overset{))}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}):\dot{\overset{((}{\mathbf{E}}}{}^{(-1)}=\overset{((}{\mathbf{T}}{}^{(-1)}:\dot{\overset{((}{\mathbf{E}}}{}^{(-1)}
\end{aligned}$$

式中 $\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}\cdot\underset{\circ}{\overset{))}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}$ 为对称张量，因此

$$\overset{((}{\mathbf{T}}{}^{(-1)}=\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}\cdot\underset{\circ}{\overset{))}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}} \tag{4.8.29}$$

$\overset{((}{\mathbf{T}}{}^{(1)}$ 就是通常所谓对流应力张量 $\overset{((}{\mathbf{t}}$（见后(6.2.5)式）的 $\mathscr{J}$ 倍（$\mathscr{J}$ 为体积比）。设 Kirchhoff 应力张量 $\underset{\circ}{\overset{))}{\mathbf{t}}}$ 在 $\kappa(t)$ 构形的随体 Lagrange 坐标系 $\{X^A, t\}$ 中的分解式为

$$\underset{\circ}{\overset{))}{\mathbf{t}}}=\underset{\circ}{t}{}^{AB}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B \tag{4.8.30a}$$

$$=\underset{\circ}{t}{}_{AB}\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B \tag{4.8.30b}$$

将 (4.8.30a) 式代入(4.8.27)式，并注意(2.3.22)式，得到

$$\overset{((}{\mathbf{T}}{}^{(1)}=\overset{((}{\mathbf{T}}=\underset{\circ}{t}{}^{AB}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B=T^{(1)AB}\mathbf{G}_A\mathbf{G}_B$$

---

① 利用 251 页注

$$T^{(1)AB} = T^{AB} = \underset{\circ}{t}^{AB} \tag{4.8.31}$$

将(4.8.30b)式代入(4.8.29)，并注意(2.3.20)式，则得到

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(-1)} = \underset{\circ}{t}_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B = T^{(-1)}_{AB}\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B$$

$$T^{(-1)}_{AB} = \underset{\circ}{t}_{AB} \tag{4.8.32}$$

因此，(4.8.31)式表明在随体 Lagrange 坐标系中，$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(1)}$ 和 $\underset{\circ}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}}$具有相同的逆变分量①，而(4.8.32)式则表明 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(-1)}$ 和 $\underset{\circ}{\mathbf{t}}$ 具有相同的协变分量。

当 $n=1/2$ 时，难以求到 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(1/2)}$ 的类似于(4.8.27)或(4.8.29)式的实体(或绝对)表达式。但是我们可以得到应力度量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(n)}$ 在 Lagrange 标架 $\{\underset{r}{\mathbf{N}}\}$ 中的分解式。设 Cauchy 应力张量 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}$ 与 Kirchhoff 应力张量 $\underset{\circ}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}}$ 在 Euler 标架 $\{\underset{r}{\mathbf{n}}\}$ 中的分解式为

$$\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}} = \sum_{i,j} t_{(ij)}\underset{i}{\mathbf{n}}\underset{j}{\mathbf{n}} \tag{4.8.33}$$

$$\underset{\circ}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}} = \mathscr{J}\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}} = \sum_{i,j} \underset{\circ}{t}_{(ij)}\underset{i}{\mathbf{n}}\underset{j}{\mathbf{n}}, \quad \underset{\circ}{t}_{(ij)} = \mathscr{J} t_{(ij)} \tag{4.8.34}$$

将(4.8.34)代入(4.4.2)，并利用(3.3.22)式，得到第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量的表达式：

$$\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}} = \underset{\circ}{\mathbf{t}} \cdot \overset{\rangle\langle\,-1}{\mathbf{D}}{}^{*} = \sum_{i,j} \underset{\circ}{t}_{(ij)}\underset{j}{\lambda}^{-1}\underset{i}{\mathbf{n}}\underset{J}{\mathbf{N}} \quad (j=J) \tag{4.8.35}$$

类似地，将(4.8.34)分别代入(4.8.27)与(4.8.29)式，可得到 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(1)}$ 与

① 这一结论在前面的(4.5.6)与(4.5.8)式已经得到过。

$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(-1)}$ 在 Lagrange 标架中的分解式：

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(1)} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} = \overset{-1}{\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}} \cdot \underset{\circ}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}} \cdot \overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^{*}$$

$$= \sum_{i,j} \underset{\circ}{t}_{(ij)} \lambda_i^{-1} \lambda_j^{-1} \mathbf{N}_I \mathbf{N}_J \qquad \begin{pmatrix} i = I \\ j = J \end{pmatrix} \tag{4.8.36}$$

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(-1)} = \overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}{}^{*} \cdot \underset{\circ}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}$$

$$= \sum_{i,j} \underset{\circ}{t}_{(ij)} \lambda_i \lambda_j \mathbf{N}_I \mathbf{N}_J \qquad \begin{pmatrix} i = I \\ j = J \end{pmatrix} \tag{4.8.37}$$

为了要求 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(1/2)}$，我们希望把变形功率 w 写成以下的形式：

$$w = \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(1/2)} : \dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}}{}^{(1/2)} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(1/2)} : \dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}} \tag{4.8.38}$$

由(2.9.33)式对时间 t 求导，得

$$\dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}}{}^{(1)} = \dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2}(\dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} + \overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} \cdot \dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}})$$

将上式代入变形功率 w 的(4.8.18)式，并注意 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}$ 与 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}$ 的对称性，得到

$$w = \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(1)} : \dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}}{}^{(1)} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} : \dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}}$$

$$= \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} : \frac{1}{2}(\dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} + \overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} \cdot \dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}}) = \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} : (\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} \cdot \dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}})$$

$$= \mathrm{tr}\,(\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} \cdot \dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}}) = (\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{U}})^{*} : \dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}}$$

$$= (\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}) : \dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}}$$

因此

$$w = \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{B} : \dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}} \tag{4.8.39}$$

式中 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^B$ 称为修正 Biot 应力①：

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^B = \overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} \tag{4.8.40a}$$

将(3.3.19) $\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}$ 与(4.8.36) $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}$ 式代入，得到 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^B$ 的分解式：

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^B = \sum_{i,j} \underset{0}{t}_{(ij)} \underset{i}{\lambda}{}^{-1} \underset{I}{\mathbf{N}}\underset{J}{\mathbf{N}} \qquad \begin{pmatrix} i = I \\ j = J \end{pmatrix} \tag{4.8.40b}$$

比较(4.8.35) $\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}$ 与(4.8.40b) $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^B$ 式，可见它们具有相同的分量。将(4.5.15)式改写成

$$\sigma_n \overset{\rangle}{\mathbf{t}}_n = \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\langle}{\mathbf{N}} = \overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\langle}{\mathbf{N}} = \overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^B \cdot \overset{\langle}{\mathbf{N}} \tag{4.8.41}$$

就可以看出 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^B$ 的物理意义，它与构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中面元法向单位矢量 $(\cdot\overset{\langle}{\mathbf{N}})$ 同时从 Lagrange 标架旋转到 Euler 标架 $(\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}\cdot)$ 以后就得到在 $\mathscr{R}(t)$ 构形中作用于相应面元(面积为 σ_n)上的力。但是 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^B$ 不是对称张量，所以还必须加以对称化，把(4.8.39)式写成

$$w = \frac{1}{2}\left(\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^B + \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^{B*}\right) : \dot{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}} \tag{4.8.39'}$$

将上式与(4.8.38)式比较，可知(利用(4.8.40b)式)

$$\begin{aligned} \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^{(1/2)} &= \frac{1}{2}\left(\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^B + \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^{B*}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} + \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \underset{0}{t}_{(ij)} \left(\underset{i}{\lambda}{}^{-1} + \underset{j}{\lambda}{}^{-1}\right) \underset{I}{\mathbf{N}}\underset{J}{\mathbf{N}} \qquad \begin{pmatrix} i = I \\ j = J \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.8.42}$$

$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^{(1/2)}$ 与 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}{}^{(1/2)}$ 功共轭，它称为 Jaumann 应力张量。

在推导当 n 为任意值时，与 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}{}^{(n)}$ 为功共轭的应力度量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^{(n)}$ 的分解式以前，先来推导与 Hill 的应变度量 $\overset{\langle\langle}{\mathscr{E}}$ (见(2.9.28)式) 为

① Biot 应力相当于此处的 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^B \cdot \overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}{}^*$。

功共轭的应力度量 $\overset{\ll}{\boldsymbol{\tau}}$ 的公式，也就是求 $\overset{\ll}{\boldsymbol{\tau}}$，使得

$$w = \underset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}:\overset{\gg}{\mathbf{d}} = \overset{\ll}{\boldsymbol{\tau}}:\dot{\overset{\ll}{\mathscr{E}}} \tag{4.8.43}$$

$\dot{\overset{\ll}{\mathscr{E}}}$ 在 Lagrange 标架中的分解式已见(3.4.47)与(3.4.53)。设 $\overset{\ll}{\boldsymbol{\tau}}$ 的分解式为

$$\overset{\ll}{\boldsymbol{\tau}} = \sum_{I,J} \tau_{(IJ)} \underset{I}{\mathbf{N}}\underset{J}{\mathbf{N}} \tag{4.8.44}$$

将(3.4.36) $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 与(4.8.34) $\underset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}$ 代入(4.8.43)式中，同时将 (3.4.44a) $\dot{\overset{\ll}{\mathscr{E}}}$ 与(4.8.44) $\overset{\gg}{\boldsymbol{\tau}}$ 代入(4.8.43)式右端，得到

$$\sum_{i,j} \underset{\circ}{t}_{(ij)} d_{(ij)} = \sum_{I,J} \tau_{(IJ)} (\dot{\overset{\ll}{\mathscr{E}}})_{(IJ)} \tag{4.8.45}$$

将(3.4.49) $(\dot{\overset{\ll}{\mathscr{E}}})_{(IJ)}$ 代入，比较对应项 $d_{(ij)}$ 的系数，得到

$$\tau_{(IJ)} = \frac{1}{\varphi(i,j)} \frac{\underset{i}{\lambda} + \underset{j}{\lambda}}{2\underset{i}{\lambda}\underset{j}{\lambda}} \underset{\circ}{t}_{(ij)}$$

$$(i = I,\ j = J \text{ 不对指标取和}) \tag{4.8.46}$$

显然(4.8.46)式中右端的系数恰与(3.4.49)式中右端的系数互为倒数。式中 $\varphi(i,j)$ 见(3.4.50)式。对于 Seth 应变度量类，功共轭的应力度量 $\overset{\ll}{\mathbf{T}}^{(n)}$ 在 Lagrange 标架中的分解式则为

$$\overset{\ll}{\mathbf{T}}^{(n)} = \sum_{I,J} (\overset{\ll}{\mathbf{T}}^{(n)})_{(IJ)} \underset{I}{\mathbf{N}}\underset{J}{\mathbf{N}}$$

$$(\overset{\ll}{\mathbf{T}}^{(n)})_{(IJ)} = \frac{1}{\varphi(i,j)} \frac{\underset{i}{\lambda} + \underset{j}{\lambda}}{2\underset{i}{\lambda}\underset{j}{\lambda}} \underset{\circ}{t}_{(ij)} \tag{4.8.47}$$

式中 $\varphi(i,j)$ 见(3.4.53)式。

当 $n=0$ 时，将(3.4.56)式的 $\varphi(i,j)$ 代入(4.8.47)得到与对数应变张量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}^{(0)}$ 功共轭的应力度量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(0)}$:

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(0)}=\sum_{I,J}(\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(0)})_{(IJ)}\underset{I}{\mathbf{N}}\underset{J}{\mathbf{N}} \tag{4.8.48}$$

式中

$$(\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(0)})_{(II)}=\underset{\circ}{t}_{(ii)} \qquad (i=I,\ \text{不对指标取和}) \tag{4.8.49a}$$

$$(\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(0)})_{(IJ)}=\frac{\lambda_j^2-\lambda_i^2}{2\lambda_i\lambda_j}\,\frac{1}{\ln\lambda_j-\ln\lambda_i}\,\underset{\circ}{t}_{(ij)} \tag{4.8.49b}$$

$$(i=I,j=J,i\neq j,\ \text{不对指标取和})$$

将(4.8.49b)式在 $\lambda_j/\lambda_i=1$ 附近展开，可得

$$(\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(0)})_{(IJ)}=\underset{\circ}{t}_{(ij)}\left[1+\frac{1}{6}(\ln\lambda_j-\ln\lambda_i)^2+\cdots\right]$$

$$=\underset{\circ}{t}_{(ij)}\left[1+\frac{1}{6}(E^{(0)}_{(JJ)}-E^{(0)}_{(II)})^2+\cdots\right] \tag{4.8.50}$$

$$(i=I,\ j=J,\ i\neq j,\ \text{不对指标取和})$$

由(4.8.49a)与(4.8.49b)或(4.8.50)式可以看出：当 Kirchhoff 应力张量 $\underset{\circ}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}}$ 的主方向沿 Euler 标架时，$\underset{\circ}{t}_{(ij)}=0$ 当 $i\neq j$，因此 $(\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(0)})_{(IJ)}=0$ 当 $I\neq J$，且由(4.8.49a)可得

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(0)}=\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}^{*}\cdot\underset{\circ}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}} \tag{4.8.51}$$

此时右端称为 Lagrange 标架 Kirchhoff 应力，它表示把 Kirchhoff 应力 $\underset{\circ}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}}$ 从 Euler 标架旋转到 Lagrange 标架的结果：

$$\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}^{*}\cdot\underset{\circ}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}=\sum_{i,j}\underset{\circ}{t}_{(ij)}\underset{I}{\mathbf{N}}\underset{J}{\mathbf{N}} \tag{4.8.52}$$

但是若 Kirchhoff 应力 $\underset{\circ}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}}$ 的主方向不是沿 Euler 标架时，则(4.8.51)式只是近似成立，由(4.8.50)式可以看出(4.8.51)式两端之差属于对数应变(或 Green 应变)分量的二次项。因此，通常有时就把 Lagrange 标架 Kirchhoff 应力 $\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}^{*}\cdot\underset{\circ}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}$ 近似当作与对数应变张量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{E}}^{(0)}$ 相共轭的应力。

§4.9 熵 不 等 式

一、熵不等式，熵平衡方程

以 η 表示物体每单位质量的熵(或称熵的质量密度)，θ 表示温度(绝对温度)，并且

$$\theta>0 \tag{4.9.1}$$

物体任意部分 $\mathscr{V}'$ 的总熵为

$$H=\int_{\mathscr{V}'}\eta\rho dv \tag{4.9.2}$$

热力学告诉我们

$$\dot{H}\geqslant-\int_{\mathscr{A}'}\frac{1}{\theta}\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}da+\int_{\mathscr{V}'}\frac{1}{\theta}\sigma\rho dv \tag{4.9.3}$$

式中 $\mathbf{h}/\theta$ 称为熵流，σ/θ 称为熵源。(4.9.3) 式称为熵不等式，或 Clasius-Duhem 不等式，也就是积分形式的热力学第二定律。(4.9.3)式中对于不可逆过程取“>”号，而对可逆过程则取“=”号。

定义物体的 $\mathscr{V}'$ 部分的熵生成率 Γ 为(4.9.3)式两端之差，即

$$\dot{H}=-\int_{\mathscr{A}'}\frac{1}{\theta}\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}da+\int_{\mathscr{V}'}\frac{1}{\theta}\sigma\rho dv+\Gamma \tag{4.9.4}$$

令 γ 为每单位质量的熵生成率，则

$$\Gamma=\int_{\mathscr{V}'}\gamma\rho dv \tag{4.9.5}$$

(4.9.4)式称为积分形式的熵平衡方程。将(4.9.4)式与一般积分形式的平衡方程(4.1.2)对比，可见对于熵的平衡，(4.1.2)式中各个量取

$$\varphi=\eta,\ \mathbf{q}=\frac{1}{\theta}\ \mathbf{h},\ s=\frac{1}{\theta}\sigma+\gamma \tag{4.9.6}$$

将(4.9.6)式代入一般微分形式的平衡方程(4.1.3)，得到微分形式的熵平衡方程，或称熵的场方程：

$$\rho\dot{\eta}+\left(\frac{1}{\theta}\ \mathbf{h}\right)\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}-\rho\left(\frac{1}{\theta}\ \sigma+\gamma\right)=0$$

即

$$\dot{\eta}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\theta}\ \mathbf{h}\right)\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}+\frac{\sigma}{\theta}+\gamma \tag{4.9.7}$$

(4.9.7)式乘以 θ 以后，可以改写成以下的形式：

$$\begin{aligned}\theta\dot{\eta}&=-\frac{\theta}{\rho}\left(\frac{1}{\theta}\ \mathbf{h}\right)\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}+\sigma+\theta\gamma\\&=-\frac{\theta}{\rho}\left[\frac{1}{\theta}\left(\mathbf{h}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}\right)+\left(\frac{1}{\theta}\ \overset{\rightarrow}{\nabla}\right)\cdot\mathbf{h}\ \right]+\sigma+\theta\gamma\end{aligned}$$

即

$$\theta\dot{\eta}=-\frac{1}{\rho}\left(\mathbf{h}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}\right)+\frac{1}{\rho\theta}\left(\theta\overset{\rightarrow}{\nabla}\right)\cdot\mathbf{h}+\sigma+\theta\gamma \tag{4.9.7$'$}$$

(4.9.7) 或 (4.9.7)′ 式也可称为微分形式的热力学第二定律。由(4.9.3)与(4.9.5)式，熵生成恒为正：

$$\Gamma\geqslant 0,\ \gamma\geqslant 0 \tag{4.9.8}$$

我们也可以由热力学第一定律 (4.8.14) 式与热力学第二定律 (4.9.7) 式消去热源 σ。把(4.8.14)式除以 ρ 后与 (4.9.7)′ 式相减，得到

$$\dot{e}-\theta\dot{\eta}=\frac{1}{\rho}\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}:\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}}-\frac{1}{\rho\theta}\left(\theta\overset{\rightarrow}{\nabla}\right)\cdot\mathbf{h}-\theta\gamma$$

即

$$\theta\gamma = \theta\dot{\eta} - \dot{e} + \frac{1}{\rho}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}}:\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{d}} - \frac{1}{\rho\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\overleftarrow{\nabla}) \tag{4.9.9}$$

将每单位质量的熵生成率 γ 分为 γ_{int} 与 γ_{th} 两部分

$$\gamma = \gamma_{int} + \gamma_{th} \tag{4.9.10}$$

这两部分的定义式为

$$\begin{aligned} \theta\gamma_{int} &= \theta\dot{\eta} - \dot{e} + \frac{1}{\rho}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}}:\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{d}} \\ \theta\gamma_{th} &= -\frac{1}{\rho\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\overleftarrow{\nabla}) \end{aligned} \tag{4.9.11}$$

γ_{int} 与 γ_{th} 可称为熵生成率（每单位质量）的内禀部分与热的部分。

我们也可以不用内能 e，而改用自由能 ψ（每单位质量），它的定义是

$$\psi = e - \theta\eta \tag{4.9.12}$$

因此

$$\dot{\psi} + \eta\dot{\theta} = \dot{e} - \theta\dot{\eta}$$

(4.9.11)式可写作

$$\begin{aligned} \theta\gamma_{int} &= -\dot{\psi} - \eta\dot{\theta} + \frac{1}{\rho}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}}:\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{d}} \\ \theta\gamma_{th} &= -\frac{1}{\rho\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\overleftarrow{\nabla}) \end{aligned} \tag{4.9.13}$$

在后面第八章中(见(8.1.11)式)，将证明对于热弹性材料

$$\begin{aligned} \gamma_{int} &= 0 \\ \theta\gamma = \theta\gamma_{th} &= -\frac{1}{\rho\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\overleftarrow{\nabla}) \end{aligned} \tag{4.9.14}$$

此时(4.9.7)'式简化为①

---

① 见后(8.1.13)式

$$\theta\dot{\eta} = -\frac{1}{\rho}(\mathbf{h}\cdot\nabla) + \sigma$$

二、熵平衡方程在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的表示

将(4.9.6)式的各个量 φ，$\mathbf{q}$ 与 s 代入(4.1.10)式，得到熵平衡方程在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中表示的积分形式：

$$\dot{H} = -\int_{\mathscr{A}'} \frac{1}{\theta}\mathbf{h}\cdot\mathscr{J}\overset{-1}{\overset{\times}{\mathbf{D}}}{}^*\cdot d\overset{\langle}{\mathbf{A}} + \int_{\mathscr{V}'}\left(\frac{1}{\theta}\sigma+\gamma\right)\rho_0 dV \qquad (4.9.15)$$

式中由(4.9.2)式，

$$H = \int_{\mathscr{V}'} \eta\rho_0 dV \qquad (4.9.16)$$

$\mathscr{V}'$ 为在 $\mathscr{R}(t_0)$ 构形中对应于 v' 的固定域，$\mathscr{A}'$ 表示 $\mathscr{V}'$ 的表面。利用(4.8.23)式，则熵平衡方程积分形式(4.9.15)（积分形式的热力学第二定律)可写作

$$\dot{H} = -\int_{\mathscr{A}'} \frac{1}{\theta}\overset{\langle}{\mathbf{H}}\cdot d\overset{\langle}{\mathbf{A}} + \int_{\mathscr{V}'}\left(\frac{1}{\theta}\sigma+\gamma\right)\rho_0 dV \qquad (4.9.15)'$$

相应地，由(4.1.11)式得到熵平衡方程在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中表示的微分形式：

$$\rho_0\dot{\eta} + \left(\mathscr{J}\frac{1}{\theta}\mathbf{h}\cdot\overset{-1}{\overset{\times}{\mathbf{D}}}{}^*\right)\cdot\overset{\langle}{\square} - \rho_0\left(\frac{1}{\theta}\sigma+\gamma\right) = 0$$

利用在 $\mathscr{R}(t_0)$ 构形中热流矢量 $\overset{\langle}{\mathbf{H}}$的定义(4.8.23)式，上式可写作

$$\rho_0\dot{\eta} + \left(\frac{1}{\theta}\overset{\langle}{\mathbf{H}}\right)\cdot\overset{\langle}{\nabla} - \rho_0\left(\frac{1}{\theta}\sigma+\gamma\right) = 0$$

即

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{1}{\theta}\overleftarrow{\mathbf{H}}\right)\cdot\overleftarrow{\nabla} + \frac{\sigma}{\theta} + \gamma \tag{4.9.17}$$

仿照前面(4.9.7)′式的推导，将(4.9.17)式乘以 θ 后，经化简可得

$$\theta\dot{\eta} = -\frac{1}{\rho_0}(\overleftarrow{\mathbf{H}}\cdot\overleftarrow{\nabla}) + \frac{1}{\rho_0\theta}(\theta\overleftarrow{\nabla})\cdot\overleftarrow{\mathbf{H}} + \sigma + \theta\gamma \quad (4.9.17)'$$

(4.9.17)或(4.9.17)′式也可称为在构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中表示的微分形式的热力学第二定律。仿照前面(4.9.9)至 (4.9.13) 式的推导，将(4.8.25)式除以 ρ_0 后与(4.9.17)′式相减以消去热源 σ，得到

$$\theta\gamma = \theta\gamma_{\text{int}} + \theta\gamma_{\text{th}} \tag{4.9.18}$$

式中

$$\begin{aligned}\theta\gamma_{\text{int}} &= \theta\dot{\eta} - \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\rho_0}w \\ &= -\dot{\psi} - \eta\dot{\theta} + \frac{1}{\rho_0}w\end{aligned} \tag{4.9.19}$$

$$\theta\gamma_{\text{th}} = -\frac{1}{\rho_0\theta}\overleftarrow{\mathbf{H}}\cdot(\theta\overleftarrow{\nabla}) \tag{4.9.20}$$

习题 4.5 利用(4.8.23)式及关系式：

$$\theta\overrightarrow{\nabla} = (\theta\overleftarrow{\nabla})\cdot\overset{-1}{\overset{\circ}{\mathbf{D}}}$$

证明

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{h}\cdot(\theta\overrightarrow{\nabla}) = \frac{1}{\rho_0}\overleftarrow{\mathbf{H}}\cdot(\theta\overleftarrow{\nabla})$$

[提示]

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\mathbf{h}\cdot(\theta\overrightarrow{\nabla}) &= \frac{1}{\rho}\mathbf{h}\cdot[(\theta\overleftarrow{\nabla})\cdot\overset{-1}{\overset{\circ}{\mathbf{D}}}] = \frac{1}{\rho_0}\mathscr{J}\mathbf{h}\cdot\overset{-1}{\overset{\times}{\mathbf{D}}}{}^{*}\cdot(\theta\overleftarrow{\nabla}) \\ &= \frac{1}{\rho_0}\mathbf{H}\cdot(\theta\overleftarrow{\nabla})\end{aligned}$$

第五章 本构理论

§5.1 引 言

Cauchy 运动律(4.3.3)与(4.3.9)式(非极性材料)，一般说来，不能完全确定物体中的应力与物体的运动。还必须知道材料的力学行为，即物体的应力与运动之间的关系。这个关系称为本构关系，或本构方程。

怎样来确定适合于材料的本构方程呢？例如，某一类型的实际材料具有某些共同的特性。我们可以把这些特性用精确的数学形式表达，但是必须满足一些物理原理。本章的目的就是讨论这些原理。但是还有一些函数，因材料而异，可称为材料函数，它们需要由试验确定。

举一个熟悉的例子。有一大类的材料，例如大多数金属、木材、玻璃等，它们接近于刚性。它们的本构关系在一定的范围内早已经知道了，并已沿用了一百多年，并不需要这样一些原理来建立它们的本构关系。它们的本构关系很简单，就是应力与小应变的线性关系，其中包含一些材料常数。每种材料的弹性常数由试验定出。这就是所谓线弹性理论。

关于材料的物质结构知识与本构方程的关系，Leigh① 认为：应用固体物理的知识有可能定性地导出某些非线性材料的性质，这对于确定某些非线性材料的本构方程，可能是一个有用的方法；应用粒子物理学有可能计算出材料常数。但是迄今为止的经验证明，对于大多数非线性材料而言，要得到准确的结果，目前是办不

① Leigh, Nonlinear Continuum Mechanics, 1968。

到的。因此，Leigh 认为从工程技术的观点来看，材料的粒子物理的作用在于设计与创造具有新的定性与定量特性的材料。

对于具有非线性性质的材料，如何来得到它们的合适的本构方程呢？早年的办法是在线性方程（例如线弹性固体与线性粘性流体）的基础上增加非线性项，并用试验来确定新的材料常数。但是，增加非线性项的做法有无穷多种，这样做势必有随意性。因此人们就注意到，有一些基本的原理必须遵循。最基本的是两个"不变性原理"。后来，人们就不是对线性材料作一些补充，而是直接去定义更为广泛的非线性材料。这样做，物理上更为直接，数学上亦不增加困难。

第一个不变性原理，称为**坐标不变性原理**，即任何一个物理过程应与我们所选用来描述它的坐标系无关。

如果在方程中直接用标量、矢量与张量的记法(即抽象记法，无需假定坐标系)来描述物理量，则坐标不变性自然满足。当然，也可以只用某一个基本坐标系中的分量来表示，在其他坐标系中的表示形式可由张量分量的坐标转换关系得到。

另一个不变性原理为**标架无差异原理**(简称 PMI)，或称**客观性原理**①。

在讨论这个原理以前，我们先讨论标架与标架转换的概念。

§ 5.2 标架、标架转换、标量、矢量与张量的客观性

一、标架、标架转换

标架一词往往用于表示坐标系。但是在连续介质力学的标架无差异原理（PMI）中的所谓标架，则是指带有时钟的参考架——"时-空系"。

---

① 其他名称为材料无差异原理，材料客观性原理。

在一个标架 F 中观察一个事件的结果是 $\{\mathbf{p}, t\}$，其中 $\mathbf{p}$ 为事件发生的位置，t 为事件发生的时刻。在另一个标架 $\tilde{F}$ 中观察同一个事件，结果则是 $\{\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{t}\}$。假定测量的单位相同，即时钟的快慢一样，不同的时钟只是计时的起点不同，故

$$\tilde{t} = t + a \tag{5.2.1}$$

式中 a 为一常数。

因为采用抽象记法，坐标不变性已经满足，所以为了清楚起见，我们采用笛卡儿坐标系作为参考坐标架。

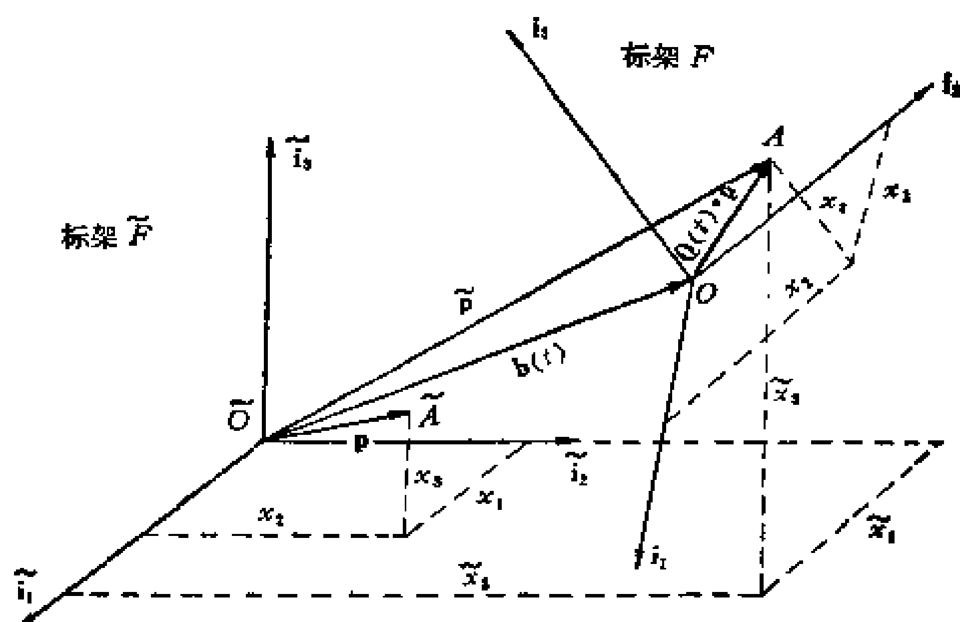


图 5.1

图 5.1 表示两个不同的标架 F 与 $\tilde{F}$。标架 F 的坐标原点为 O，笛卡儿坐标系基矢量为 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$，而标架 $\tilde{F}$ 的坐标原点为 $\tilde{O}$，笛卡儿坐标系基矢量为 $\tilde{\mathbf{i}}_1, \tilde{\mathbf{i}}_2, \tilde{\mathbf{i}}_3$。连接原点的矢量为 $\overrightarrow{\tilde{O}O} = \mathbf{b}(t)$。基矢量之间满足以下关系：

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) \cdot \tilde{\mathbf{i}}_1 &= \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{Q}(t) \cdot \tilde{\mathbf{i}}_2 &= \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{Q}(t) \cdot \tilde{\mathbf{i}}_3 &= \mathbf{i}_3 \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

从标架 F 与 $\tilde{F}$ 观察同一个事件，除了观察到的时间 t 与 $\tilde{t}$ 有

(5.2.1) 式的关系以外，从标架 F 观察到的事件发生地点 A 的位置为 x_k，而从标架 $\tilde{F}$ 观察 A 点的位置为 $\tilde{x}_k$。用 $\mathbf{p}$ 和 $\tilde{\mathbf{p}}$ 分别表示 $\tilde{F}$ 标架中的观察者根据从 F 和 $\tilde{F}$ 标架观察同一点位置而构造的矢径，即 $\mathbf{p}=x_k\tilde{\mathbf{i}}_k$，$\tilde{\mathbf{p}}=\tilde{x}_k\tilde{\mathbf{i}}_k$。

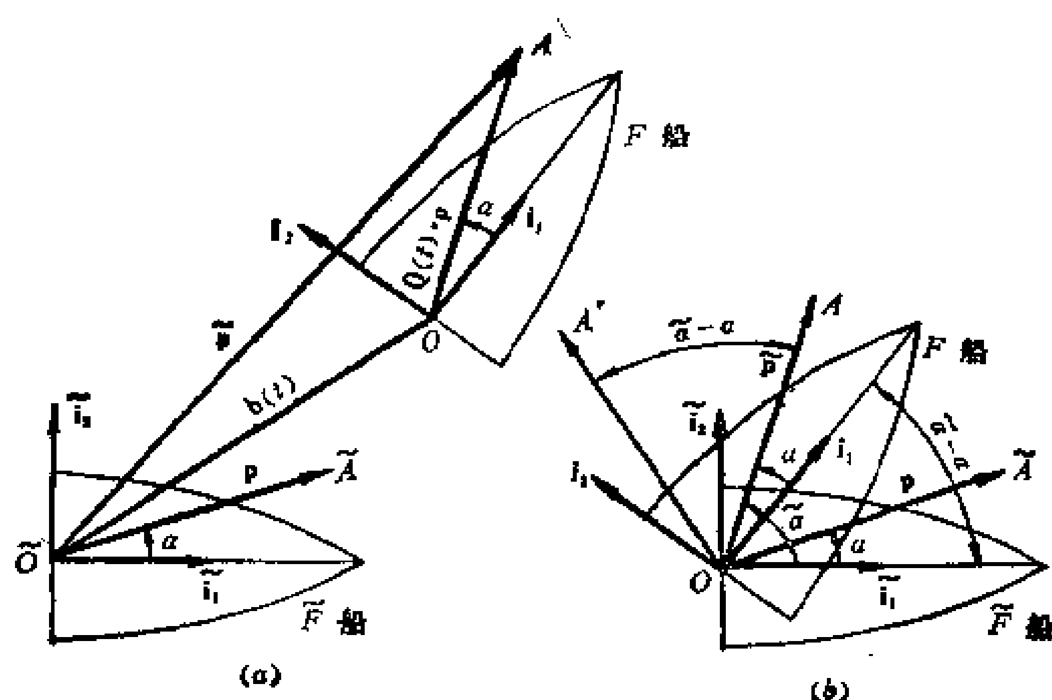


图 5.2

从图 5.1，由简单几何关系

$$\overrightarrow{\tilde{O}A}=\overrightarrow{\tilde{O}O}+\overrightarrow{OA}$$

也许有人认为

$$\tilde{\mathbf{p}}=\mathbf{b}(t)+\mathbf{p}$$

其实不然。我们以图 5.2(a) 所示海面上的两条船为例。F 船相对于 $\tilde{F}$ 船有一个以 $\mathbf{b}(t)$ 表示的平移运动和一个以 $\mathbf{Q}(t)$ 表示的转动。为了更清楚地说明问题，我们不妨先假定两船只有相对的

转动而无相对的平移运动($\mathbf{b}(t)=0$)，如图 5.2(b) 所示。由于两个船的相对转动，它们对同一事件 A (即矢径 $\overrightarrow{OA}$) 所观察到的结果是不相同的。$\tilde{F}$ 船所观察到的 A 的方位为船的前方左舷 $\tilde{\alpha}$ 角，而 F 船所观察到的 A 的方位则为船的前方左舷 α 角；这个观察结果的差异 $\tilde{\alpha}-\alpha$ 正是 F 船相对于 $\tilde{F}$ 船的逆时针转动角。现在假想事件 A (即矢径 $\overrightarrow{OA}$)也随着 F 船一起逆时针转动到 A'(即矢径 $\overrightarrow{OA'}$)，那么 $\tilde{F}$船根据 F 船对 A' 的观察结果构造的矢径(以 $\mathbf{p}_{A'}$ 表示)应该与 $\tilde{F}$ 船对 A 的观察结果(以 $\tilde{\mathbf{p}}_A$ 表示)相同：

$$\mathbf{p}_{A'}=\tilde{\mathbf{p}}_A$$

但是事实上，A 事件并没有做上述的逆时针转动；因此对于 F 船上的观察者说来，由于他感觉不到自己随 F 船的逆时针转动(以$\mathbf{Q}(t)$表示)，反而觉得事件是从 A' 顺时针转动(以 $\mathbf{Q}(t)^*$ 表示)到 A。因此若以 $\mathbf{p}_A$ 表示 $\tilde{F}$ 船根据 F 船对 A 点观测的信息而构造的矢径，显然有：

$$\mathbf{p}_A=\mathbf{Q}(t)^*\cdot\mathbf{p}_{A'}$$

综合以上两式，得到从图 5.2(b) 的 F 船和从 $\tilde{F}$ 船观察同一事件 A 的结果 $\mathbf{p}_A$ 和 $\tilde{\mathbf{p}}_A$ 之间的关系：

$$\mathbf{p}_A=\mathbf{Q}(t)^*\cdot\tilde{\mathbf{p}}_A$$

因此，省去表示同一事件的下标 A，得到

$$\tilde{\mathbf{p}}=\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{p}$$

由此可见，$\mathbf{p}$ 实际上表示 $\tilde{F}$ 船上的观察者根据 F 船对事件 A 观测的信息(前方左舷 α 角)所构造出来的矢量 $\overrightarrow{O\tilde{A}}$①。当两船不但有相对转动而且有相对移动，如图 5.2(a) 与图 5.1，则上式应改为

$$\tilde{\mathbf{p}}=\mathbf{b}(t)+\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{p} \tag{5.2.3}$$

---

① 以后当说从 F 标架观察一矢量为 $\mathbf{u}$ 时，此 $\mathbf{u}$ 总是指 $\tilde{F}$ 标架中的观察者根据 F 标架观测的信息(分量 u_k) 构造(配上 $\tilde{F}$ 标架的基矢量 $\tilde{\mathbf{i}}_k$) 出来的矢量。

此式说明,图 5.2(a) 与图 5.1 中的矢量 $\overrightarrow{OA}$ 应该等于

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{p}$$

式中

$$\mathbf{p} = \overrightarrow{\tilde{O}\tilde{A}}$$

(5.2.3) 式表示在标架 $\tilde{F}$ 中与 F 中两个观察者观察到的同一个位置的矢径 $\tilde{\mathbf{p}}$ 与 $\mathbf{p}$ 的转换关系。$\mathbf{b}(t)$ 表示 F 标架相对于 $\tilde{F}$ 标架的平移，而 $\mathbf{Q}(t)$ 为一正交变换，表示 F 标架相对于 $\tilde{F}$ 标架的转动(或转动加反射)。按图 5.1, (5.2.3) 式各项的表示如下:

$$\begin{aligned} &\mathbf{p} = x_1\tilde{\mathbf{i}}_1 + x_2\tilde{\mathbf{i}}_2 + x_3\tilde{\mathbf{i}}_3 \\ &\mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{p} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3 \\ &\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{x}_1\tilde{\mathbf{i}}_1 + \tilde{x}_2\tilde{\mathbf{i}}_2 + \tilde{x}_3\tilde{\mathbf{i}}_3 = \mathbf{b}(t) + x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3 \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

对同一个物理现象，或物理量，不同的观察者在 $\tilde{F}$ 或 F 中观察得的结果之间是有一定的关系的。 例如两个事件的时间间隔，由 (5.2.1) 式，

$$\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = t_2 - t_1$$

对于两个不同的标架来说，观察到的值是相等的。又例如同一个事件的地点，对两个不同的标架说来，观察到的矢径 $\tilde{\mathbf{p}}$ 与 $\mathbf{p}$ 满足 (5.2.3) 式的标架转换关系。

按照各种物理量所满足的标架转换关系，来区分物理量是客观的，还是非客观的。

二、物理量的客观性——客观量

1. 标量的客观性

若对于某标量，两不同标架 $\tilde{F}$ 与 F 中的观察者观察的结果 $\tilde{f}$ 与 f 恒相同，即

$$\tilde{f} = f \tag{5.2.5}$$

则称此标量为客观标量(简称客观量)。

例 1 两事件的时间间隔是客观标量。

例 2 图 5.1 的矢径长度不是客观标量，因为

$$|\tilde{\mathbf{p}}| \neq |\mathbf{p}|$$

例 3 发生在同一时刻的两事件的空间距离为客观标量。

证 把 (5.2.3) 式用于发生在同一时刻 t 的两事件，得到

$$\tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{b}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{p}_2$$
$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{b}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{p}_1$$

两式相减，得到

$$\tilde{\mathbf{p}}_2 - \tilde{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{Q}(t) \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \tag{5.2.6}$$

因此

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathbf{p}}_2 - \tilde{\mathbf{p}}_1)^2 &= \mathbf{Q}(t) \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \cdot [\mathbf{Q}(t) \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)] \\ &= (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)^2\end{aligned}$$

故

$$|\tilde{\mathbf{p}}_2 - \tilde{\mathbf{p}}_1| = |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|$$

满足标架转换关系 (5.2.5) 式，所以发生在同一时间 t 的两事件的空间距离为客观标量。

例 4 体积、质量、质量密度(每单位体积的质量)，温度等都是客观标量。

2. 矢量的客观性

(5.2.6) 式表示连接同一时刻发生的两事件地点的矢量 $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ 的标架转换关系。凡任一个矢量 $\mathbf{u}$，在不同的标架 $\tilde{F}$ 与 F 中观察到的结果，满足类似于 (5.2.6) 式的关系，即

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{u} \tag{5.2.7}$$

则称此矢量 $\mathbf{u}$ 为客观矢量(简称客观量)。

(5.2.7) 式称为客观矢量的标架转换关系。

易证如 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 为客观矢量，则 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 为客观标量，因为

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = (\mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

例 1 连接在同一时刻 t 的两事件地点的矢径 $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ 为客

观矢量(见 (5.2.6) 式)

例 2 质点的速度 $\dot{\mathbf{p}}$ 不是客观量。

将 (5.2.3) 式对时间 t 求导,得

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = \dot{\mathbf{b}}(t) + \mathbf{Q}(t)\cdot\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}(t)\cdot\mathbf{p} \tag{5.2.8}$$

$$\neq \mathbf{Q}(t)\cdot\dot{\mathbf{p}} \quad (\text{除非 } \dot{\mathbf{b}}(t) = 0,\ \dot{\mathbf{Q}}(t) = 0)$$

因此不满足客观矢量的标架转换关系 (5.2.7) 式。所以质点的速度 $\dot{\mathbf{p}}$ 不是客观矢量。

我们来讨论 (5.2.8) 式各项的几何意义。假定以标架 $\tilde{F}$ 为"绝对"标架,则 $\dot{\tilde{\mathbf{p}}}$ 为绝对速度。由 (5.2.4) 式中第三式,

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = \dot{\tilde{x}}_1\tilde{\mathbf{i}}_1 + \dot{\tilde{x}}_2\tilde{\mathbf{i}}_2 + \dot{\tilde{x}}_3\tilde{\mathbf{i}}_3$$

这里对笛卡儿坐标中的分量我们也允许用加一点"·"的记号表示对时间 t 的物质导数①。又由 (5.2.4) 第一式

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{x}_1\tilde{\mathbf{i}}_1 + \dot{x}_2\tilde{\mathbf{i}}_2 + \dot{x}_3\tilde{\mathbf{i}}_3$$

再利用 (5.2.2) 式,可得

$$\mathbf{Q}(t)\cdot\dot{\mathbf{p}} = \dot{x}_1\mathbf{i}_1 + \dot{x}_2\mathbf{i}_2 + \dot{x}_3\mathbf{i}_3$$

它表示"相对"速度(即质点相对于标架 F 之速度)。由 (5.2.3) 式,解出

$$\mathbf{p} = \mathbf{Q}(t)^*\cdot(\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{b}(t))$$

代入 (5.2.8) 式中,得

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = \mathbf{Q}(t)\cdot\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{b}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^Q(t)\cdot(\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{b}(t)) \tag{5.2.9}$$

式中

$$\boldsymbol{\Omega}^Q(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\cdot\mathbf{Q}(t)^* \tag{5.2.10a}$$

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \boldsymbol{\Omega}^Q(t)\cdot\mathbf{Q}(t) \tag{5.2.10b}$$

仿照 (3.3.31) 式的证明过程,易证 $\boldsymbol{\Omega}^Q(t)$ 为一反对称张量,即

$$\boldsymbol{\Omega}^Q(t) = -\boldsymbol{\Omega}^Q(t)^* \tag{5.2.11}$$

---

① 一般情况下,记号"·"不允许用于矢量或张量的分量,以免引起错误。

因此 (5.2.9) 式的右端第三项表示旋转速度：

$$\boldsymbol{\Omega}^{Q}(t)\cdot(\tilde{\mathbf{p}}-\mathbf{b}(t))=\boldsymbol{\omega}^{Q}(t)\times(\tilde{\mathbf{p}}-\mathbf{b}(t))$$

式中角速度 $\boldsymbol{\omega}^{Q}(t)$ 为 $\boldsymbol{\Omega}^{Q}(t)$ 之反偶：

$$\boldsymbol{\omega}^{Q}(t)=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{\Omega}^{Q}(t)$$

(5.2.9) 式可写作

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}}=\mathbf{Q}(t)\cdot\dot{\mathbf{p}}+\dot{\mathbf{b}}(t)+\boldsymbol{\omega}^{Q}(t)\times(\tilde{\mathbf{p}}-\mathbf{b}(t))\qquad(5.2.9)'$$

此式表示理论力学中相对运动的速度合成定理，右端第一项表示相对速度，第二与第三项表示牵连速度。

例 3 质点加速度 $\ddot{p}$ 不是客观量

将 (5.2.9) 式对时间 t 求导，得(略去自变量 t 不写，下同)

$$\ddot{\tilde{\mathbf{p}}}=\mathbf{Q}\cdot\ddot{\mathbf{p}}+\dot{\mathbf{Q}}\cdot\dot{\mathbf{p}}+\ddot{\mathbf{b}}+\boldsymbol{\Omega}^{Q}\cdot(\dot{\tilde{\mathbf{p}}}-\dot{\mathbf{b}})$$
$$+\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{Q}\cdot(\tilde{\mathbf{p}}-\mathbf{b})$$

式中右端第二项的 $\dot{\mathbf{p}}$ 用 (5.2.9) 式解出的结果，即

$$\dot{\mathbf{p}}=\mathbf{Q}^{*}\cdot[\dot{\tilde{\mathbf{p}}}-\dot{\mathbf{b}}-\boldsymbol{\Omega}^{Q}\cdot(\tilde{\mathbf{p}}-\mathbf{b})]$$

代入，并利用 (5.2.10a) 式，得到

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{\mathbf{p}}}&=\mathbf{Q}\cdot\ddot{\mathbf{p}}+\ddot{\mathbf{b}}+2\boldsymbol{\Omega}^{Q}\cdot(\dot{\tilde{\mathbf{p}}}-\dot{\mathbf{b}})\\&\quad+(\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{Q}-\boldsymbol{\Omega}^{Q}\cdot\boldsymbol{\Omega}^{Q})\cdot(\tilde{\mathbf{p}}-\mathbf{b})\\&=\mathbf{Q}\cdot\ddot{\mathbf{p}}+\ddot{\mathbf{b}}+2\boldsymbol{\omega}^{Q}\times(\dot{\tilde{\mathbf{p}}}-\dot{\mathbf{b}})+\dot{\boldsymbol{\omega}}^{Q}\times(\tilde{\mathbf{p}}-\mathbf{b})\\&\quad-\boldsymbol{\omega}^{Q}\times[\boldsymbol{\omega}^{Q}\times(\tilde{\mathbf{p}}-\mathbf{b})]\qquad(5.2.12)\\&\neq\mathbf{Q}\cdot\ddot{\mathbf{p}}\quad(\text{除非 }\ddot{\mathbf{b}}=0,\ \dot{\mathbf{Q}}=0)\end{aligned}$$

因此加速度 $\ddot{\mathbf{p}}$ 不是客观矢量。

(5.2.12) 式右端第三项的 $\dot{\tilde{\mathbf{p}}}-\dot{\mathbf{b}}$ 可用由 (5.2.9)′ 解出的结果，即

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}}-\dot{\mathbf{b}}=\mathbf{Q}\cdot\dot{\mathbf{p}}+\boldsymbol{\omega}^{Q}\times(\tilde{\mathbf{p}}-\mathbf{b})$$

代入并化简后得到

$$\ddot{\tilde{\mathbf{p}}} = \mathbf{Q} \cdot \ddot{\mathbf{p}} + \ddot{\mathbf{b}} + \omega^{\Omega} \times [\omega^{\Omega} \times (\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{b})]$$

$$+ \dot{\omega}^{\Omega} \times (\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{b}) + 2\omega^{\Omega} \times (\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{p}}) \qquad (5.2.12)'$$

此式表示理论力学中的加速度合成定理。右端第一项表示相对加速度，第末项表示哥氏加速度，其余诸项表示牵连加速度。

例 4 我们假定力 $\mathbf{f}$ 为客观矢量，即

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{f}$$

3. 张量（二阶）的客观性

设 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 均为客观矢量，即满足 (5.2.7) 式的标架转换关系：

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{u}, \qquad \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{v} \qquad (a)$$

假定在标架 F 中，$\mathbf{u}$ 为 $\mathbf{v}$ 的线性变换，以 $\mathbf{B}$ 表示此线性变换张量（二阶），即

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \qquad (b)$$

而在标架 $\tilde{F}$ 中，$\tilde{\mathbf{u}}$ 为 $\tilde{\mathbf{v}}$ 的线性变换，线性变换张量为 $\tilde{\mathbf{B}}$，即

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \qquad (c)$$

假定 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}$ 为任意一组满足 (a)，(b)，(c) 式的矢量。

实际上，$\mathbf{B}$ 与 $\tilde{\mathbf{B}}$ 是在不同的标架 F 与 $\tilde{F}$ 中实现对应的客观矢量变换的二阶张量。我们要问，$\tilde{\mathbf{B}}$ 与 $\mathbf{B}$ 之间满足什么样的关系？由 (a)，(b)，(c) 式，可得

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{Q}(t) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}(t)^{*} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \qquad (d)$$

将 (d) 式与 (c) 式比较，并考虑到 $\tilde{\mathbf{v}}$ 的任意性，可见

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}(t)^{*} \qquad (5.2.13)$$

附带指出，如果把 (b)，(c) 式改为

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \qquad \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \qquad (e),(f)$$

重复上面的讨论，即

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}(t)^{*} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}(t)^{*}$$
$$= \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}(t)^{*}$$

将上式与 (f) 式比较，同样也得到 (5.2.13) 式的结果。

我们定义凡是符合 (5.2.13) 式的标架转换关系的张量(二阶)称为客观张量(简称客观量)。

客观矢量的标架转换关系 (5.2.7) 式中“$\mathbf{Q}(t)\cdot$”表示对矢量 $\mathbf{u}$ 作正交变换(旋转,或旋转加反射),而客观张量的标架转换关系中“$\mathbf{Q}(t)\cdot$”表示对张量 $\mathbf{B}$ 的前矢量作正交变换,同时“$\cdot\mathbf{Q}(t)^*$”表示对张量 $\mathbf{B}$ 的后矢量作正交变换。我们称所得到的张量 $\tilde{\mathbf{B}}$ 为 $\mathbf{B}$ 的正交变换。

容易证明客观张量具有一系列的性质,例如:

(1) 若 $\mathbf{B}$ 为客观张量,则 $\mathrm{tr}\mathbf{B}$, 行列式 $\det\mathbf{B}$ 均为客观标量;

(2) 若 $\mathbf{B}$ 为客观张量,并定义

$$\tilde{\mathbf{B}}^* = (\tilde{\mathbf{B}})^*,\ \tilde{\mathbf{B}}^{-1} = (\tilde{\mathbf{B}})^{-1},\ \tilde{\mathbf{B}}^2 = (\tilde{\mathbf{B}})^2,\ \tilde{\mathbf{B}}^n = (\tilde{\mathbf{B}})^n$$

(n 为自然数),则 $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{B}^2$, $\mathbf{B}^n$ 亦为客观张量,即

$$\tilde{\mathbf{B}}^* = \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{B}^*\cdot\mathbf{Q}(t)^*,\quad \tilde{\mathbf{B}}^{-1} = \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{Q}(t)^*$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^2 = \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{B}^2\cdot\mathbf{Q}(t)^*,\quad \tilde{\mathbf{B}}^n = \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{B}^n\cdot\mathbf{Q}(t)^*$$

(3) 若 $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ 为客观张量,则 $\mathbf{M}\cdot\mathbf{N}$ 为客观张量,$\mathbf{M}:\mathbf{N}$ 为客观标量,等等。

客观张量最明显的一个例子就是度量张量 $\mathbf{I}$, 因为

$$\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{Q}(t)^*$$

例 1 Cauchy 应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 为客观张量,因为由 (4.2.4) 式

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{t}_n$$

$\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{t}_n$ 都是客观矢量,故 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 必为客观张量,

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{t}}} = \mathbf{Q}(t)\cdot\overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{Q}^*(t) \tag{5.2.14}$$

Kirchhoff 应力张量 $\underset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}} = \mathscr{J}\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 亦为客观张量,但注意其他一些应力张量不是客观量(见下文的例 6)

例 2 变形梯度 $\overset{)(}{\mathbf{D}}$ 不是客观量。

假定在初始时刻 t_0 时,两标架是重合的,因此 $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_0$ 由

(5.2.3) 式，两端后面加运算符 $\overset{\langle}{\nabla}$，得到

$$\tilde{\mathbf{p}}\overset{\langle}{\nabla} = \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{p}\overset{\langle}{\nabla}$$

即

$$\tilde{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}} = \mathbf{Q}(t)\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}} \tag{5.2.15}$$

由此可见，$\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}$ 不服从客观张量的转换关系 (5.2.13) 式，因此不是客观量。附带指出，将 (5.2.15)式与(5.2.7) 式比较，可看出在标架转换时变形梯度 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}$的表现好似一客观矢量。 这是因为 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}$ 是一个两点张量，只有前矢量是在构形 $\varkappa(t)$ 之中。

(5.2.15) 式也可用以下的方法证明：由以变形梯度表示的线元转换式 (2.3.11)，

$$d\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}\cdot d\mathbf{P}, \qquad d\mathbf{p} = \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}\cdot d\mathbf{P}$$

但线元 $d\mathbf{p}$ 为客观矢量(见前面第 2 小节中之例 1)，故得

$$d\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}(t)\cdot d\mathbf{p} = \mathbf{Q}(t)\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}\cdot d\mathbf{P}$$

与上面的 $d\tilde{\mathbf{p}}$ 式比较，即得 (5.2.15) 式。

例 3 Cauchy 变形张量 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}$ 及左 Cauchy-Green 变形张量 $\overset{-1}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}}$ 为客观张量；Green (即右 Cauchy-Green) 变形张量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}$ 不是客观量。

如前 (2.6.15) 与 (2.6.16) 式，在连续介质力学中常把右伸长张量 $\overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}}$ 与左伸长张量 $\overset{-1/2}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}}$ 记作：

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} = \overset{1/2}{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}} \qquad \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{V}} = \overset{-1/2}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}} \tag{5.2.16}$$

由 (2.8.19) 式，可写

$$\begin{aligned}\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}} &= \overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}\cdot\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} = \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{V}}\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}} \\ \tilde{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}} &= \tilde{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}}\cdot\tilde{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}} = \tilde{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{V}}}\cdot\tilde{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}}\end{aligned} \tag{5.2.17}$$

将 (5.2.17) 式代入 (5.2.15) 式，得到

$$
\begin{aligned}
\tilde{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}} \cdot \tilde{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}} &= \mathbf{Q}(t) \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} \\
\tilde{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{V}}} \cdot \tilde{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}} &= \mathbf{Q}(t) \cdot \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{V}} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}
\end{aligned}
\tag{5.2.18}
$$

由张量极分解的唯一性，(5.2.18) 第一式给出

$$
\tilde{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}, \qquad \tilde{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{U}} \tag{5.2.19}
$$

因此 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}$非客观量，$\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}$也非客观量。因 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}{}^2$，故 $\tilde{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}$，$\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}$ 也非客观量。由 (5.2.19) 的第一式，解出

$$
\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}(t)^* \cdot \tilde{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}}
$$

代入 (5.2.18) 式的第二式，得

$$
\tilde{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{V}}} \cdot \tilde{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{Q}(t)^* \cdot \tilde{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}}
$$

由此可得

$$
\tilde{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{V}}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{Q}(t)^* \tag{5.2.20}
$$

因此 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{V}}$ 为客观张量，因而 $\overset{-1}{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}} = \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{V}}{}^2$ 与 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}$ 也都是客观张量。

例 4 体积比 $\mathscr{J}$ 为客观标量，因为

$$
\tilde{\mathscr{J}} = \mathscr{J}_3\big(\tilde{\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}}\big)^{1/2} = \mathscr{J}_3\big(\tilde{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}}\big)^{-1/2} = \mathscr{J}_3\big(\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}\big)^{1/2} = \mathscr{J}_3\big(\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{c}}\big)^{-1/2} = \mathscr{J} \tag{5.2.21}
$$

例 5 关于场的客观性的讨论。

在进行场的研究时，总是取矢径 $\mathbf{p}$ 为自变量。在标架 F 中，自变量为 $\mathbf{p}$，而在标架 $\tilde{F}$ 中，自变量则为 $\tilde{\mathbf{p}}$。$\tilde{\mathbf{p}}$ 与 $\mathbf{p}$ 之间满足(5.2.3)式的关系。假定在两个标架 F 与 $\tilde{F}$ 中矢径 $\mathbf{p}$ 与 $\tilde{\mathbf{p}}$ 在各自的笛卡儿坐标系 $\{x_r\}$ 与 $\{x_{\tilde{r}}\}$ 中沿基矢量 $\mathbf{g}_r$ 与 $\mathbf{g}_{\tilde{r}}$ 的分解式为①

---

① 例如在图 5.1 中，由 (5.2.4) 第一式，$\mathbf{p} = x_1\bar{\mathbf{i}}_1 + x_2\bar{\mathbf{i}}_2 + x_3\bar{\mathbf{i}}_3$，故可取 $\mathbf{g}_r = \bar{\mathbf{i}}_r$ (注意，读者不要误以为 $\mathbf{g}_r = \mathbf{i}_r$)，由 (5.2.4) 第三式，$\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{x}_1\bar{\mathbf{i}}_1 + \tilde{x}_2\bar{\mathbf{i}}_2 + \tilde{x}_3\bar{\mathbf{i}}_3$，故可取 $\mathbf{g}_{\tilde{r}} = \bar{\mathbf{i}}_r$，$x_{\tilde{r}} = \tilde{x}_r$；或者 $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{b}(t) + x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$，故可取 $\mathbf{g}_{\tilde{r}} = \mathbf{i}_r$，$x_{\tilde{r}} = b_r + x_r$。

$$\mathbf{p} = x_r\mathbf{g}_r \quad (\text{对 } r \text{ 求和}) \tag{5.2.22}$$
$$\tilde{\mathbf{p}} = x_{\tilde{r}}\mathbf{g}_{\tilde{r}} \quad (\text{对 } \tilde{r} \text{ 求和})$$

将 (5.2.22) 式代入 (5.2.3) 式,得

$$x_{\tilde{r}}\mathbf{g}_{\tilde{r}} = \mathbf{Q}(t)\cdot(x_s\mathbf{g}_s) + \mathbf{b}(t) \quad (\text{对 } \tilde{r}, s \text{ 取和,下同})$$

或

$$\mathbf{Q}(t)^*\cdot(x_{\tilde{r}}\mathbf{g}_{\tilde{r}}) = x_s\mathbf{g}_s + \mathbf{Q}(t)^*\cdot\mathbf{b}(t) \tag{5.2.23}$$

(5.2.23) 的两式各对 x_s, $x_{\tilde{r}}$ 求导,得

$$x_{\tilde{r},s}\mathbf{g}_{\tilde{r}} = \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{g}_s \tag{5.2.24a}$$
$$x_{s,\tilde{r}}\mathbf{g}_s = \mathbf{Q}(t)^*\cdot\mathbf{g}_{\tilde{r}} \tag{5.2.24b}$$

(5.2.24) 式也可以由 (5.2.3) 式对 x_s 求导, 及对 $x_{\tilde{r}}$ 求导, 并利用 (5.2.22) 式而得。由 (5.2.24) 可得

$$x_{\tilde{r},s} = \mathbf{g}_{\tilde{r}}\cdot\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{g}_s = \mathbf{g}_s\cdot\mathbf{Q}(t)^*\cdot\mathbf{g}_{\tilde{r}} = x_{s,\tilde{r}} \tag{5.2.25}$$

(5.2.25) 式之值等于 x_s 坐标轴与 $x_{\tilde{r}}$ 坐标轴夹角之余弦。

(1) 设 f 为客观标量场,即 $\tilde{f} = f$, 则 $f\overleftarrow{\nabla}$ 为客观矢量场。这是因为

$$\tilde{f}\overleftarrow{\tilde{\nabla}} = \tilde{f}_{,\tilde{r}}\mathbf{g}_{\tilde{r}}, \quad f\overleftarrow{\nabla} = f_{,s}\mathbf{g}_s$$

故利用 (5.2.25), (5.2.24) 第一式,得

$$\begin{aligned}\tilde{f}\overleftarrow{\tilde{\nabla}} &= \tilde{f}_{,\tilde{r}}\mathbf{g}_{\tilde{r}} = f_{,s}x_{s,\tilde{r}}\mathbf{g}_{\tilde{r}} = f_{,s}x_{\tilde{r},s}\mathbf{g}_{\tilde{r}} = f_{,s}\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{g}_s \\ &= \mathbf{Q}(t)\cdot(f_{,s}\mathbf{g}_s) = \mathbf{Q}(t)\cdot(f\overleftarrow{\nabla})\end{aligned} \tag{5.2.26}$$

故 $f\overleftarrow{\nabla}$ 为客观张量场。

(5.2.26) 式也可以用另一种方法导出。取矢径的标架转换公式 (5.2.3) 的微分,或直接由 (5.2.6) 式得到线元的标架转换公式:

$$d\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}(t)\cdot d\mathbf{p}, \quad d\mathbf{p} = \mathbf{Q}(t)^*\cdot d\tilde{\mathbf{p}} \tag{g}$$

取 $\tilde{f} = f$ 的微分,得到

$$(\tilde{f}\overleftarrow{\tilde{\nabla}})\cdot d\tilde{\mathbf{p}} = (f\overleftarrow{\nabla})\cdot d\mathbf{p} \tag{h}$$

将 (g) 的第二式 $d\mathbf{p}$ 代入 (h) 式，可得

$$\tilde{f}\overset{\tilde{\rightarrow}}{\nabla} = (f\overset{\rightarrow}{\nabla})\cdot\mathbf{Q}(t)^* = \mathbf{Q}(t)\cdot(f\overset{\rightarrow}{\nabla})$$

此即 (5.2.26) 式。

(2) 设 $\mathbf{u}$ 为客观矢量场，即

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{u} \tag{i}$$

则 $\mathbf{u}\overset{\rightarrow}{\nabla}$ 为客观张量场，$\mathbf{u}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}$ 为客观标量场，$\mathbf{u}\times\overset{\rightarrow}{\nabla}$ 为客观矢量场。这是因为，由 (i) 式，(5.2.25)，(5.2.24a) 式

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}\overset{\tilde{\rightarrow}}{\nabla} &= \tilde{\mathbf{u}}_{,i'}\mathbf{g}^{i'} = (\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{u})_{,s}x^s_{,i'}\mathbf{g}^{i'}\\ &= (\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{u}_{,s})x^s_{,i'}\mathbf{g}^{i'} = (\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{u}_{,s})(\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{g}^s)\\ &= \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{u}_{,s}\mathbf{g}^s\cdot\mathbf{Q}(t)^* = \mathbf{Q}(t)\cdot(\mathbf{u}\overset{\rightarrow}{\nabla})\cdot\mathbf{Q}(t)^*\end{aligned} \tag{5.2.27}$$

故 $\mathbf{u}\overset{\rightarrow}{\nabla}$ 为客观张量场。也可用另一种证明方法。取 (i) 式的微分得

$$(\tilde{\mathbf{u}}\overset{\tilde{\rightarrow}}{\nabla})\cdot d\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}(t)\cdot(\mathbf{u}\overset{\rightarrow}{\nabla})d\mathbf{p} \tag{j}$$

将 (g) 的第二式 $d\mathbf{p}$ 代入 (j) 式，得到

$$\tilde{\mathbf{u}}\overset{\tilde{\rightarrow}}{\nabla} = \mathbf{Q}(t)\cdot(\mathbf{u}\overset{\rightarrow}{\nabla})\cdot\mathbf{Q}(t)^*$$

此即 (5.2.27) 式。

用类似于 (5.2.27) 式的推导，可得

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}\cdot\overset{\tilde{\rightarrow}}{\nabla} &= (\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{u}_{,s})\cdot(\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{g}^s)\\ &= \mathbf{u}_{,s}\cdot\mathbf{Q}(t)^*\cdot\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{g}^s = \mathbf{u}_{,s}\cdot\mathbf{g}^s\\ &= \mathbf{u}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}\end{aligned} \tag{5.2.28}$$

故 $\mathbf{u}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}$ 为客观标量场，以及(利用 (2.4.2) 式)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}\times\overset{\tilde{\rightarrow}}{\nabla} &= (\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{u}_{,s})\times(\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{g}^s)\\ &= \mathscr{J}_3(\mathbf{Q}(t))\overset{-1}{\mathbf{Q}}(t)^*\cdot(\mathbf{u}_{,s}\times\mathbf{g}^s)\end{aligned}$$

$$= \pm\mathbf{Q}(t)\cdot(\mathbf{u}\times\overset{\rangle}{\nabla}) \tag{5.2.29}$$

式中因 $\mathbf{Q}(t)$为正交张量,其行列式(或第三主不变量)$\mathscr{J}_3(\mathbf{Q}(t))=\pm 1$；当 $\mathbf{Q}(t)$ 为正常的取正号，而当 $\mathbf{Q}(t)$ 为非正常的，取负号。因此,如果 $\mathbf{Q}(t)$ 只限于正常的,则 $\mathbf{u}\times\overset{\rangle}{\nabla}$ 为客观矢量场。

(3) 设 $\mathbf{B}$ 为客观张量场,即

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}(t)^* \tag{k}$$

则 $\mathbf{B}\cdot\overset{\rangle}{\nabla}$ 为客观矢量场。这是因为，由 (k) 式、(5.2.25) 与 (5.2.24a) 式，可导出

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{B}}\cdot\overset{\tilde{\rangle}}{\nabla} &= \tilde{\mathbf{B}}_{,r}\cdot\mathbf{g}_r = (\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}(t)^*)_{,s}x_{s,r}\cdot\mathbf{g}_r \\ &= \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{B}_{,s}\cdot\mathbf{Q}(t)^*\cdot(\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{g}_s) \\ &= \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{B}_{,s}\cdot\mathbf{g}_s = \mathbf{Q}(t)\cdot(\mathbf{B}\cdot\overset{\rangle}{\nabla})\end{aligned} \tag{5.2.30}$$

故 $\mathbf{B}\cdot\overset{\rangle}{\nabla}$ 为客观矢量场。

由例 1，Cauchy 应力张量 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}$ 为客观张量场,由 (5.2.30) 式

$$\tilde{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{\tilde{\rangle}}{\nabla} = \mathbf{Q}(t)\cdot(\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\rangle}{\nabla}) \tag{5.2.30$'$}$$

故 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\rangle}{\nabla}$ 为客观矢量场。

例 6 第一类与第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量，$\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}$ 与 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}$，都不是客观张量。这是因为，由 (4.4.2)，(5.2.14) 与 (5.2.15) 式，

$$\begin{aligned}\tilde{\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}} &= \tilde{\mathscr{J}}\tilde{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{-1}{\tilde{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}}{}^* = \mathscr{J}\mathbf{Q}(t)\cdot\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{Q}(t)^*\cdot(\mathbf{Q}(t)\cdot\overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^*) \\ &= \mathscr{J}\mathbf{Q}(t)\cdot\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}\cdot\overset{-1}{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}}{}^* = \mathbf{Q}(t)\cdot\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}\end{aligned} \tag{5.2.31}$$

因此，$\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}$ 非客观张量，它的标架转换公式 (5.2.31) 式类似于客观矢量。

利用 (4.5.12)(5.2.15) 与上面的 (5.2.31) 式，可证

$$\tilde{\overset{\ll}{\mathbf{T}}} = \overset{\ll}{\mathbf{T}} \tag{5.2.32}$$

因此，$\overset{\ll}{\mathbf{T}}$ 非客观张量。

例 7　速度梯度 $\overset{\gg}{\mathbf{L}}$ 与旋率 $\overset{\gg}{\mathbf{w}}$ 均非客观张量，而变形率 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 是客观张量。它们的标架转换关系各为(略去 $\mathbf{Q}(t)$ 与 $\boldsymbol{\Omega}^Q(t)$ 的自变量 t 不写)

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{L}}} = \mathbf{Q} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{Q}^* + \boldsymbol{\Omega}^Q \tag{5.2.33}$$

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{d}}} = \mathbf{Q} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{Q}^* \tag{5.2.34}$$

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{w}}} = \mathbf{Q} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{Q}^* + \boldsymbol{\Omega}^Q \tag{5.2.35}$$

式中 $\boldsymbol{\Omega}^Q$ 见 (5.2.10a) 式。此外，加速度梯度张量 $\overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(2)}, \cdots, \overset{\gg}{\mathbf{L}}_{(n)}, \cdots$ 亦都非客观量。

为了证明 (5.2.33) 式，可将 (g) 式写成以下形式：

$$\tilde{\mathbf{p}}\nabla_{\mathbf{p}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\mathbf{p}} = \mathbf{Q}(t), \quad \mathbf{p}\nabla_{\tilde{\mathbf{p}}} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tilde{\mathbf{p}}} = \mathbf{Q}(t)^* \tag{5.2.36a,b}$$

故

$$\mathbf{v}\nabla_{\tilde{\mathbf{p}}} = (\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{p}}) \cdot (\mathbf{p}\nabla_{\tilde{\mathbf{p}}}) = (\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{Q}(t)^* \tag{5.2.37a}$$

取其转置，

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{p}}}\mathbf{v} = \mathbf{Q}(t) \cdot (\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{v}) \tag{5.2.37b}$$

由 (5.2.8) 式

$$\tilde{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{b}}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{v} + \dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot \mathbf{p} \tag{5.2.8$'$}$$

可得

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{L}}} = \tilde{\mathbf{v}}\tilde{\overset{\gg}{\nabla}} = \tilde{\mathbf{v}}\nabla_{\tilde{\mathbf{p}}} = \mathbf{Q}(t) \cdot (\mathbf{v}\nabla_{\tilde{\mathbf{p}}}) + \dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot (\mathbf{p}\nabla_{\tilde{\mathbf{p}}})$$

利用 (5.2.37a)、(5.2.36b) 及 (5.2.10a) 式，可得

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{L}}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \overset{\gg}{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{Q}(t)^* + \boldsymbol{\Omega}^Q(t) \quad \text{即 (5.2.33) 式}$$

取其转置

$$\overset{\sim\gg}{\mathbf{L}}{}^{*}=\mathbf{Q}(t)\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}{}^{*}\cdot\mathbf{Q}(t)^{*}-\boldsymbol{\Omega}^{Q}(t)$$

取以上两式之半和与半差(即对称化与反对称化),得到

$$\overset{\sim\gg}{\mathbf{d}}=\mathbf{Q}(t)\cdot\overset{\gg}{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{Q}(t)^{*}\qquad\qquad \text{即 (5.2.34) 式}$$

$$\overset{\sim\gg}{\mathbf{w}}=\mathbf{Q}(t)\cdot\overset{\gg}{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{Q}(t)^{*}+\boldsymbol{\Omega}^{Q}(t)\quad \text{即 (5.2.35) 式}$$

以上结果也可用另法证明如下：由 (5.2.15) 式求导,得

$$\dot{\overset{\sim\times}{\mathbf{D}}}=\dot{\mathbf{Q}}\cdot\overset{\times}{\mathbf{D}}+\mathbf{Q}\cdot\dot{\overset{\times}{\mathbf{D}}}$$

左端利用 (3.2.5b) 式，右端的 $\dot{\mathbf{Q}}$ 利用 (5.2.10b) 式，然后再利用 (5.2.15) 式,得到

$$\begin{aligned}\overset{\sim\gg}{\mathbf{L}}\cdot\overset{\sim\times}{\mathbf{D}}&=\boldsymbol{\Omega}^{Q}\cdot\mathbf{Q}\cdot\overset{\times}{\mathbf{D}}+\mathbf{Q}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\overset{\times}{\mathbf{D}}\\&=(\boldsymbol{\Omega}^{Q}+\mathbf{Q}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{Q}^{*})\cdot\overset{\sim\times}{\mathbf{D}}\end{aligned}$$

两端点积 $\overset{\sim\times}{\mathbf{D}}$ 之逆,即得 (5.2.33) 式

例 8 Rivlin-Ericksen 张量 $\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}$ 为客观张量,即

$$\overset{\sim\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}=\mathbf{Q}(t)\cdot\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}\cdot\mathbf{Q}(t)^{*}\tag{5.2.38}$$

由于 $\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}$ 有两种不同的定义,也用两种方法证明:

证 1 由 (3.5.17), 并利用 (5.2.15) 式,得

$$\begin{aligned}\overset{\sim\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}&=\overset{-1}{\overset{\sim\times}{\mathbf{D}}}{}^{*}\cdot\overset{\sim\ll}{\mathbf{C}}{}^{(n)}\cdot\overset{-1}{\overset{\sim\times}{\mathbf{D}}}=\mathbf{Q}(t)\cdot\overset{-1}{\overset{\times}{\mathbf{D}}}{}^{*}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{C}}{}^{(n)}\cdot\overset{-1}{\overset{\times}{\mathbf{D}}}\cdot\mathbf{Q}(t)^{*}\\&=\mathbf{Q}(t)\cdot\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}\cdot\mathbf{Q}(t)^{*}\qquad\qquad \text{即(5.2.38)式}\end{aligned}$$

证 2 由 (3.5.22) 式,并利用线元的标架转换公式 (g), 得

$$\frac{d^{n}}{dt^{n}}[(ds)^{n}]=d\tilde{\mathbf{p}}\cdot\overset{\sim\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}\cdot d\tilde{\mathbf{p}}$$

$$= d\mathbf{p} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)} \cdot d\mathbf{p} = d\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)} \cdot \mathbf{Q}^* \cdot d\tilde{\mathbf{p}}$$

因 $d\tilde{\mathbf{p}}$ 为任意，且 $\overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)}$，$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{A}}}_{(n)}$ 均为对称，故

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{A}}}_{(n)} = \mathbf{Q} \cdot \overset{\gg}{\mathbf{A}}_{(n)} \cdot \mathbf{Q}^* \quad \text{即(5.2.38)式}$$

例 9 相对变形张量 $\mathbf{D}_{(t)}(\tau)$ 的标架转换关系为

$$\tilde{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \cdot \mathbf{D}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{Q}(t)^*$$

由此可导出右 Cauchy-Green 相对变形张量 $\mathbf{C}_{(t)}(\tau)$ 与左 Cauchy-Green 相对变形张量 $\mathbf{B}_{(t)}(\tau)$（即 $\mathbf{c}_{(t)}^{-1}(\tau)$）的标架转换关系:

$$\tilde{\mathbf{C}}_{(t)}(\tau) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{C}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{Q}(t)^*$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{(t)}(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \cdot \mathbf{B}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{Q}(\tau)^*$$

上式中的第一式说明，当把 $\mathbf{C}_{(t)}(\tau)$ 看作是构形 $\kappa(t)$ 中的张量时，它是客观张量;而上式中第二式则说明，当把 $\tilde{\mathbf{B}}_{(t)}(\tau)$ 看作是构形 $\kappa(\tau)$ 中的张量时，它是客观张量。

例 10 客观张量对时间的物质导数不是客观张量。

设 $\mathbf{H}$ 为客观张量①（例如 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$，$\overset{\gg}{\mathbf{c}}$，$\overset{\gg}{\mathbf{c}}^{-1}$ 等），即

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}(t)^* \tag{5.2.39}$$

对 t 求导，得

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{H}}} = \frac{d\tilde{\mathbf{H}}}{dt} &= \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{Q}^* + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}^* + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^* \\ &\neq \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{Q}^* \end{aligned} \tag{5.2.40}$$

因此 $\mathbf{H}$ 的物质导数 $\dot{\mathbf{H}}$ 非客观张量。

在连续介质力学中常采用 Jaumann 导数，它的定义是

$$\mathring{\mathbf{H}} = \frac{\mathscr{D}\mathbf{H}}{\mathscr{D}t} = \dot{\mathbf{H}} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{w} \tag{5.2.41}$$

可以证明 $\mathring{\mathbf{H}}$ 为客观张量，即

---

① 这里 $\mathbf{H}$ 为构形 $\kappa(t)$ 中的张量，即 $\overset{\gg}{\mathbf{H}}$。

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{H}}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \overset{\circ}{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{Q}(t)^* \tag{5.2.42}$$

证　(5.2.35) 式 $\cdot\, \mathbf{Q}$, 并利用 (5.2.10b) 式,得

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{w}}} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{Q}}$$

故有

$$\dot{\mathbf{Q}} = \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{w}}} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{w}} \tag{5.2.43a}$$

取其转置,并注意 $\overset{\circ}{\mathbf{w}}$ 为反对称,

$$\dot{\mathbf{Q}}^* = \mathbf{Q}^* \cdot \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{w}}}{}^* - \overset{\circ}{\mathbf{w}}{}^* \cdot \mathbf{Q}^* = -\mathbf{Q}^* \cdot \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{w}}} + \overset{\circ}{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{Q}^* \tag{5.2.43b}$$

将 (5.2.43a,b) 代入 (5.2.40), 并整理后,得

$$\dot{\tilde{\mathbf{H}}} - \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{w}}} \cdot \tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{H}} \cdot \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{w}}} = \mathbf{Q} \cdot (\dot{\mathbf{H}} - \overset{\circ}{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{Q}^*$$

利用 (5.2.41) 的记法,上式可写作

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{H}}} = \mathbf{Q} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{Q}^* \qquad \text{即 (5.2.41) 式} \qquad [\text{证毕}]$$

Jaumann 导数又称为共旋导数, 它的物理意义表示一与介质共旋的观察者所感觉的变化率。 它就是从 $\mathbf{H}$ 的物质导数 $\dot{\mathbf{H}}$ 中减去由于 $\mathbf{H}$ 的前矢量与介质共旋所造成的变化率 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{H}$ 以及由于 $\mathbf{H}$ 的后矢量与介质共旋所造成的变化率 $\mathbf{H} \cdot \mathbf{w}^*$, 即

$$\overset{\circ}{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{w}^* = \dot{\mathbf{H}} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{w}$$

此式恰好就是 Jaumann 导数的定义式 (5.2.41)。

三、张量的客观导数

张量的客观导数除了 Jaumann 导数以外, 还有其他的几种。我们采用物质描述法,即采用 Lagrange 坐标系 $\{X^A, t\}$ 来研究,更为方便。按 (3.1.35) 式, $\mathbf{H}$ 的分解式为

$$\mathbf{H} = \hat{h}^{AB}(X^M, t)\hat{\mathbf{g}}_A(X^M, t)\hat{\mathbf{g}}_B(X^M, t) \tag{5.2.44}$$

$\mathbf{H}$ 的物质导数为

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d\hat{h}^{AB}}{dt}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B + \hat{h}^{AB}\frac{d\hat{\mathbf{g}}_A}{dt}\hat{\mathbf{g}}_B + \hat{h}^{AB}\hat{\mathbf{g}}_A\frac{d\hat{\mathbf{g}}_B}{dt}$$

将(3.1.13r)式,即

$$\frac{d\hat{\mathbf{g}}_A}{dt} = (\mathbf{v}\overset{\rightarrow}{\nabla})\cdot\hat{\mathbf{g}}_A = \overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\hat{\mathbf{g}}_A = (\overset{\gg}{\mathbf{d}} + \overset{\gg}{\mathbf{w}})\cdot\hat{\mathbf{g}}_A$$

代入,得

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{d\hat{h}^{AB}}{dt}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B + \hat{h}^{AB}(\overset{\gg}{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{g}}_A)\hat{\mathbf{g}}_B + \hat{h}^{AB}\hat{\mathbf{g}}_A(\overset{\gg}{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{g}}_B)$$

$$+ \hat{h}^{AB}(\overset{\gg}{\mathbf{w}}\cdot\hat{\mathbf{g}}_A)\hat{\mathbf{g}}_B + \hat{h}^{AB}\hat{\mathbf{g}}_A(\overset{\gg}{\mathbf{w}}\cdot\hat{\mathbf{g}}_B) \tag{5.2.45}$$

按(5.2.41)式定义的 Jaumann 导数,就是上式右端前三项之和,故上式可改写作(注意 $\overset{\gg}{\mathbf{w}}\cdot\hat{\mathbf{g}}_B = -\hat{\mathbf{g}}_B\cdot\overset{\gg}{\mathbf{w}}$)

$$\dot{\mathbf{H}} = \overset{\bullet}{\mathbf{H}} + \overset{\gg}{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{H} - \mathbf{H}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{w}}$$

即

$$\overset{\bullet}{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}} - \overset{\gg}{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{H}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{w}} \qquad \text{即(5.2.41)式}$$

在张量分析①中,还引进了 $\mathbf{H}$ 的另外四种客观导数 $\mathbf{V}_1^H$, $\mathbf{V}_2^H$, $\mathbf{V}_3^H$ 与 $\mathbf{V}_4^H$:

$$\mathbf{V}_1^H = \frac{d\hat{h}^{AB}}{dt}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B, \qquad \mathbf{V}_2^H = \frac{d\hat{h}^{A}_{\cdot B}}{dt}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}^B$$

$$\mathbf{V}_3^H = \frac{d\hat{h}_A^{\cdot B}}{dt}\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}_B, \qquad \mathbf{V}_4^H = \frac{d\hat{h}_{AB}}{dt}\hat{\mathbf{g}}^A\hat{\mathbf{g}}^B \tag{5.2.46}$$

把它们转换到 Euler 坐标系中后,可记作

$$\mathbf{V}_1^H = \frac{\delta h^{ij}}{\delta t}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j, \qquad \mathbf{V}_2^H = \frac{\delta h^{i}_{\cdot j}}{\delta t}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j$$

$$\mathbf{V}_3^H = \frac{\delta h_i^{\cdot j}}{\delta t}\mathbf{g}^i\mathbf{g}_j, \qquad \mathbf{V}_4^H = \frac{\delta h_{ij}}{\delta t}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j \tag{5.2.47}$$

---

① 例如,参考黄克智等编著的"张量分析",清华大学出版社。

它们是四个互不相等的客观张量。$\mathbf{V}_1^H$ 称为 $\mathbf{H}$ 的 Oldroyd 导数，它相当于在 (5.2.45) 式右端只取第一项，它表示一个与介质共旋同时又共变形的观察者所感觉的变化率，这个观察者可以说与介质融为一体，既感受不到介质的旋转(以旋率 $\overset{\gg}{\mathbf{w}}$ 表示)，也感受不到介质的变形(以变形率 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 表示)，因此这个观察者感受不到介质的随体协变基 $\hat{\mathbf{g}}_A$ 的变化。$\mathbf{V}_4^H$ 称为 $\mathbf{H}$ 的 Cottor-Rivlin 导数，又称对流导数，常以 $\hat{\mathbf{H}}$ 表示。它表示一个感受不到介质逆变基 $\hat{\mathbf{g}}^A$ 变化的观察者所感觉的变化率。

当我们求两个张量的双点积的物质导数时，其中一个张量用 Oldroyd 导数，另一个张量用 Cottor-Rivlin 导数将是方便的，例如

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{H}:\mathbf{K}) = \frac{d}{dt}(\hat{h}^{AB}\hat{k}_{AB})$$

$$= \frac{d\hat{h}^{AB}}{dt}\hat{k}_{AB} + \hat{h}^{AB}\frac{d\hat{k}_{AB}}{dt} = \frac{\delta h^{ij}}{\delta t}k_{ij} + h^{ij}\frac{\delta k_{ij}}{\delta t}$$

Jaumann 导数 $\overset{\circ}{\mathbf{H}}$ 最为常用。$\mathbf{V}_1^H, \cdots, \mathbf{V}_4^H$ 都可以通过 $\dot{\mathbf{H}}$ 表示，例如

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1^H &= \dot{\mathbf{H}} - (\mathbf{v}\overset{\rightarrow}{\nabla})\cdot\mathbf{H} - \mathbf{H}\cdot(\overset{\rightarrow}{\nabla}\mathbf{v}) \\ &= \dot{\mathbf{H}} - \overset{\gg}{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{H} - \mathbf{H}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{d}}\end{aligned} \qquad (5.2.48)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_4^H &= \dot{\mathbf{H}} + (\overset{\rightarrow}{\nabla}\mathbf{v})\cdot\mathbf{H} + \mathbf{H}\cdot(\mathbf{v}\overset{\rightarrow}{\nabla}) \\ &= \dot{\mathbf{H}} + \overset{\gg}{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{H}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{d}}\end{aligned} \qquad (5.2.49)$$

现在我们以 Cauchy 应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 为例，来说明其物质导数 $\dot{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}$ 不适于用来描述材料应力状态的变化，图 5.3 示一受拉杆，连同它所受的沿杆轴方向的拉应力 k(k = const) 在平面内以角速度 ω 旋转。以 x^1, x^2 表示平面内固定的笛卡儿坐标轴，$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ 为固定的

基矢量，而 $x^{1'}$，$x^{2'}$ 表示固结于杆上并和杆一起绕 O 点旋转的笛卡儿坐标轴，$\mathbf{i}_{1'}$，$\mathbf{i}_{2'}$ 为旋转的基矢量，杆内的 Cauchy 应力张量为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = k\mathbf{i}_{1'}\mathbf{i}_{1'} = k[\cos^2\omega t\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \sin^2\omega t\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \sin\omega t\cos\omega t(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1)]$$

其物质导数为

$$\dot{\overset{\gg}{\mathbf{t}}} = \frac{Dt^{rs}}{Dt}\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s$$

$$= k\omega[-\sin 2\omega t\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \sin 2\omega t\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \cos 2\omega t(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1)]$$

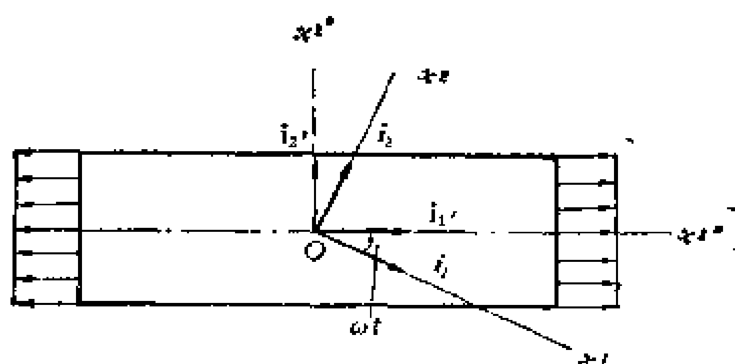


图　5.3

我们可以看出，虽然图 5.3 中杆的应力状态始终为应力值不变的单向拉伸，但是 Cauchy 应力张量的物质导数却不等于零：$\dot{\overset{\gg}{\mathbf{t}}} \neq 0$。现在我们来计算 Jaumann 导数 $\overset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}$。杆内质点的速度场为

$$\mathbf{v} = -x^2\omega\mathbf{i}_1 + x^1\omega\mathbf{i}_2$$

于是可求得：

$$\overset{\to}{\nabla}\mathbf{v} = -\mathbf{v}\overset{\to}{\nabla} = -\overset{\gg}{\mathbf{w}} = \omega(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1)$$

$$\overset{\gg}{\mathbf{d}} = 0$$

$$\overset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}} = \dot{\overset{\gg}{\mathbf{t}}} - \overset{\gg}{\mathbf{w}}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{t}} + \overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{w}} = 0$$

因此，Cauchy 应力张量的 Jaumann 导数 $\overset{\circ}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}$ 为零。可以验证对于

图 5.3 的例，$\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}$ 的前面所述的其他几种客观导数也都是零。

除了物质旋率 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{w}}(t)$ 以外，我们还引进了(见 §3.3，七)其他的旋率，例如 (3.3.38) 式的相对旋率 $\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}(t)$，(3.3.30) 式的 Euler 旋率 $\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{\mathrm{Eul}}(t)$ 与伸长率标架旋率 $\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{d}(t)$。可以证明这三个旋率(均为 -(t) 构形中的张量)都服从和物质旋率 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{w}}(t)$ 形式相同的标架转换关系(见 (5.2.35) 式)：

$$
\begin{aligned}
\tilde{\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}} &= \mathbf{Q}\cdot\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}\cdot\mathbf{Q}^{*}+\boldsymbol{\Omega}^{Q}\\
\tilde{\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}}{}^{\mathrm{Eul}} &= \mathbf{Q}\cdot\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{\mathrm{Eul}}\cdot\mathbf{Q}^{*}+\boldsymbol{\Omega}^{Q} \qquad (5.2.50)\\
\tilde{\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}}{}^{d} &= \mathbf{Q}\cdot\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{d}\cdot\mathbf{Q}^{*}+\boldsymbol{\Omega}^{Q}
\end{aligned}
$$

作为例子，我们只证明 (5.2.50) 的第一式，其余两式亦可类似地证明。由 (3.3.38) 式，经过标架转换以后，

$$
\tilde{\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}} = \dot{\tilde{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}}}\cdot\tilde{\overset{\circ}{\mathbf{R}}}{}^{*} \qquad (5.2.51)
$$

式中，由 (5.2.19) 式，

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}}} &= (\mathbf{Q}\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}})^{\cdot} = \mathbf{Q}\cdot\dot{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}}+\dot{\mathbf{Q}}\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}\\
\tilde{\overset{\circ}{\mathbf{R}}}{}^{*} &= \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{*}\cdot\mathbf{Q}^{*}
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\tilde{\overset{\rangle\rangle}{\boldsymbol{\Omega}}} &= (\mathbf{Q}\cdot\dot{\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}}+\dot{\mathbf{Q}}\cdot\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}})\cdot\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{*}\cdot\mathbf{Q}^{*}\\
&= \mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{Q}^{*}+\boldsymbol{\Omega}^{Q}
\end{aligned}
$$

故 (5.2.50) 第一式得证。因此仿照 (5.2.42) 式的证明，可以证明当 $\mathbf{H}$ 为客观张量时，下列类似于 Jaumann 导数 (5.2.41) 式的表达式也都是客观张量：

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{H}}-\overset{\gg}{\boldsymbol{\Omega}}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{H}\cdot\overset{\gg}{\boldsymbol{\Omega}}\\
&\dot{\mathbf{H}}-\overset{\gg}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{\mathrm{Eul}}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{H}\cdot\overset{\gg}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{\mathrm{Eul}}\\
&\dot{\mathbf{H}}-\overset{\gg}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{d}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{H}\cdot\overset{\gg}{\boldsymbol{\Omega}}{}^{d}
\end{aligned}
\tag{5.2.52}
$$

它们可称为广义 Jaumann 导数。

最后指出,利用(2.12.11)第三式与(3.6.10)第二式,即

$$
\mathbf{R}_{(t)}(\tau)|_{\tau=t}=\mathbf{I},\quad \dot{\mathbf{R}}_{(t)}(\tau)|_{\tau=t}=\mathbf{w}(t)
$$

可以证明 Jaumann 导数 $\dot{\mathbf{H}}(t)$ 可以表示成

$$
\dot{\mathbf{H}}(t)=\{\mathbf{R}^{*}_{(t)}(\tau)\cdot\mathbf{H}(\tau)\cdot\mathbf{R}_{(t)}(\tau)\}^{\cdot}|_{\tau=t} \tag{5.2.53}
$$

式中 $(\,)^{\cdot}=\dfrac{d(\,)}{d\tau}$。上式表示在 t 时刻的 Jaumann 导数 $\dot{\mathbf{H}}(t)$ 的意义是把 $\mathbf{H}(\tau)$ 从 $\mathscr{R}(\tau)$ 构形旋转到 $\mathscr{R}(t)$ 构形后对时间的导数。与此类似,以 $\hat{\mathbf{H}}$ 表示(5.2.52)第一式(即基于相对旋率 $\boldsymbol{\Omega}$ 的)的广义 Jaumann 导数,即

$$
\hat{\mathbf{H}}=\dot{\mathbf{H}}-\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\Omega} \tag{5.2.54}
$$

它可表示成:

$$
\hat{\mathbf{H}}(t)=\mathbf{R}(t)\cdot\{\mathbf{R}^{*}(t)\cdot\mathbf{H}(t)\cdot\mathbf{R}(t)\}^{\cdot}\cdot\mathbf{R}^{*}(t) \tag{5.2.55}
$$

式中 $(\quad)^{\cdot}=\dfrac{d(\quad)}{dt}$。(5.2.55)式右端表示将 $\mathbf{H}(t)$ 从 $\mathscr{R}(t)$ 构形旋转到 $\mathscr{R}(t_0)$ 构形后对时间求导,然后把求导的结果再转回到 $\mathscr{R}(t)$ 构形中去。

四、Lagrange 型张量的物质导数

有些张量,它们不因标架转换而改变,例如由(5.2.19)与(5.2.32)式:

$$
\tilde{\overset{\ll}{\mathbf{U}}}=\overset{\ll}{\mathbf{U}},\qquad \tilde{\overset{\ll}{\mathbf{C}}}=\overset{\ll}{\mathbf{C}} \tag{5.2.56}
$$

$$\tilde{\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}$$

它们可称为 Lagrange 型张量。它们不服从客观张量的标架转换关系 (5.2.13) 式，因此不是客观张量①。

设 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{H}}$ 为客观张量，服从标架转换关系 (5.2.39) 式。利用 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}$ 与 $\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}$ 的标架转换关系 (5.2.19) 第一式与 (5.2.15) 式，易证

$$\overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}^* \cdot \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{H}} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}},\quad \overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{H}} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}^{*-1},\quad \overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}^* \cdot \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{H}} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}} \tag{5.2.57}$$

都是 Lagrange 型张量。下面的例子说明这些 Lagrange 型张量的物质导数与 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{H}}$ 的某种客观导数之间的联系。

例 1 对(5.2.57)的第一个表达式求物质导数。利用 (3.3.38) 式，可得

$$\begin{aligned}(\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{R})^{\cdot} &= \mathbf{R}^* \cdot \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}}^* \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{R}} \\ &= \mathbf{R}^* \cdot (\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}^* \cdot \hat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{R} \end{aligned} \tag{5.2.58}$$

式中 $\hat{\mathbf{H}}$ 见 (5.2.54)。(5.2.58) 式说明 Lagrange 型张量 $\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{R}$ 的物质导数与 (5.2.52) 中第一种（即基于相对旋率 $\boldsymbol{\Omega}$ 的）广义 Jaumann 导数 $\hat{\mathbf{H}}$ 之间的联系。例如记

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^R = \mathbf{R}^* \cdot \overset{\rangle\rangle}{\underset{\circ}{\mathbf{t}}} \cdot \mathbf{R} \tag{5.2.59}$$

$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}{}^R$ 表示把 Kirchhoff 应力张量 $\overset{\rangle\rangle}{\underset{\circ}{\mathbf{t}}}$ 从 Euler 标架旋转到 Lagrange 标架的结果。在 (5.2.55) 式中，令 $\mathbf{H} = \underset{\circ}{\mathbf{t}}$，得到

$$\dot{\mathbf{T}}^R = \mathbf{R}^* \cdot (\underset{\cdot}{\dot{\mathbf{t}}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \underset{\cdot}{\mathbf{t}} + \underset{\cdot}{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R}^* \cdot \hat{\underset{\circ}{\mathbf{t}}} \cdot \mathbf{R} \tag{5.2.60}$$

例 2 对 (5.2.57) 的第二个表达式求物质导数。利用 (3.2.8)

---

① Hill 采用不同的定义，把这里的 Lagrange 型张量称为客观张量。

式，可得

$$(\overset{-1}{\vec{\mathbf{D}}}\cdot\mathbf{H}\cdot\overset{-1}{\vec{\mathbf{D}}}{}^*)^{\cdot}=\overset{-1}{\vec{\mathbf{D}}}\cdot(\dot{\mathbf{H}}-\mathbf{L}\cdot\mathbf{H}-\mathbf{H}\cdot\mathbf{L}^*)\cdot\overset{-1}{\vec{\mathbf{D}}}{}^*$$

上式右端中间的圆括弧恰好就是(5.2.48)式即 Oldroyd 导数 $\mathbf{V}_1^H$，因此

$$(\overset{-1}{\vec{\mathbf{D}}}\cdot\mathbf{H}\cdot\overset{-1}{\vec{\mathbf{D}}}{}^*)^{\cdot}=\overset{-1}{\vec{\mathbf{D}}}\cdot\mathbf{V}_1^H\cdot\overset{-1}{\vec{\mathbf{D}}}{}^* \tag{5.2.61}$$

令 $\mathbf{H}=\underset{\cdot}{\mathbf{t}}$，上式左端的圆括弧就是 (4.8.27) 式的第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{\ll}{\mathbf{T}}$，因此

$$\dot{\mathbf{T}}^{(2)}=\dot{\mathbf{T}}=\overset{-1}{\vec{\mathbf{D}}}\cdot\mathbf{V}_1^{t}\cdot\overset{-1}{\vec{\mathbf{D}}}{}^* \tag{5.2.62}$$

此式说明第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{\ll}{\mathbf{T}}$ 的物质导数与 Kirchhoff 应力张量 $\underset{\cdot}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}$ 的 Oldroyd 导数 $\mathbf{V}_1^{t}$ 之间的联系。

例 3 对(5.2.57)的第三个表达式求物质导数。利用(3.2.6)式，可得

$$(\mathbf{D}^*\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{D})^{\cdot}=\mathbf{D}^*\cdot(\dot{\mathbf{H}}+\mathbf{L}^*\cdot\mathbf{H}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{L})\cdot\mathbf{D}$$

上式右端中间的圆括弧恰好就是(5.2.49)式，即 Cottor-Rivlin 导数 $\mathbf{V}_4^H$，因此

$$(\mathbf{D}^*\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{D})^{\cdot}=\mathbf{D}^*\cdot\mathbf{V}_4^H\cdot\mathbf{D} \tag{5.2.63}$$

令 $\mathbf{H}=\underset{\cdot}{\mathbf{t}}$，上式左端的圆括弧就是(4.8.29)式的 $\overset{\ll}{\mathbf{T}}{}^{(-1)}$，因此

$$\dot{\mathbf{T}}^{(-1)}=\mathbf{D}^*\cdot\mathbf{V}_4^{t}\cdot\mathbf{D} \tag{5.2.64}$$

此式说明应力度量 $\overset{\ll}{\mathbf{T}}{}^{(-1)}$ 的物质导数与 Kirchhoff 应力张量 $\underset{\cdot}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}$ 的 Cottor-Rivlin 导数 $\mathbf{V}_4^{t}$ 之间的联系。

§5.3 平衡律的客观性，对标架转换的另一种解释

若一平衡律(或平衡方程)对于标架的转换具有不变性，换句

话说，如果在一个标架中成立，在任意的另一个标架中必也成立，则称此平衡律(或平衡方程)是客观的，这里所指的标架转换就是(5.2.1)与(5.2.3)式的$\{\mathbf{p}, t\}$与$\{\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{t}\}$间的转换关系。

一、平衡律(或平衡方程)的客观性

1. 质量平衡律，即质量守恒律(或连续性方程)

Lagrange 型的连续性方程为(3.7.15)式：

$$\rho \mathscr{J} = \rho_0 \tag{3.7.15}$$

由于密度ρ与体积比$\mathscr{J}$(见(5.2.21)式)均为客观标量，即

$$\tilde{\rho} = \rho, \quad \tilde{\mathscr{J}} = \mathscr{J}$$

因此

$$\tilde{\rho}\tilde{\mathscr{J}} = \rho \mathscr{J} = \rho_0 \tag{5.3.1}$$

所以连续性方程是客观的。

我们也可以研究 Euler 型的连续性方程(3.7.14)式，即

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{3.7.14}$$

由(5.2.9)式，速度$\mathbf{v}$的标架转换关系为：

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{v} + \dot{\mathbf{b}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^{Q}(t)\cdot(\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{b}(t)) \tag{5.2.9}$$

取上式之散度，并利用(5.2.33)式和$\boldsymbol{\Omega}^{Q}$的反对称性(见(5.2.11)式)，得到

$$\begin{aligned}
\widetilde{(\operatorname{div}\mathbf{v})} &= \tilde{\mathbf{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\nabla}} = \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\boldsymbol{\nabla}}) = \operatorname{tr}\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{L}}} \\
&= \operatorname{tr}(\mathbf{Q}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{Q}^* + \boldsymbol{\Omega}^{Q}) = \operatorname{tr}(\overset{\gg}{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{Q}^*\cdot\mathbf{Q}) + \operatorname{tr}\boldsymbol{\Omega}^{Q} \\
&= \operatorname{tr}\overset{\gg}{\mathbf{L}} = \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \operatorname{div}\mathbf{v}
\end{aligned}$$

因此(3.7.14)式导致

$$\dot{\tilde{\rho}} + \tilde{\rho}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}} = 0 \tag{5.3.2}$$

同样也得到连续性方程是客观的这一结论。

2. 动量平衡方程 (Cauchy 第一运动律或 Cauchy 动量方程

(4.3.3)) 与动量矩平衡方程（Cauchy 第二运动律或动量矩方程 (4.3.9)）

假定 Cauchy 第一运动律，即动量方程 (4.3.3) 在某个标架 F 中成立；

$$\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}+\rho\mathbf{f}=\rho\mathbf{a} \tag{5.3.3}$$

由(5.2.30)′式，$\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}$ 为客观矢量场，即

$$\tilde{\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}}\cdot\tilde{\overset{\rightarrow}{\nabla}}=\mathbf{Q}(t)\cdot(\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}) \tag{5.3.4}$$

因设力为客观矢量，

$$\tilde{\mathbf{f}}=\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{f} \tag{5.3.5}$$

加速度的标架转换关系为 (5.2.12) 式，即

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}}=&\ \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{a}+\ddot{\mathbf{b}}(t)+2\boldsymbol{\Omega}(t)\cdot(\tilde{\mathbf{v}}-\dot{\mathbf{b}}(t))\\&+(\dot{\boldsymbol{\Omega}}(t)-\boldsymbol{\Omega}^2(t))\cdot(\tilde{\mathbf{p}}-\mathbf{b}(t))\\\neq&\ \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{a}\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

$\mathbf{Q}(t)\cdot$(5.3.3) 式，并利用 (5.3.4)，(5.3.5) 与 (5.3.6) 式，得

$$\tilde{\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}}\cdot\tilde{\overset{\rightarrow}{\nabla}}+\rho\tilde{\mathbf{f}}=\rho\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{a}\neq\rho\tilde{\mathbf{a}}$$

因此动量平衡律不是客观的。

在理论力学中把动量平衡律(方程)对之成立的标架称为**惯性标架**(或惯性系，或牛顿系)。因此对于非惯性系，不能使用动量平衡律。通常有一种补救办法，即把差异项 $\rho[\tilde{\mathbf{a}}-\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{a}]$ 都加在 $\tilde{\mathbf{f}}$ 上，这就是所谓惯性力。于是，由 (5.3.6) 式有：

$$\begin{aligned}&\tilde{\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}}\cdot\tilde{\overset{\rightarrow}{\nabla}}+\rho[\tilde{\mathbf{f}}+\ddot{\mathbf{b}}(t)+2\boldsymbol{\Omega}(t)\cdot(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{b}}(t))\\&\quad+(\dot{\boldsymbol{\Omega}}(t)-\boldsymbol{\Omega}^2(t))\cdot(\tilde{\mathbf{p}}-\mathbf{b}(t))]\\&=\rho\tilde{\mathbf{a}}\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Cauchy 第二运动律，即动量矩方程，对于非极材料为 (4.3.9) 式，即

$$\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}} = \overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}^{*} \tag{5.3.8}$$

即 $\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}$ 为对称。由(5.2.14)式，$\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}$ 为客观张量，故由上式可得

$$\overset{\rightrightarrows}{\tilde{\mathbf{t}}} = \overset{\rightrightarrows}{\tilde{\mathbf{t}}}^{*} \tag{5.3.9}$$

即 $\overset{\rightrightarrows}{\tilde{\mathbf{t}}}$ 亦为对称。因此动量矩平衡律是客观的。

3. 机械能平衡律

机械能平衡方程为(4.8.5)式，它来自于 Cauchy 动量方程(4.3.3)与速度 $\mathbf{v}$ 的点积，即(4.8.3)式，因此显然是非客观的。

4. 热力学第一定律

微分形式的热力学第一定律(4.8.14)式为

$$\rho\dot{e} = -\mathbf{h}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla} + \rho\sigma + \overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}:\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}} \tag{4.8.14}$$

ρ、e、σ 都是客观标量；$\mathbf{h}$ 为客观矢量，由(5.2.28)式 $\mathbf{h}\cdot\overset{\rightarrow}{\nabla}$ 为客观标量；$\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}$ 与 $\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}}$(见(5.2.34)式)都是客观张量，故 $\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{t}}:\overset{\rightrightarrows}{\mathbf{d}}$ 为客观标量。因此，热力学第一定律是客观的。

5. 热力学第二定律

易证热力学第二定律(4.9.7)或(4.9.9)或(4.9.13)式是客观的。

二、对标架转换的另一种解释

本来，标架转换关系(5.2.1)与(5.2.3)式是从不同的标架 F 与 $\tilde{F}$ 对同一事件的观察结果 $\{\mathbf{p}, t\}$ 与 $\{\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{t}\}$ 之间的关系。但我们也可以对(5.2.1)与(5.2.3)式作另一种解释：即假定标架 F 不变，把(5.2.1)与(5.2.3)式理解为在同一个标架 F 中观察到的两个不同事件 $\{\mathbf{p}, t\}$ 与 $\{\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{t}\}$ 间的关系。(5.2.1)式表示一事件的时间相对另一事件推移了 a，而(5.2.3)式表示一事件的位置相对另一事件作了以 $\mathbf{b}(t)$ 所表示的平移和以 $\mathbf{Q}(t)$ 所表示的旋转

(或旋转加反射)。

例如，描述物体运动的 (2.1.1) 式 $\mathbf{p}=\mathbf{p}(\mathbf{P}, t)$，为了方便我们把右端的函数改记作 χ，自变量 $\mathbf{P}$ 改为质点 X ($\mathbf{P}$ 为点 X 的矢径)，即

$$\mathbf{p}=\chi(X, t) \tag{5.3.10}$$

(5.3.10) 式是在某一标架 F 中观察到的物体运动。在另一个标架 $\tilde{F}$ 中观察到的这同一运动为

$$\tilde{\mathbf{p}}=\tilde{\chi}(X, \tilde{t}) \tag{5.3.11}$$

(5.3.10) 与 (5.3.11) 式是同一个运动在两个不同标架中的表示(不同的观察结果)。利用 (5.2.1) 与 (5.2.3) 式，可得 (5.3.10) 式 χ 与 (5.3.11) 式 $\tilde{\chi}$ 的关系：

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(X, \tilde{t}) &= \mathbf{b}(t)+\mathbf{Q}(t)\cdot\chi(X, t)\\ &= \mathbf{b}(\tilde{t}-a)+\mathbf{Q}(\tilde{t}-a)\cdot\chi(X, \tilde{t}-a)\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

按照以上所述对标架转换的另一种解释，我们可以把 (5.3.11) 式解释为对于标架 F 的另一个运动 $\tilde{\chi}$。由 (5.3.12) 式，这个新的运动 $\tilde{\chi}$ 是老的运动 χ 叠加上一个刚体的平移 $\mathbf{b}(t)$ 与旋转 $\mathbf{Q}(t)$，同时时间还有一个 a 的推移。这样一来，客观量的标架转换关系也应相应作另一个解释：(5.2.5) 式说明当物体的运动由 χ 改为 $\tilde{\chi}$，客观标量 f 不变，(5.2.7) 式说明客观矢量随着物体的旋转而旋转，即和物体作同样的旋转，而 (5.2.13) 式则说明客观张量的前矢量与后矢量均随物体一同旋转①。

§5.4 标架无差异原理 (PMI)

设有一物体 $\mathscr{B}$，本构方程就是说明应力张量 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}}$ 依赖于物体的

① 但要注意，标架转换关系中的 $\mathbf{Q}(t)$ 本来还包括旋转加反射，这里的另一种解释不能反映这一点。

运动的关系:

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\chi}) \tag{5.4.1}$$

式中 $\boldsymbol{\chi}$ 表示物体 $\mathscr{B}$ 的运动,即由 (5.3.10) 式:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\chi}(X, t) \tag{5.4.2}$$

X 表示物体 $\mathscr{B}$ 中的各个质点,$\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 表示物体 $\mathscr{B}$ 内的 Cauchy 应力张量场 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}(X, t)$, $\mathbf{f}$ 表示泛函。

按照前节 (§5.3)中所述对标架转换关系 (5.2.1) 与 (5.2.3) 式的两种不同的解释, 标架无差异原理 (PMI) 也有两种不同的形式。

一、PMI 的第 I 种形式,即

本构方程是客观的,即对于标架转换说来具有不变性。

数学表示形式如下:

设在标架 F 中,本构方程为 (5.4.1) 式。在标架 $\tilde{F}$ 中, 物体的同一运动应表示为 (5.3.11) 与 (5.3.12) 式,即

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{p}} &= \tilde{\chi}(X, \tilde{t}) \\ &= \mathbf{b}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \boldsymbol{\chi}(X, t)\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

则 PMI 包含两个内容,即:

应力张量为客观张量,

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{t}}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \overset{\gg}{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{Q}(t)^* \tag{5.4.4}$$

而且本构方程是客观的,

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{t}}} = \mathbf{f}(\tilde{\boldsymbol{\chi}}) \tag{5.4.5}$$

这里 $\mathbf{f}$ 就是 (5.4.1) 式中的同一个泛函。

结合 (5.4.4) 与 (5.4.5) 两式,得到

$$\mathbf{Q}(t) \cdot \overset{\gg}{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{Q}(t)^* = \mathbf{f}(\tilde{\boldsymbol{\chi}}) \tag{5.4.6}$$

对于任意的 $\mathbf{b}(t)$ 与 $\mathbf{Q}(t)$。

我们称满足本构方程(5.4.1)的一组 $\{\boldsymbol{\chi},\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}\}$ 为一动力过程。而与 $\boldsymbol{\chi},\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}$ 满足关系 (5.4.3) 与 (5.4.4) 式的一组 $\{\tilde{\boldsymbol{\chi}},\tilde{\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}}\}$ 则称为与 $\{\boldsymbol{\chi},\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}\}$ 等价的动力过程,或简称等价过程。显然,$\{\boldsymbol{\chi},\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}\}$ 也是 $\{\tilde{\boldsymbol{\chi}},\tilde{\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}}\}$ 的等价过程。等价过程实际上是同一个物理过程的两个不同的数学描述，即在标架 F 与标架 $\tilde{F}$ 中的数学描述。本构方程为客观的(见 (5.4.5) 式),这就是说,如果一个动力过程满足本构方程,则其等价过程也必满足本构方程。(5.4.6) 式表明：两个等价的动力过程在 t 时刻的 Cauchy 应力张量 $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}$ 与 $\tilde{\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}}$ 只相差一以同一时刻 t 的正交张量 $\mathbf{Q}(t)$ 表示的旋转(见 (5.4.4) 式)，而与 t 时刻以前 $(\tau \leqslant t)$ 标架 F 与 $\tilde{F}$ 的相对运动历史 (即 $\mathbf{b}(\tau)$, $\mathbf{Q}(\tau)$, $\tau < t$) 无关。

我们也可以把运动 $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$ 与 $\boldsymbol{\chi}$ 的关系 (5.4.3) 式看作是同一标架中的两个不同的运动,它们之间相差一刚体运动。这样,我们就得到 PMI 的第 II 种形式。

二、PMI 的第 II 种形式,即

如果物体的两个运动 $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$ 与 $\boldsymbol{\chi}$ 有 (5.4.3) 式的关系，即它们之间相差一刚体运动,则由这两个运动按本构方程 (见(5.4.1) 式)所决定的应力张量 $\tilde{\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}}$ 与 $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}$ 必满足关系

$$\tilde{\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}} = \mathbf{Q}(t)\cdot\overset{\Rightarrow}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{Q}(t)^{*} \tag{5.4.7}$$

这里，我们根本没有涉及到标架转换，因而也就不涉及所谓“客观性”问题。(5.4.7) 式虽然在形式上与 (5.4.4) 式相同，但它

的含义却是两个不同的运动所引起的应力 $\overset{\sim}{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}$ 与 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 间的关系。

比较 PMI 的以上两种形式，可以看出：

1. 由第 I 种形式可以导出第 II 种形式，换言之，第 II 种形式是第 I 种形式的推论。但由第 II 种形式必须加上应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 为客观的假定，才能导出第 I 种形式。

2. 显然，第 II 种形式不涉及到标架转换问题，因此比第 I 种形式更易理解和想象。

3. 在第 I 种形式中，正交张量 $\mathbf{Q}(t)$ 可以是正常的，也可以是非正常的；而第 II 种形式则只当 $\mathbf{Q}(t)$ 为正常的正交张量时才有物理意义。

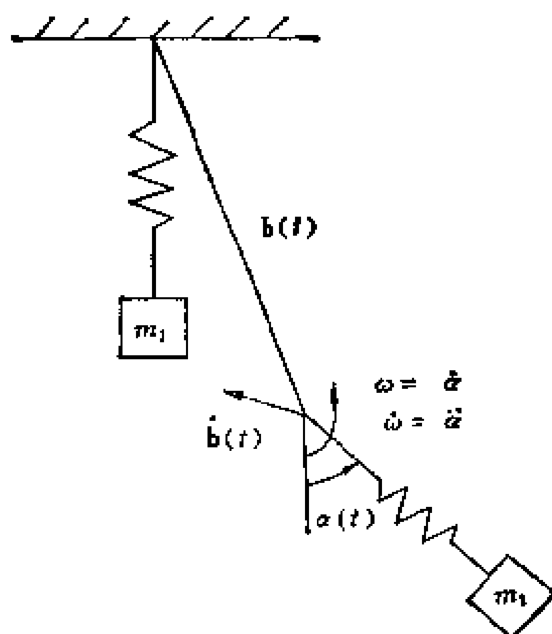


图 5.4

其实，PMI 的第 II 种形式在日常生活中是常遇见的。图 5.4 示一弹簧的两个等价的动力过程，在两个过程中弹簧的伸长相同，互相只差一个刚体运动，即平移 $\mathbf{b}(t)$ 与旋转 $\alpha(t)$。在初等的质点与刚体力学中，总是承认只要弹簧的伸长相等，则弹簧中的拉力值相等，但方向相差 α 角（相当于 (5.4.7) 式）。在物理的直观上，这

是如此地明显，我们甚至都不会意识到我们正在使用着一个标架无差异原理。但是一直到 1955 年这个原理才由 Noll 以精确的数学形式提出。

有时本构方程不是以 Cauchy 应力张量 $\mathbf{t}$ 作为运动历史 $\boldsymbol{\chi}$ 的泛函形式表示，而是以其它应力张量 $\mathbf{S}$（例如 $\overset{\rtimes}{\boldsymbol{\tau}}$、$\overset{\ll}{\mathbf{T}}$ 等）作为其它运动量 $\mathbf{K}$（例如 $\overset{\rtimes}{\mathbf{D}}$、$\overset{\gg}{\mathbf{e}}$、$\overset{\ll}{\mathbf{E}}^{(n)}$、$\overset{\ll}{\mathscr{E}}$ 等）的泛函或函数形式表示：

$$\mathbf{S}=\mathbf{f}(\mathbf{K}) \tag{5.4.8}$$

由以上所述，PMI 原理对 (5.4.8) 式的泛函或函数的要求为

$$\breve{\mathbf{S}}=\mathbf{f}(\breve{\mathbf{K}}) \tag{5.4.9}$$

式中 $\breve{\mathbf{S}}$、$\breve{\mathbf{K}}$ 各为在时刻 t 的标架转动正交变换 $\mathbf{Q}(t)$ 按标架转换关系所得的标架转换量，例如：$\breve{\mathbf{T}}=\mathbf{T}$，$\breve{\boldsymbol{\tau}}(t)=\mathbf{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\tau}(t)$，$\breve{\mathbf{E}}=\mathbf{E}$ 等。

§5.5 Reiner-Rivlin 流体——标架无差异原理（PMI）的一个应用

通常的所谓牛顿流体服从 Navier-Poisson 律：

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}=-p\overset{\gg}{\mathbf{I}}+\lambda(\operatorname{tr}\overset{\gg}{\mathbf{d}})\overset{\gg}{\mathbf{I}}+2\mu\overset{\gg}{\mathbf{d}} \tag{5.5.1}$$

在笛卡儿坐标中的分量形式为

$$t_{ij}=-p\delta_{ij}+\lambda d_{kk}\delta_{ij}+2\mu d_{ij} \tag{5.5.2}$$

式中

$$d_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Stokes (1845) 曾经作过推广上述本构方程的以下假定：

$$t_{ij}=-p\delta_{ij}+f_{ij}(d_{kl}),\quad f_{ij}(0)=0 \tag{5.5.3}$$

但是这个问题的研究一直到 Reiner (1945) 与 Rivlin (1940 以后)的时期才有所进展。

现在我们根据 PMI 来推导 Navier-Poisson 律可能得到推广的形式。我们先假定本构方程具有以下的普遍形式:

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = -p(\rho)\overset{\gg}{\mathbf{I}} + \mathbf{f}(\rho,\ \overset{\gg}{\mathbf{d}},\ \overset{\gg}{\mathbf{w}},\ \mathbf{v}) \tag{5.5.4}$$

式中 $\mathbf{f}$ 为其四个自变量的某一张量函数,它满足

$$\mathbf{f}(\rho,\ \mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{5.5.5}$$

利用 PMI 可以证明张量函数 $\mathbf{f}(\rho,\ \overset{\gg}{\mathbf{d}},\ \overset{\gg}{\mathbf{w}},\ \mathbf{v})$ 必与 $\overset{\gg}{\mathbf{w}}$ 和 $\mathbf{v}$ 无关,而且是 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 的各向同性张量函数。如果没有 PMI 的话,那么前一个结论(即 $\mathbf{f}$ 与 $\overset{\gg}{\mathbf{w}}$ 和 $\mathbf{v}$ 无关)是直观可以接受的,但后一个结论(即 $\mathbf{f}$ 为 $\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 的各向同性张量函数)却只好作为一个假定——粘性流体必为各向同性。但是有了 PMI, 我们则可以证明由 (5.5.4) 式定义的流体必为各向同性的。

证明 由 PMI, 若本构方程 (5.5.4) 在标架 F 中成立,则在标架 $\tilde{F}$ 中必也成立, 即(注意 $\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{I}}} = \overset{\gg}{\mathbf{I}}$)

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{t}}} = -p(\tilde{\rho})\overset{\gg}{\mathbf{I}} + \mathbf{f}(\tilde{\rho},\ \tilde{\overset{\gg}{\mathbf{d}}},\ \tilde{\overset{\gg}{\mathbf{w}}},\ \tilde{\mathbf{v}}) \tag{5.5.6}$$

式中 $\mathbf{f}$ 与 (5.5.4) 式的 $\mathbf{f}$ 是同一张量函数。(5.5.6) 式右端的 $\tilde{\mathbf{v}}$ 用 (5.2.8) 式代入,左端 $\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}$ 表示用 (5.5.4) 代入 (5.4.4) 式的结果,即

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{t}}} = \mathbf{Q}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}\cdot(-p(\rho)\overset{\gg}{\mathbf{I}} + \mathbf{f}(\rho,\ \overset{\gg}{\mathbf{d}},\ \overset{\gg}{\mathbf{w}},\mathbf{v}))\cdot\mathbf{Q}^*$$

因此,(5.5.6) 式成为(利用 (5.2.8), (5.2.34) 与 (5.2.35) 式)

$$\begin{aligned}&\mathbf{Q}\cdot\mathbf{f}(\rho,\overset{\gg}{\mathbf{d}},\ \overset{\gg}{\mathbf{w}},\ \mathbf{v})\cdot\mathbf{Q}^*\\ &= \mathbf{f}(\rho,\ \mathbf{Q}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{Q}^*,\ \mathbf{Q}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{Q}^* + \boldsymbol{\Omega}^Q,\\ &\qquad \mathbf{Q}\cdot\mathbf{v} + \dot{\mathbf{b}} + \dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{p})\end{aligned} \tag{5.5.7}$$

式中由 (5.2.10a) 式,

$$\boldsymbol{\Omega}^Q = \dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{Q}^*$$

由 PMI，(5.5.7) 式对于任意的 $\mathbf{b}(t)$，$\dot{\mathbf{b}}(t)$，$\mathbf{Q}(t)$ 与 $\dot{\mathbf{Q}}(t)$ 均成立。若令 (5.5.7) 式中

$$\mathbf{Q}\equiv\overset{\Rightarrow}{\mathbf{I}},\ \text{故}\ \dot{\mathbf{Q}}=\mathbf{0},\ \Omega^{Q}=\dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{Q}^{*}=\mathbf{0}$$

则 (5.5.7) 式成为

$$\mathbf{f}(\rho,\ \overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}},\ \overset{\Rightarrow}{\mathbf{w}},\ \mathbf{v})=\mathbf{f}(\rho,\ \overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}},\ \overset{\Rightarrow}{\mathbf{w}},\ \mathbf{v}+\dot{\mathbf{b}})\qquad(5.5.8)$$

因 $\dot{\mathbf{b}}$ 为任意矢量，故 (5.5.8) 式说明函数 $\mathbf{f}$ 应与 $\mathbf{v}$ 无关，故可记作 $\mathbf{f}(\rho,\ \overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}},\ \overset{\Rightarrow}{\mathbf{w}})$。

若再令 (5.5.7) 式中①

$$\mathbf{Q}=\overset{\Rightarrow}{\mathbf{I}},\ \Omega^{Q}=\dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{Q}^{*}=\dot{\mathbf{Q}}$$

则 (5.5.7) 式成为

$$\mathbf{f}(\rho,\ \overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}},\ \overset{\Rightarrow}{\mathbf{w}})=\mathbf{f}(\rho,\ \overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}},\ \overset{\Rightarrow}{\mathbf{w}}+\dot{\mathbf{Q}})\qquad(5.5.9)$$

因 $\dot{\mathbf{Q}}$ 为任意张量，故 (5.5.9) 式说明函数 $\mathbf{f}$ 应与 $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{w}}$ 无关，故可记作 $\mathbf{f}(\rho,\overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}})$。于是，(5.5.7) 式可写成

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{f}(\rho,\ \overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}})\cdot\mathbf{Q}^{*}=\mathbf{f}(\rho,\mathbf{Q}\cdot\overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{Q}^{*})\qquad(5.5.10)$$

这说明 $\mathbf{f}(\rho,\ \overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}})$ 为 $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}}$ 的各向同性张量函数。

根据张量分析中的各向同性张量函数表示定理，$\mathbf{f}$ 可表示为

$$\mathbf{f}(\rho,\ \overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}})=\varphi_0\overset{\Rightarrow}{\mathbf{I}}+\varphi_1\overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}}+\varphi_2\overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}}^2\qquad(5.5.11)$$

式中

$$\varphi_i=\varphi_i(\rho,\ \mathscr{J}_1^d,\ \mathscr{J}_2^d,\ \mathscr{J}_3^d),\quad(i=0,1,2)\qquad(5.5.12)$$

$\mathscr{J}_1^d$，$\mathscr{J}_2^d$ 与 $\mathscr{J}_3^d$ 为 $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{d}}$ 的三个主不变量。由 (5.5.5) 式，$\mathbf{f}(\rho,\mathbf{0})=\mathbf{0}$，故

$$\varphi_0(\rho,\ 0,\ 0,\ 0)=0\qquad(5.5.13)$$

---

① 在 t 时刻 $\mathbf{Q}=\overset{\Rightarrow}{\mathbf{I}}$，但 $\mathbf{Q}\not\equiv\overset{\Rightarrow}{\mathbf{I}}$，因此 $\dot{\mathbf{Q}}\neq\mathbf{0}$。

将 (5.5.11) 代入 (5.5.4)式，我们最后得到

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = -p(\rho)\overset{\gg}{\mathbf{I}} + \varphi_0\overset{\gg}{\mathbf{I}} + \varphi_1\overset{\gg}{\mathbf{d}} + \varphi_2\overset{\gg}{\mathbf{d}}^2 \qquad (5.5.14)$$

式中的 $\varphi_i(i = 0, 1, 2)$ 见 (5.5.12) 式。上面我们根据 PMI 由一般普遍形式的 (5.5.4) 式导出 (5.5.14) 式。

符合本构方程 (5.5.14) 的流体称为 Reiner-Rivlin 流体。牛顿流体是它的线性的特例，即当

$$\varphi_0 = \lambda \mathscr{J}_1^d = \lambda \operatorname{tr}\overset{\gg}{\mathbf{d}}, \quad \varphi_1 = 2\mu, \quad \varphi_2 = 0 \qquad (5.5.15)$$

此时 (5.5.14) 式就简化为 Navier-Poisson 律 (5.5.1) 式。

§5.6 一般本构方程

本构方程 (5.4.1) $\overset{\gg}{\mathbf{t}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\chi})$ 其实只是一个抽象的表示形式，它根本没有指出 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 与 $\boldsymbol{\chi}$ 依赖于什么变量，以及 $\mathbf{f}$ 是什么样的函数。

在本节中我们将引进一些进一步的假定(或称公理，或公设)，在纯力学的范围内① 讨论一般本构方程。在某些情况下(见§8.2)，可以不考虑温度 θ (或熵 η) 的影响，例如我们只限于研究均温过程（或等熵过程）或者当物体在实际过程中的力学行为对温度 θ (或熵 η) 的变化不敏感的情况。B. D. Coleman② 利用 PMI 研究了具有记忆的材料的热力学，多引入了温度与温度梯度作为本构方程的变量，但处理的方法与此处是相同的。

W. Noll 引进了两个公设。

一、应力确定性原理

在给定时刻在给定质点处的应力(张量)依赖于整个物体全部

① 即暂时不考虑热学变量。

② B. D. Coleman, Thermodynamics of materials with memory, Arch Rational Mech. Anal., 17, 1964, 1—46.

过去的运动历史。

这也就是说，为了决定某一时刻的应力，无需知道物体将来的运动。

应力确定性原理的数学表示形式为

$$\overset{))}{\mathbf{t}}(X, t) = \mathbf{f}(X, t, \chi(\underset{\mathscr{B}}{\bar{X}}, t - \overset{\infty}{\underset{0}{s}})) \qquad (5.6.1)$$

这里 $\mathbf{f}$ 表示泛函，它依赖于整个物体 $\mathscr{B}$ 在 t 时刻以前 ($0 \leqslant s < \infty$，以 $\overset{\infty}{\underset{0}{s}}$ 表示)的运动，$\underset{\mathscr{B}}{\bar{X}}$ 表示物体 $\mathscr{B}$ 中全部的质点。

在 (5.6.1) 式右端泛函 $\mathbf{f}$ 中除了依赖于物体的运动 χ 以外，还显含 X (质点)与 t (时间)。$\mathbf{f}$ 显含 X，这表示物体可能为非均质的(各点处的力学性质不同)；$\mathbf{f}$ 还显含 t，这表示物体的性质可能是随时间而变化的(例如在养护过程中的混凝土)。当然，如果我们对材料有更充分的了解，则显含的时间变量 t 可以用其他热学量或化学量的历史来代替。$\mathbf{f}$ 中显含的 X 与 t 并不影响我们下面的讨论，故为了简单起见，略去不写。

二、局部作用原理

在给定质点处的应力并不取决于整个物体的运动，而只取决于该质点附近的任意无限小邻域的运动。

数学表示形式为

$$\overset{))}{\mathbf{t}}(X, t) = \mathbf{f}(\chi(\underset{\mathscr{N}(X)}{\bar{X}}, t - \overset{\infty}{\underset{0}{s}})) \qquad (5.6.2)$$

$$\mathscr{N}(x): |\chi(\bar{X}, t - s) - \chi(X, t - s)| < \varepsilon \qquad (5.6.3)$$

式中 $\mathscr{N}(X)$ 表示 X 质点附近的无限小邻域 (5.6.3) 式，ε 为任给的小数，$\underset{\mathscr{N}(X)}{\bar{X}}$ 表示在 X 的无限小邻域中的质点。(5.6.2) 式是根据上述两个公设(即应力确定性原理和局部作用原理)的结果。

在 § 4.2 中我们曾假定无相互体力作用，即物体内部材料的相互作用只有接触力或拽力。这就是说，质点与质点之间的作用只

有近距力而无远距力。上述的局部作用原理正是和这一假定相一致的。

三、一般本构方程

上述两个公设是标架无差异原理（PMI）的补充。现在我们利用 PMI 使本构方程 (5.6.2) 进一步具体化。根据 PMI，假定 $\{\boldsymbol{\chi}, \overset{\gg}{\mathbf{t}}\}$ 为某一动力过程，也就是说，它满足本构方程 (5.6.2)，则等价过程 $\{\tilde{\boldsymbol{\chi}}, \tilde{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}\}$ 亦必满足同一本构方程，即

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}(X, t) = \mathbf{f}(\tilde{\boldsymbol{\chi}}(\underset{\mathcal{N}(X)}{\overline{X}}, t - \overset{\infty}{\underset{0}{s}})) \tag{5.6.4}$$

式中，由 (5.4.3) 与 (5.4.4) 式，

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}}(\underset{\mathcal{N}(X)}{\overline{X}}, t - \overset{\infty}{\underset{0}{s}}) = \mathbf{b}(t - \overset{\infty}{\underset{0}{s}}) + \mathbf{Q}(t - \overset{\infty}{\underset{0}{s}}) \cdot \boldsymbol{\chi}(\underset{\mathcal{N}(X)}{\overline{X}}, t - \overset{\infty}{\underset{0}{s}}) \tag{5.6.5}$$

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{t}}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \overset{\gg}{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{Q}(t)^{*} \tag{5.6.6}$$

这里 $\mathbf{b}(t-s)$ 与 $\mathbf{Q}(t-s)$ 为任意函数，下面可以由我们任取。

取

$$\mathbf{Q}(t - s) = \mathbf{I} \tag{5.6.7a}$$

$$\mathbf{b}(t - s) = -\boldsymbol{\chi}(X, t - s) \tag{5.6.7b}$$

(5.6.7a) 式表示标架 $\tilde{F}$ 相对于 F 无旋转，(5.6.7b) 式表示标架 $\tilde{F}$ 的原点被平移到所研究的质点 X 来，即由 (5.6.5) 式，在质点 X 处恒有

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}}(X, t - s) = \mathbf{0}$$

将 (5.6.7b) 式代入 (5.6.5) 式，得到

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\chi}}(\overline{X}, t - s) &= -\boldsymbol{\chi}(X, t - s) + \boldsymbol{\chi}(\overline{X}, t - s)\\ &= \Delta\boldsymbol{\chi}(\overline{X}, X, t - s)\end{aligned} \tag{5.6.8}$$

式中 $\Delta\boldsymbol{\chi}(\overline{X}, X, t-s)$ 表示在时刻 $t-s$ 从 X 到 $\overline{X}$ 的线元（矢量）。

将 (5.6.8) 代入 (5.6.4) 式，得到

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(X, t) = \mathbf{f}(\Delta\boldsymbol{\chi}(\underset{\mathscr{N}(X)}{\overline{X}}, X, t - \overset{\infty}{\underset{0}{s}})) \tag{5.6.9}$$

(5.6.9) 式是根据本节的两个公设与 § 5.2 的 PMI 所导出的结果，称为一般本构方程。它表明在质点 X 处的应力 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 只取决于在 X 的无限小邻域中线元 $\Delta\boldsymbol{\chi}$ 的变化历史。由此可见，本构方程与物体的平移无关，因为线元 $\Delta\boldsymbol{\chi}$ 与物体的平移无关。

再对本构方程 (5.6.9) 应用 PMI，即等价过程也应满足同一本构方程，故

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}(X, t) = \mathbf{f}(\Delta\tilde{\boldsymbol{\chi}}(\underset{\mathscr{N}(X)}{\overline{X}}, X, t - \overset{\infty}{\underset{0}{s}})) \tag{5.6.10}$$

式中，由 (5.6.5) 与 (5.6.6)

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\chi}}(\underset{\mathscr{N}(X)}{\overline{X}}, X, t - s) = \mathbf{Q}(t - s) \cdot \Delta\boldsymbol{\chi}(\underset{\mathscr{N}(X)}{\overline{X}}, X, t - s) \tag{5.6.11}$$

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{t}}} = \mathbf{Q}(t) \cdot \overset{\gg}{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{Q}(t)^* \tag{5.6.6}$$

(5.6.10) 式表明：按照 §5.4 中 PMI 的第 II 种形式，把质点 X 的邻域 $\mathscr{N}(X)$ 原来的运动 $\Delta\boldsymbol{\chi}$ 叠加上一个任意旋转历史 $\mathbf{Q}(t - s)$，在 t 时刻的 Cauchy 应力张量 $\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}$ 等于原来的 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 按当时（即 t 时刻）的 $\mathbf{Q}(t)$ 加以旋转①的结果。利用 (5.6.6)，(5.6.9) 与 (5.6.11) 式，(5.6.10) 式可写作

$$\mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{f}(\Delta\boldsymbol{\chi}(\underset{\mathscr{N}(X)}{\overline{X}}, X, t - \overset{\infty}{\underset{0}{s}})) \cdot \mathbf{Q}(t)^*$$

$$= \mathbf{f}(\mathbf{Q}(t - \overset{\infty}{\underset{0}{s}}) \cdot \Delta\boldsymbol{\chi}(\underset{\mathscr{N}(X)}{\overline{X}}, X, t - \overset{\infty}{\underset{0}{s}})) \tag{5.6.12}$$

(5.6.12)式就是 PMI 对一般本构方程 (5.6.9) 的要求，简称不变性要求（即对标架转换说来，具有不变性）。反之，容易证明，如果不

① 按 $\mathbf{Q}(t)$ 加以旋转，意思就是前矢量与后矢量都按 $\mathbf{Q}(t)$ 旋转，见 (5.6.6) 式。

变性要求 (5.6.12) 式得到满足，那么一般本构方程 (5.6.9) 必满足 PMI。

在一般本构方程 (5.6.9) 中，泛函 $\mathbf{f}$ 称为材料的反应泛函。$\mathbf{f}$ 还可能显含 X，这时则称 $\mathbf{f}$ 为在质点 X 处的材料反应泛函。泛函 $\mathbf{f}$ 的形式取决于材料。在以下的几章中我们将研究各种非线性材料。

最后指出，本章中关于客观性的概念是 C. Truesdell 和 W. Noll 等人所发展的。在连续介质力学中 R. Hill 和他的学生们做了许多重要的贡献，但他们对客观量却有不同的定义。按照他们的定义，只有象 Green 变形张量 $\overset{((}{\mathbf{C}}$、第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{((}{\mathbf{T}}$ 这样的不受标架刚性运动影响的量，即 Lagrange 型张量(见 §5.2，四)才称为客观张量。前面讲述过的采用主轴表示法得到的一些结果都是 Hill 学派的重要贡献。

第六章　简 单 材 料

§6.1　简单材料，n 阶材料

一、简单材料的定义

在一般本构方程(5.6.9)中用线元微分 $d\boldsymbol{\chi}(\bar{X}, X, t-s)$ 来代替线元 $\Delta\boldsymbol{\chi}(\bar{X}, X, t-s)$，并利用(2.3.11)式的线元变换公式

$$d\mathbf{p} \doteq \overset{)(}{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{P} \tag{2.3.10}$$

即

$$d\boldsymbol{\chi}(\bar{X}, X, t-s) = \mathbf{D}(X, t-s) \cdot d\mathbf{P} \tag{6.1.1}$$

式中 $d\mathbf{P}$ 为在参考构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中从质点 X 到其邻域中另一点 $\bar{X}$ 的线元微分(矢量)；$\mathbf{D}(X, t-s)$ 为在 X 点处的变形梯度历史，它只依赖于 X，而与邻域 $\mathscr{N}(X)$ 无关；$d\mathbf{P}$ 只取决于构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 中的邻域 $\mathscr{N}(X)$，而与运动 $\boldsymbol{\chi}$ 无关。因此一般本构方程(5.6.9)成为①

$$\overset{))}{\mathbf{t}}(X, t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{f}}}(\mathbf{D}(X, t-s)) \tag{6.1.2}$$

服从本构方程(6.1.2)的材料称为简单材料。

二、标架无差异原理(PMI)对简单材料的要求

为了简单起见，以后我们将本构方程(6.1.2)中表示质点的自变量 X 不写，即把(6.1.2)式简写为

$$\overset{))}{\mathbf{t}}(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{f}}}(\mathbf{D}(t-s)) \tag{6.1.2$'$}$$

① 以后我们把表示 $0 \leqslant s \leqslant \infty$ 的记号记在泛函 $\mathbf{f}$ 处。

根据 PMI，如果上式满足，则必有

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}(\tilde{\mathbf{D}}(t-s)) \tag{6.1.3}$$

式中由 (5.2.14) 或 (5.6.6) 式有

$$\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \overset{\gg}{\mathbf{t}}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)^*$$

而由 (5.2.15) 式

$$\tilde{\mathbf{D}}(t-s) = \mathbf{Q}(t-s) \cdot \mathbf{D}(t-s)$$

因此 (6.1.3) 式成为

$$\mathbf{Q}(t) \cdot \overset{\infty}{\underset{t=0}{\mathbf{f}}}(\mathbf{D}(t-s)) \cdot \mathbf{Q}(t)^* = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}(\mathbf{Q}(t-s) \cdot \mathbf{D}(t-s)) \tag{6.1.4}$$

对于任意的变形梯度历史 $\mathbf{D}(t-s)$ 与任意的正交张量历史 $\mathbf{Q}(t-s)$。(6.1.4) 式就是 PMI 对本构方程 (6.1.2)′的要求，简称为不变性要求。此式亦可从 (5.6.12) 式利用本节的 (6.1.1) 式而得到。

三、反应泛函 f 依赖于参考构形 $\mathscr{R}(t_0)$ 的选择

由本构方程 (5.4.1) 式，Cauchy 应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 取决于物体的运动 $\boldsymbol{\chi}$。但是对于给定的运动 $\boldsymbol{\chi}$，变形梯度 $\mathbf{D}$ 与选择什么样的参考构形 $\mathscr{R}$ 有关，因此(6.1.2)′式中的反应泛函 $\mathbf{f}$ 亦与参考构形 $\mathscr{R}$ 的选择有关，可记作 $\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}$。假定对于物体的某一运动 $\boldsymbol{\chi}$，如果选 $\mathscr{R}$ 为参考构形，本构方程 (6.1.2)′ 的形式为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s)) \tag{6.1.5}$$

式中 $\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}$ 表示相对参考构形 $\mathscr{R}$ 的变形梯度历史：

$$\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s) = \mathbf{D}_{(\mathscr{R})} = \mathbf{p}\nabla_{(\mathscr{R})}$$

同样，对于物体的同一运动 $\boldsymbol{\chi}$，如果选另一个参考构形 $\tilde{\mathscr{R}}$，则本构方程 (6.1.2)′ 的形式将为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\tilde{\mathscr{R}})}(\mathbf{D}_{(\tilde{\mathscr{R}})}(t-s)) \tag{6.1.6}$$

式中 $\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}$ 为相对于参考构形 $\mathscr{R}$ 的变形梯度历史：

$$\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s)=\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}=\mathbf{p}\nabla_{(\mathscr{R})}$$

但是我们所研究的是同一个物体运动，因此 (6.1.5) 与 (6.1.6) 式左端 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)$ 也是同一个 Cauchy 应力张量。

由 (2.12.7) 式，相对于不同的参考构形 $\mathscr{R}$ 与 $\bar{\mathscr{R}}$ 的变形梯度 $\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s)$ 与 $\mathbf{D}_{(\bar{\mathscr{R}})}(t-s)$ 之间有以下关系：

$$\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s)=\mathbf{D}_{(\bar{\mathscr{R}})}(t-s)\cdot\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}}) \qquad (6.1.7a)$$

式中 $\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}})$ 表示构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 相对于参考构形 $\mathscr{R}$ 的变形梯度，故

$$\mathbf{D}_{(\bar{\mathscr{R}})}(t-s)=\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}}) \qquad (6.1.7b)$$

将 (6.1.7b) 代入 (6.1.6) 式，并比较 (6.1.5) 与 (6.1.6) 两式，得到

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s))=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\bar{\mathscr{R}})}(\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}})) \quad (6.1.8)$$

对于任意的 $\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s)$。(6.1.8) 式说明对于一定的材料，反应泛函 $\mathbf{f}$ 应如何地依赖于参考构形 $\mathscr{R}$ 的选择。

每一物质质点 X 可以有一个局部参考构形 $\mathscr{R}$。 但是我们以后假定材料是均质的简单材料，因此存在一个总体的参考构形 $\mathscr{R}$，而 $\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}$ 与质点 X 无关。

对于简单材料，根据均质试件的均匀变形试验结果所定的本构方程 (6.1.2)′，可以用于非均匀变形的情况，因为在 (6.1.2)′ 式中在 X 点处 Cauchy 应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 只与该点的变形梯度历史 $\mathbf{D}(t-\overset{\infty}{\underset{0}{s}})$ 有关，而不论 X 点邻域的变形是否均匀①。

四、n 阶材料

对于简单材料，我们曾假定可以用 (6.1.1) 式的线元微分 dX

---

① 非均匀变形情况下，二阶变形梯度 $\mathbf{D}^{(2)}(t-s)$ 不等于零，但是简单材料的本构方程 (6.1.2)′ 与二阶及更高阶变形梯度无关。

来代替线元(矢量) $\Delta\boldsymbol{X}$. 但实际上 $d\boldsymbol{X}$ 只是 $\Delta\boldsymbol{X}$ 的 Taylor 展开式的首项。如果我们取展开式的前 n 项，则代替 (6.1.2)′ 式的应有

$$\mathbf{t}(t) = \mathop{\mathbf{f}}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{D}(t-s), \mathbf{D}^{(2)}(t-s), \cdots, \mathbf{D}^{(n)}(t-s)) \qquad (6.1.9)$$

式中 $\mathbf{D}^{(2)}(t-s)$ 为二阶变形梯度，……，$\mathbf{D}^{(n)}(t-s)$ 为 n 阶变形梯度。服从本构方程 (6.1.9) 的材料称为 n 阶材料。

简单材料是 $n=1$ 的特例，即一阶材料。但尽管如此，简单材料仍然是很广泛的一类材料。

下面对 n 阶变形梯度作一些简要的说明。

我们来研究自变量为矢量 $\mathbf{v}$ 的函数 $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$$

考虑数量 h 的函数 $\mathbf{F}(\mathbf{v}+h\mathbf{u})$. 在张量分析中，曾定义

$$\mathbf{F}'(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \frac{d}{dh}\mathbf{F}(\mathbf{v}+h\mathbf{u})|_{h=0}$$

为 $\mathbf{F}$ 对 $\mathbf{v}$ 以 $\mathbf{u}$ 为增量的有限微分。与此类似，可以定义

$$\mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \frac{d^2}{dh^2}\mathbf{F}(\mathbf{v}+h\mathbf{u})|_{h=0}$$

为 $\mathbf{F}$ 对 $\mathbf{v}$ 以 $\mathbf{u}$ 为增量的二次有限微分；……及

$$\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \frac{d^n}{dh^n}\mathbf{F}(\mathbf{v}+h\mathbf{u})|_{h=0}$$

为 $\mathbf{F}$ 对 $\mathbf{v}$ 以 $\mathbf{u}$ 为增量的 n 次有限微分。

可以证明 $\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ 为 $\mathbf{u}$ 的 n 次齐次函数，即

$$\mathbf{F}'(\mathbf{v}, a\mathbf{u}) = a\mathbf{F}'(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$
$$\mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{v}, a\mathbf{u}) = a^2\mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$
$$\cdots\cdots$$
$$\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{v}, a\mathbf{u}) = a^n\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

因此

$$\mathbf{F}'(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{F}'(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{v},\mathbf{u})=\mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{v}):\mathbf{uu}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{v},\mathbf{u})=\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{v})*\overbrace{\mathbf{uu}\cdots\mathbf{u}}^{n\text{并矢}}$$

式中 $*$ 表示 n 重点积，$\mathbf{F}'(\mathbf{v})$ 为二阶张量，……，$\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{v})$ 为 $n+1$ 阶张量且对于其后 n 个指标为对称。看作标量 h 的函数，$\mathbf{F}(\mathbf{v}+h\mathbf{u})$ 的 Tayloy 展开式为

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{v}+h\mathbf{u})&=\mathbf{F}(\mathbf{v})+h\mathbf{F}'(\mathbf{v},\mathbf{u})+\frac{h^2}{2!}\mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{v},\mathbf{u})+\cdots\\&\quad+\frac{h^n}{n!}\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{v},\mathbf{u})+o(h^n)\\&=\mathbf{F}(\mathbf{v})+h\mathbf{F}'(\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}+\frac{h^2}{2!}\mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{v}):\mathbf{uu}\\&\quad+\cdots+\frac{h^n}{n!}\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{v})*\mathbf{uu}\cdots\mathbf{u}+o(h^n)\end{aligned}$$

当 $\mathbf{v}$ 为矢径 $\mathbf{P}$，而 $\mathbf{w}$ 为矢径 $\mathbf{p}$ 时，$\mathbf{F}'(\mathbf{v})$ 就是变形梯度 $\mathbf{D}$，$\cdots$，$\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{v})$ 就是 n 阶变形梯度 $\mathbf{D}^{(n)}$：

$$\mathbf{F}'(\mathbf{v})=\mathbf{p}\nabla=\mathbf{D}=x^i_{,A}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A$$

$$\mathbf{F}''(\mathbf{v})=\mathbf{D}^{(2)}=x^i_{,AB}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^A\mathbf{G}^B$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{v})=\mathbf{D}^{(n)}=x^i_{,A_1A_2\cdots A_n}\mathbf{g}_i\mathbf{G}^{A_1}\mathbf{G}^{A_2}\cdots\mathbf{G}^{A_n}$$

本章以后只讨论简单材料。

§6.2 本构方程的化简

一、本构方程的一种化简形式

由不变性要求（6.1.4）式可以导出本构方程的化简形式。在本节中假定取某构形 $\mathscr{R}$ 为参考构形，并将表示参考构形 $\mathscr{R}$ 的下

标“($\mathscr{R}$)”不写。

由 (2.8.5) 即变形梯度 $\mathbf{D}$ 的极分解式，

$$\mathbf{D}(t-s)=\overset{-1/2}{\mathbf{c}}(t-s)\cdot\mathbf{R}(t-s)=\mathbf{V}(t-s)\cdot\mathbf{R}(t-s) \tag{6.2.1a}$$

$$=\mathbf{R}(t-s)\cdot\overset{1/2}{\mathbf{C}}(t-s)=\mathbf{R}(t-s)\cdot\mathbf{U}(t-s) \tag{6.2.1b}$$

式中按 (2.6.16) 式左伸长张量 $\overset{-1/2}{\mathbf{c}}$ 又记作 $\mathbf{V}$，按 (2.6.15) 式右伸长张量 $\overset{1/2}{\mathbf{C}}$ 又记作 $\mathbf{U}$。$\mathbf{U}(t-s)$ 是参考构形 $\mathscr{R}$ 中的张量，而 $\mathbf{V}(t-s)$ 则是构形 $_*(t-s)$ 中的张量。

因为不变性要求即 (6.1.4) 式对任意正交张量历史 $\mathbf{Q}(t-s)$ 都成立，故可取

$$\mathbf{Q}(t-s)=\mathbf{R}(t-s)^* \tag{6.2.2}$$

则 (6.1.4) 式成为

$$\mathbf{R}(t)^*\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}(\mathbf{D}(t-s))\cdot\mathbf{R}(t)=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}(\mathbf{R}(t-s)^*\cdot\mathbf{D}(t-s))$$

利用 (6.2.1b) 式，上式可写作

$$\overset{))}{\mathbf{t}}(t)=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}(\mathbf{D}(t-s))=\mathbf{R}(t)\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}(\mathbf{U}(t-s))\cdot\mathbf{R}(t)^* \tag{6.2.3}$$

式中 $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}(\mathbf{U}(t-s))$ 乃是参考构形 $\mathscr{R}$ 中的张量。我们称 (6.2.3) 为本构方程的第一种化简形式。(6.2.3) 式右端只出现 $\mathbf{R}(t)$，而不出现全部的转动历史 $\mathbf{R}(t-\overset{\infty}{\underset{0}{s}})$，这说明在 t 时刻的 Cauchy 应力张量依赖于全部的变形历史 $\mathbf{U}(t-\overset{\infty}{\underset{0}{s}})$ 与 t 时刻的转动 $\mathbf{R}(t)$。

(6.2.3) 式是不变性要求 (6.1.4) 式的推论，换句话说，凡是满足不变性要求 (6.1.4) 式的泛函 (6.1.2)′式一定可以表示成(6.2.3)式的形式。反之，可以验证，(6.2.3) 式形式的本构方程必满足不

变性要求 (6.1.4) 式(即满足 PMI)。 如果本构方程为 (6.2.3) 式，则在 (6.2.3) 式成立的同时，还有

$$\overset{\gg}{\tilde{\mathbf{t}}}(t)=\mathop{\mathbf{f}}_{s=0}^{\infty}(\tilde{\mathbf{D}}(t-s))=\tilde{\mathbf{R}}(t)\cdot\mathop{\mathbf{f}}_{s=0}^{\infty}(\tilde{\mathbf{U}}(t-s))\cdot\tilde{\mathbf{R}}(t)^{*}$$

利用 (5.2.15) 与 (5.2.19) 式，上式中右面的等式可写成

$$\mathop{\mathbf{f}}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{Q}(t-s)\cdot\mathbf{D}(t-s))$$

$$=\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{R}(t)\cdot\mathop{\mathbf{f}}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{U}(t-s))\cdot\mathbf{R}(t)^{*}\cdot\mathbf{Q}(t)^{*}$$

再利用 (6.2.3) 式，上式可化成

$$\mathop{\mathbf{f}}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{Q}(t-s)\cdot\mathbf{D}(t-s))=\mathbf{Q}(t)\cdot\mathop{\mathbf{f}}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{D}(t-s))\cdot\mathbf{Q}(t)^{*}$$

这就是不变性要求 (6.1.4) 式。

本构方程 (6.2.3) 式表明：在时刻 t 质点 X 处的 Cauchy 应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)$ 乃是由参考构形 $\mathscr{R}$ 经过纯变形历史 $\mathbf{U}(t-\overset{\infty}{\underset{0}{s}})$ 所导致的应力经过旋转 $\mathbf{R}(t)$ 而成。所以 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)$ 只受 t 时刻的旋转 $\mathbf{R}(t)$ 的影响，而不受 t 时刻以前的旋转历史 $\mathbf{R}(t-s)$，$s>0$ 的影响。

二、本构方程的其它化简形式

虽然张量 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{U}$ 有明显的几何意义，但是计算它们比较困难，而 $\mathbf{C}=\mathbf{U}^{2}=\mathbf{D}^{*}\cdot\mathbf{D}$ 的计算则比较容易。因此最好把本构方程 (6.2.3) 改写成直接通过 $\mathbf{C}$ 与 $\mathbf{D}$ 表示的形式。

由 (6.2.1b) 式，有

$$\mathbf{R}(t)=\mathbf{D}(t)\cdot\overset{-1}{\mathbf{U}}(t),\quad \mathbf{R}(t)^{*}=\overset{-1}{\mathbf{U}}(t)\cdot\mathbf{D}(t)^{*}$$

代入 (6.2.3) 式得到

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)=\mathbf{D}(t)\cdot\overset{-1}{\mathbf{U}}(t)\cdot\mathop{\mathbf{f}}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{U}(t-s))\cdot\overset{-1}{\mathbf{U}}(t)\cdot\mathbf{D}(t)^{*}$$

上式可写作

$$\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}(t)=\mathbf{D}(t)\cdot\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{h}}}(\mathbf{C}(t-s))\cdot\mathbf{D}(t)^{*}\tag{6.2.4}$$

式中

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{h}}}(\mathbf{C}(t-s))=\overset{-1/2}{\mathbf{C}}(t)\cdot\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{f}}}(\overset{1/2}{\mathbf{C}}(t-s))\cdot\overset{-1/2}{\mathbf{C}}(t)$$

我们称 (6.2.4) 式为本构方程的第二种化简形式。此式中的 $\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{h}}}(\mathbf{C}(t-s))$ 为参考构形 $\mathscr{R}$ 中的张量。

若记

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{t}}(t)=\overset{()}{\mathbf{D}}(t)^{*}\cdot\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}(t)\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}(t)\tag{6.2.5}$$

则 (6.2.4) 又可记作

$$\begin{aligned}\overset{\langle\langle}{\mathbf{t}}(t)&=\mathbf{D}(t)^{*}\cdot\mathbf{D}(t)\cdot\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{h}}}(\mathbf{C}(t-s))\cdot\mathbf{D}(t)^{*}\cdot\mathbf{D}(t)\\&=\mathbf{C}(t)\cdot\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{h}}}(\mathbf{C}(t-s))\cdot\mathbf{C}(t)\end{aligned}$$

即

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{t}}(t)=\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{g}}}(\mathbf{C}(t-s))\tag{6.2.6}$$

(6.2.6) 式称为本构方程的第三种化简形式。

(6.2.5) 式的 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{t}}$ 称为对流应力张量①，它是参考构形 $\mathscr{R}$ 中的张量。将 (4.5.5) 式 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}$ 代入 (6.2.5) 式，并利用 (2.3.20) 式即

$$\overset{()}{\mathbf{D}}^{*}\cdot\hat{\mathbf{g}}^{A}=\mathbf{G}^{A},\quad\hat{\mathbf{g}}^{B}\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}=\mathbf{G}^{B}$$

可得 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{t}}$ 的分解式：

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{t}}(t)=\overset{()}{\mathbf{D}}(t)^{*}\cdot(\hat{t}_{AB}(t)\hat{\mathbf{g}}^{A}\hat{\mathbf{g}}^{B})\cdot\overset{)(}{\mathbf{D}}(t)=\hat{t}_{AB}(t)\mathbf{G}^{A}\mathbf{G}^{B}\tag{6.2.7}$$

---

①对流应力张量就是前面(4.8.29)式应力度量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}^{(-1)}$ 的 $\mathscr{J}^{-1}$ 倍。

$$t_{AB} = t_{ij} x^i_{,A} x^j_{,B}$$

注意由 (4.5.3) 与 (4.5.8) 式，可知

$$\frac{1}{\mathscr{J}} \overset{((}{\mathbf{T}} = t^{AB} \mathbf{G}_A \mathbf{G}_B$$

勿把此式与 (6.2.7) 相混淆，它们不是同一个张量，因为 t^{AB} 的指标升降是通过度量张量 g_{AB}，而基矢量 $\mathbf{G}_A$ 的指标升降是通过度量张量 G_{AB} 实现的。

三、以当前构形 $\mathscr{R}(t)$ 作为参考构形

在本节以上的讨论中，假定选择某一定的构形 $\mathscr{R}$ 作为参考构形。在连续介质力学中，尤其是在流体力学中常常采用当前时刻 t 的构形为参考构形(见 §2.12)。把 t 看作固定时刻，而以 τ 表示变化着的时间；$\tau < t$ 意味着过去，而 $\tau > t$ 则意味着将来。由 (2.12.7) 式，变形梯度之间存在以下的关系:

$$\mathbf{D}(\tau) = \mathbf{D}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{D}(t) \qquad (2.12.7)$$

这里及下文中用下标“(t)”表示以当前时刻 t 的构形 $\mathscr{R}(t)$ 作为参考构形的量，而无下标者仍指以一定的构形 $\mathscr{R}$ 作为参考构形的量。利用极分解公式 (6.2.1)，上式成为

$$\mathbf{D}(\tau) = \mathbf{R}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{U}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{U}(t)$$

式中 $\mathbf{U}_{(t)}(\tau)$ 是构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的张量，表示从构形 $\mathscr{R}(t)$ 变换到构形 $\mathscr{R}(t)$ 的右伸长张量。此式又可写作

$$\mathbf{D}(\tau) = \mathbf{R}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{R}(t) \cdot \mathscr{U}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{U}(t) \qquad (6.2.8)$$

式中

$$\mathscr{U}_{(t)}(\tau) = \mathbf{R}(t)^* \cdot \mathbf{U}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{R}(t) \qquad (6.2.9)$$

表示把构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的张量 $\mathbf{U}_{(t)}(\tau)$ 从构形 $\mathscr{R}(t)$ 旋转到构形 $\mathscr{R}$ 中的结果。由于 $\mathbf{R}(t)$ 表示从构形 $\mathscr{R}$ 变换到构形 $\mathscr{R}(t)$ 的旋转，反之 $\mathbf{R}(t)$ 的逆，即 $\mathbf{R}(t)^*$ 表示从构形 $\mathscr{R}(t)$ 变换到构形 $\mathscr{R}$ 的旋转。因此 (6.2.9) 式右端的 “$\mathbf{R}(t)^* \cdot$” 与 “$\cdot \mathbf{R}(t)$” 各表示把 $\mathbf{U}_{(t)}(\tau)$

的前矢量与后矢量从构形 $\mathscr{N}(t)$ 旋转到构形 $\mathscr{R}$ 中来。

现在来研究不变性要求 (6.1.4) 式。先研究该式右端泛函 $\mathbf{f}$ 中的自变量 $\mathbf{Q}(t-s)\cdot\mathbf{D}(t-s)$。令 (6.2.8) 式中 $\tau=t-s$ 可得 $\mathbf{D}(t-s)$，于是

$$\mathbf{Q}(t-s)\cdot\mathbf{D}(t-s)=\mathbf{Q}(t-s)\cdot\mathbf{R}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{R}(t)\cdot\mathscr{U}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{U}(t) \tag{6.2.10}$$

由于在不变性要求 (6.1.4) 式中的 $\mathbf{Q}(t-s)$ 可以是任意的正交张量历史，我们可以选择

$$\mathbf{Q}(t-s)=[\mathbf{R}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{R}(t)]^{-1}=\mathbf{R}(t)^*\cdot\mathbf{R}_{(t)}(t-s)^* \tag{6.2.11}$$

于是 (6.2.10) 式成为

$$\mathbf{Q}(t-s)\cdot\mathbf{D}(t-s)=\mathscr{U}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{U}(t) \tag{6.2.10$'$}$$

(6.2.11) 式中令 $s=0$，并注意 $\mathbf{R}_{(t)}(t)=\mathbf{I}$，得

$$\mathbf{Q}(t)=\mathbf{R}(t)^*\cdot\mathbf{I}=\mathbf{R}(t)^* \tag{6.2.11$'$}$$

由于 (6.2.10)′ 与 (6.2.11)′ 两式，不变性要求 (6.1.4) 式成为

$$\mathbf{R}(t)^*\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}(\mathbf{D}(t-s))\cdot\mathbf{R}(t)=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}(\mathscr{U}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{U}(t))$$

因此本构方程 (6.1.2)′ 成为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}(\mathbf{D}(t-s))=\mathbf{R}(t)\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}(\mathscr{U}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{U}(t))\cdot\mathbf{R}(t)^* \tag{6.2.12}$$

式中 $\mathscr{U}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{U}(t)$ 为构形 $\mathscr{R}$ 中的张量，因而泛函 $\mathbf{f}$ 也是构形$\mathscr{R}$中的张量。(6.2.12) 式是简单材料以当前时刻 t 的构形 $\mathscr{N}(t)$ 为参考构形的本构方程形式，称之为本构方程的第四种化简形式。

我们也可以把 (6.2.12) 式中泛函 $\mathbf{f}$ 的自变量拆成两个，即 $\mathscr{U}_{(t)}(t-s)$ 与 $\mathbf{U}(t)$，把 (6.2.12) 式写成

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)=\mathbf{R}(t)\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{k}}}(\mathscr{U}_{(t)}(t-s),\mathbf{U}(t))\cdot\mathbf{R}(t)^* \tag{6.2.13}$$

我们称此式为本构方程的第五种化简形式。可以证明 (6.2.13) 式满足 PMI。由 (5.2.19) 的第二式

$$\tilde{\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}} = \overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}$$

又可证明①

$$\tilde{\mathscr{U}}_{(t)}(\tau) = \mathscr{U}_{(t)}(\tau)$$

因此仿照关于 (6.2.3) 式满足不变性要求 (6.1.4) 式的证明，可证 (6.2.13) 式满足 PMI，即

$$\begin{aligned}\tilde{\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}}(t) &= \tilde{\mathbf{R}}(t) \cdot \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{k}}} (\tilde{\mathscr{U}}_{(t)}(t-s), \tilde{\mathbf{U}}(t)) \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t)^* \\ &= \mathbf{Q}(t) \cdot \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)^*\end{aligned}$$

(6.2.13) 式又可改写作

$$\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{l}}} (\mathscr{C}_{(t)}(t-s), \mathbf{C}(t)) \cdot \mathbf{R}(t)^* \quad (6.2.14)$$

式中

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}(t) = [\mathbf{U}(t)]^2 \\ &\mathscr{C}_{(t)}(t-s) = [\mathscr{U}_{(t)}(t-s)]^2 \\ =\ &\mathbf{R}(t)^* \cdot \mathbf{C}_{(t)}(t-s) \cdot \mathbf{R}(t) \\ &\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{l}}} (\mathscr{C}_{(t)}(t-s), \mathbf{C}(t)) \\ =\ &\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{k}}} (\overset{1/2}{\mathscr{C}}_{(t)}(t-s), \overset{1/2}{\mathbf{C}}(t))\end{aligned} \quad (6.2.15)$$

在 (6.2.15) 式的推导中曾用到 (6.2.9) 式。(6.2.14) 式称为本构方程的第六种化简形式。

---

① 建议读者自己证明。先利用 (2.12.7) 与 (5.2.15) 式可证

$$\tilde{\mathbf{D}}_{(t)}(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \cdot \mathbf{D}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{Q}(t)^*$$

因此

$$\tilde{\mathbf{C}}_{(t)}(\tau) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{C}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{Q}(t)^*, \quad \tilde{\mathbf{U}}_{(t)}(\tau) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{U}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{Q}(t)^*$$

再利用 (6.2.9) 与 (5.2.19) 的第一式，可得:

$$\tilde{\mathscr{U}}_{(t)}(\tau) = \tilde{\mathbf{R}}^*_{(t)} \cdot \tilde{\mathbf{U}}_{(t)}(\tau) \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t)^* \cdot \mathbf{U}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{R}(t) = \mathscr{U}_{(t)}(\tau)$$

我们也可以用应变张量来代替变形张量，例如令

$$\mathscr{E}_{(t)}(\tau) = \frac{1}{2}[\mathscr{C}_{(t)}(\tau) - \mathbf{I}] \qquad (6.2.16)$$

它就是把在构形 $\mathscr{R}(t)$ 中的 Green 相对应变张量

$$\mathbf{E}_{(t)}(\tau) = \frac{1}{2}[\mathbf{C}_{(t)}(\tau) - \mathbf{I}]$$

从构形 $\mathscr{R}(t)$ 旋转到构形 $\mathscr{R}$ 中的结果，故类似于 (6.2.15) 式，有

$$\mathscr{E}_{(t)}(\tau) = \mathbf{R}(t)^* \cdot \mathbf{E}_{(t)}(\tau) \cdot \mathbf{R}(t) \qquad (6.2.16)'$$

若在 (6.2.14) 式中取泛函 $\mathbf{I}$ 的形式为两项之和：

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{I}}}(\mathscr{C}_{(t)}(t-s), \mathbf{C}(t))$$

$$= \mathbf{r}(\mathbf{C}(t)) + \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{q}}}(\mathscr{E}_{(t)}(t-s), \mathbf{C}(t)) \qquad (6.2.17)$$

式中右端第一项 $\mathbf{r}$ 是 $\mathbf{C}(t)$ 的函数，它只取决于当前时刻 t 的Green变形张量，而第二项则为依赖于当前的 $\mathbf{C}(t)$ 与应变历史 $\mathscr{E}_{(t)}(t-s)$ 的泛函 $\mathbf{q}$. 将 (6.2.17) 式代人 (6.2.14)，得到

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t) = \mathbf{R}(t) \cdot [\mathbf{r}(\mathbf{C}(t)) + \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{q}}}(\mathscr{E}_{(t)}(t-s), \mathbf{C}(t))] \cdot \mathbf{R}(t)^* \qquad (6.2.18)$$

我们称 (6.2.18) 式为本构方程的第七种化简形式。如果物体长期处于静止，即 $\mathscr{E}_{(t)}(t-s) = 0$，则可假定 $\mathbf{q}$ 为零，即

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{q}}}(\mathscr{E}_{(t)}(t-s), \mathbf{C}(t)) = 0 \text{ 当 } \mathscr{E}_{(t)}(t-s) = 0 \qquad (6.2.19)$$

在长期静止的情况下，利用 (6.2.19) 式，本构方程 (6.2.18) 成为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}^* \qquad (6.2.20)$$

以后在第七章中我们将定义弹性材料为在任何时刻 t 都服从类似于 (6.2.20) 的本构方程的材料：

$$\begin{aligned}\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t) &= \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{C}(t)) \cdot \mathbf{R}(t)^* \\ &= \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{U}(t)) \cdot \mathbf{R}(t)^*\end{aligned} \qquad (6.2.21)$$

四、以 Piola-Kirchhoff 应力张量表示的本构方程

在前几部分中，本构方程都是用 Cauchy 应力张量 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}$ 来表示的。利用(4.4.2)与(4.5.12)式，即

$$\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}(t)=\mathscr{J}(t)\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}(t)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}(t)^{*}\qquad\left(\mathscr{J}(t)=\frac{\rho_0}{\rho(t)}\right)\tag{6.2.22}$$

与

$$\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}(t)=\overset{-1}{\mathbf{D}}(t)\cdot\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}(t)\tag{6.2.23}$$

我们可以得到相应的以第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}$ 表示的和以第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}$ 表示的本构方程。

1. 以第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}$ 表示的本构方程

由(6.2.1b)式并利用 $\mathbf{U}$ 的对称性，可得

$$\mathbf{R}(t)^{*}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}(t)^{*}=\overset{-1}{\mathbf{D}}(t)\cdot\mathbf{R}(t)=\overset{-1}{\mathbf{U}}(t)\tag{6.2.24}$$

利用(6.2.24)式，可将前面得到的以 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}$ 表示的各种本构方程化简形式(6.2.3)，(6.2.4)，(6.2.12)—(6.2.14)，(6.2.18)改写成以 $\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}$ 表示，结果如下：

$$\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}(t)=\frac{\rho_0}{\rho(t)}\mathbf{R}(t)\cdot\underset{s=0}{\overset{\infty}{\bar{\mathbf{f}}}}(\mathbf{U}(t-s))\tag{6.2.3$'$}$$

式中

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{\bar{\mathbf{f}}}}(\mathbf{U}(t-s))=\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{f}}}(\mathbf{U}(t-s))\cdot\overset{-1}{\mathbf{U}}(t)$$

$$\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}(t)=\frac{\rho_0}{\rho(t)}\mathbf{D}(t)\cdot\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{h}}}(\mathbf{C}(t-s))\tag{6.2.4$'$}$$

$$\overset{\rangle\langle}{\boldsymbol{\tau}}(t)=\frac{\rho_0}{\rho(t)}\mathbf{R}(t)\cdot\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{f}}}(\mathscr{U}_{(t)}(t-s)$$

$$\cdot \mathbf{U}(t)) \cdot \overset{-1}{\mathbf{U}}(t) \tag{6.2.12}$$

$$\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}(t) = \frac{\rho_0}{\rho(t)} \mathbf{R}(t) \cdot \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\mathbf{k}}}} (\mathscr{U}_{(t)}(t-s), \mathbf{U}(t)) \tag{6.2.13)'$$

式中

$$\begin{aligned} &\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\mathbf{k}}}} (\mathscr{U}_{(t)}(t-s), \mathbf{U}(t)) \\ &\quad = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{k}}} (\mathscr{U}_{(t)}(t-s), \mathbf{U}(t)) \cdot \overset{-1}{\mathbf{U}}(t) \end{aligned}$$

$$\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}(t) = \frac{\rho_0}{\rho(t)} \mathbf{R}(t) \cdot \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\mathbf{l}}}} (\mathscr{C}_{(t)}(t-s), \mathbf{C}(t)) \tag{6.2.14)'$$

式中

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\mathbf{l}}}} (\mathscr{C}_{(t)}(t-s), \mathbf{C}(t)) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{l}}} (\mathscr{C}_{(t)}(t-s), \mathbf{C}(t)) \cdot \overset{-1/2}{\mathbf{C}}(t)$$

及

$$\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}(t) = \frac{\rho_0}{\rho(t)} \mathbf{R}(t) \cdot [\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{C}(t)) + \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\mathbf{q}}}} (\mathscr{C}_{(t)}(t-s), \mathbf{C}(t))] \tag{6.2.19)'$$

式中

$$\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{C}(t)) = \mathbf{r}(\mathbf{C}(t)) \cdot \overset{-1/2}{\mathbf{C}}(t)$$

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\mathbf{q}}}} (\mathscr{C}_{(t)}(t-s), \mathbf{C}(t)) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{q}}} (\mathscr{C}_{(t)}(t-s), \mathbf{C}(t)) \cdot \overset{-1/2}{\mathbf{C}}(t)$$

2. 以第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{((}{\mathbf{T}}$ 表示的本构方程

将以上以 $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$ 表示的本构方程代入(6.2.23)式,并利用(6.2.24)式,相应地有

$$\overset{((}{\mathbf{T}}(t) = \frac{\rho_0}{\rho(t)} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathbf{f}}}}} (\mathbf{U}(t-s)) \tag{6.2.3)''$$

式中

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathbf{f}}}}} (\mathbf{U}(t-s)) = \overset{-1}{\mathbf{U}}(t) \cdot \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}} (\mathbf{U}(t-s)) \cdot \overset{-1}{\mathbf{U}}(t)$$

$$\overset{\prime\prime}{\mathbf{T}}(t)=\frac{\rho_0}{\rho(t)}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{h}}}(\mathbf{C}(t-s)) \tag{6.2.4$''$}$$

$$\overset{\prime\prime}{\mathbf{T}}(t)=\frac{\rho_0}{\rho(t)}\overset{-1}{\mathbf{U}}(t)\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}(\mathscr{U}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{U}(t))\cdot\overset{-1}{\mathbf{U}}(t) \tag{6.2.12$''$}$$

$$\overset{\prime\prime}{\mathbf{T}}(t)=\frac{\rho_0}{\rho(t)}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathbf{k}}}}}(\mathscr{U}_{(t)}(t-s),\mathbf{U}(t)) \tag{6.2.13$''$}$$

式中

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathbf{k}}}}}(\mathscr{U}_{(t)}(t-s),\mathbf{U}(t))$$
$$=\overset{-1}{\mathbf{U}}(t)\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{k}}}(\mathscr{U}_{(t)}(t-s),\mathbf{U}(t))\cdot\overset{-1}{\mathbf{U}}(t)$$

$$\overset{\prime\prime}{\mathbf{T}}(t)=\frac{\rho_0}{\rho(t)}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathbf{l}}}}}(\mathscr{C}_{(t)}(t-s),\mathbf{C}(t)) \tag{6.2.14$''$}$$

式中

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathbf{l}}}}}(\mathscr{C}_{(t)}(t-s),\mathbf{C}(t))$$
$$=\overset{-1/2}{\mathbf{C}}(t)\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{l}}}(\mathscr{C}_{(t)}(t-s),\mathbf{C}(t))\cdot\mathbf{C}(t)$$

及

$$\overset{\prime\prime}{\mathbf{T}}(t)=\frac{\rho_0}{\rho(t)}[\bar{\bar{\mathbf{r}}}(\mathbf{C}(t))+\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathbf{q}}}}}(\mathscr{E}(t-s),\mathbf{C}(t))] \tag{6.2.19$''$}$$

式中

$$\bar{\bar{\mathbf{r}}}(\mathbf{C}(t))=\overset{-1/2}{\mathbf{C}}(t)\cdot\mathbf{r}(\mathbf{C}(t))\cdot\overset{-1/2}{\mathbf{C}}(t)$$

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathbf{q}}}}}(\mathscr{E}(t-s),\mathbf{C}(t))$$
$$=\overset{-1/2}{\mathbf{C}}(t)\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{q}}}(\mathscr{E}(t-s),\mathbf{C}(t))\cdot\overset{-1/2}{\mathbf{C}}(t)$$

§6.3 内部约束

某些物体的运动

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\chi}(X, t) \tag{6.3.1}$$

服从某些限制，例如材料的不可压缩性就是一个例子。对于物体运动的限制，称为内部约束或内部约束条件。简单材料内部约束常常具有以下的形式

$$\alpha(\mathbf{D}) = 0 \tag{6.3.2}$$

式中 $\alpha(\mathbf{D})$ 为变形梯度 $\mathbf{D}$ 的标量函数。(6.3.2) 式属于材料本构方程的一部分。根据标架无差异原理 (PMI)，如果 (6.3.2) 式满足，那么把 $\mathbf{D}$ 改为 (5.2.15) 式的 $\bar{\mathbf{D}}$，它仍然满足，即

$$\alpha(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}) = 0 \tag{6.3.3}$$

对于任意的 $\mathbf{Q}$，取 $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^*$，则因 $\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{D} = \mathbf{U}$，(6.3.3) 式成为

$$\alpha(\mathbf{U}) = 0 \tag{6.3.4}$$

因此 PMI 要求内部约束 (6.3.2) 式必取 (6.3.4) 式的形式，即 α 只依赖于 $\mathbf{U}$ (当然，$\mathbf{U}$ 仍然取决于 $\mathbf{D}$)。可以验证 (6.3.4) 式满足 PMI，利用 (5.2.19) 第二式 $\mathbf{U} = \mathbf{U}$ 这是显然的。(6.3.4) 式也可写作

$$\lambda(\mathbf{C}) = 0 \tag{6.3.5}$$

式中

$$\lambda(\mathbf{C}) = \alpha(\mathbf{C}^{1/2})$$

例 1 内部约束条件

$$\mathbf{U} - \mathbf{I} = 0 \quad 或 \quad \mathbf{C} - \mathbf{I} = 0 \tag{6.3.6}$$

表示物体是不可变形的刚体。刚体中的应力是静(动)不定的。如果想要确定应力，就不可略去变形。

例 2 设内部约束条件为

$$\det\mathbf{U} - 1 = 0 \quad 或 \quad \det\mathbf{C} - 1 = 0 \tag{6.3.7}$$

也可写作

$$|\det \mathbf{D}| = 1$$

(6.3.7) 式表示材料为不可压缩的。不可压缩材料的本构方程应为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t) = -p(t)\overset{\gg}{\mathbf{I}} + \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{f}}}(\mathbf{D}(t-s)) \qquad (6.3.8)$$

式中右端第一项是比可压缩材料本构方程 (6.1.2)′ 多出的项。(6.3.8) 式右端第一项 $p(t)$ 可以加减一个常数，而第二项 $\mathbf{f}$ 则可加减一球形张量。故不失去广泛性，可以规定 $\mathbf{f}$ 为偏斜张量，即

$$\operatorname{tr} \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{f}}}(\mathbf{D}(t-s)) = 0 \qquad (6.3.9)$$

因此 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 的第一主不变量为

$$\mathscr{I}_1^t = \operatorname{tr}\overset{\gg}{\mathbf{t}} = -3p, \quad 故 \quad p = -\frac{1}{3}\mathscr{I}_1^t \qquad (6.3.10)$$

$p(t)$ 只由变形历史是不能确定的，必须借助于 Cauchy 运动律与物体表面的法向拽力的边界条件才能确定。

§ 6.4 材料的对称性、各向同性

在上面几节中，根据标架无差异原理 (PMI)、应力确定性原理和局部作用原理，对于简单材料(即一阶材料)讨论了物体(或材料)的本构方程形式。我们并未涉及到具体的材料。一般说来，材料不是各向同性的。

各向同性只是材料对称性的一个特例。因此我们的讨论必须从材料对称性的一般理论开始。

目前有两种关于材料对称性的理论，其中一种是 R. S. Rivlin 及其合作者所发展的。以弹性材料为例，他们是根据应变能函数的独立自变量来区分材料的对称性。例如各向同性弹性材料的

应变能依赖于 Green 变形张量 **C** 的三个主不变量 $\mathscr{J}_1^c$、$\mathscr{J}_2^c$ 与 $\mathscr{J}_3^c$。当坐标转换时，这三个主不变量值不变。但对于以笛卡儿坐标的 X_{III} 轴为对称轴的横观各向同性材料，应变能函数则依赖于 $\mathscr{J}_1^c$, $\mathscr{J}_2^c$, $\mathscr{J}_3^c$ 以及 C_{33}, $(C_{13})^2+(C_{23})^2$。这种处理方法可以推广到简单材料。另外一种理论是 W. Noll 及其合作者所发展的理论。本节将主要介绍后一种理论。

一、材料对称群（material symmetry group），或称各向同性群（isotropy group）

材料对称群是与本构方程形式对参考构形 $\mathscr{R}$ 的依赖关系密切相关的概念。

1. 本构方程的形式随参考构形 $\mathscr{R}$ 的选择而改变

由 (6.1.5) 与 (6.1.6) 式，简单材料本构方程中的反应泛函 **f** 依赖于参考构形 $\mathscr{R}$ 的选择。对于不同的参考构形 $\mathscr{R}$ 与 $\bar{\mathscr{R}}$，同一个材料的反应泛函 $\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}$ 与 $\mathbf{f}_{(\bar{\mathscr{R}})}$ 是不同的。其原因有二：

1）如果从构形 $\mathscr{R}$ 变换到另一构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 的变形梯度 $\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}})$ 为正交张量，例如从 $\mathscr{R}$ 到 $\bar{\mathscr{R}}$ 的变换是一个刚性旋转，那么本构方程的形式不同(即 $\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}$ 与 $\mathbf{f}_{(\bar{\mathscr{R}})}$ 不同)是因为材料在不同的方向具有不同的性质。

2）如果从构形 $\mathscr{R}$ 变换到另一构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 的变形梯度 $\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}})$ 不是正交张量，这表示从 $\mathscr{R}$ 到 $\bar{\mathscr{R}}$ 的变换是经过变形的(或变形加上刚性旋转)。例如对于固体来说，$\mathscr{R}$ 是自然状态，而 $\bar{\mathscr{R}}$ 则非自然状态，本构方程的形式 $\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}$ 与 $\mathbf{f}_{(\bar{\mathscr{R}})}$ 一般是不同的。又例如图 6.1 所示的盛于容器中的可压缩流体，在图 6.1(a) 的构形 $\mathscr{R}$ 中 $abcd$ 部分的流体，在图 6.1(b) 的构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 中变形成 $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$ 的形状。假定以 $\mathscr{R}$ 为参考构形的本构方程是 $p=g_{(\mathscr{R})}(\rho)$，而以 $\bar{\mathscr{R}}$ 为参考构形的本构方程是 $\bar{p}=g_{(\bar{\mathscr{R}})}(\rho)$。那么，即使是同一个密度 ρ 值，对应的压力值 p 与 $\bar{p}$ 一般说来也是不相同的。

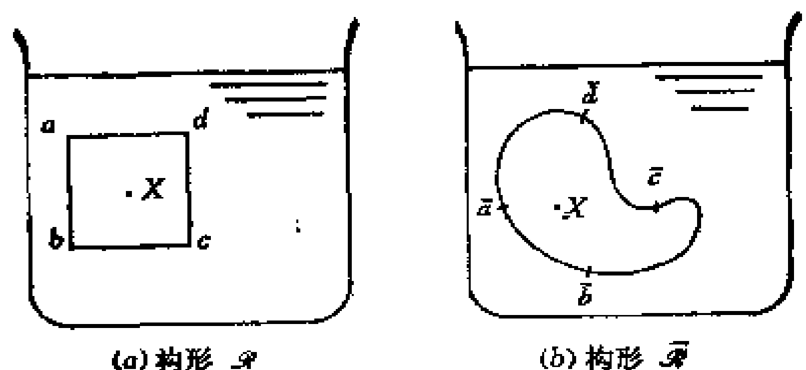


图 6.1

虽然对于不同的参考构形 $\mathscr{R}$ 与 $\bar{\mathscr{R}}$，反应泛函 $\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}$ 与 $\mathbf{f}_{(\bar{\mathscr{R}})}$ 是不同的，但它们之间必须要满足 (6.1.8) 式的关系，即

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s))=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\bar{\mathscr{R}})}(\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}}))\quad(6.1.8)$$

对于任意的两个构形 $\mathscr{R}$ 与 $\bar{\mathscr{R}}$ 及任意的变形梯度历史 $\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s)$。(6.1.8) 式两端的泛函 $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}$ 与 $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\bar{\mathscr{R}})}$ 不同，自变量 $\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s)$ 与 $\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}})$ 也不同，但它们给出的是同一物体的同一运动 $\boldsymbol{\chi}$ 所产生的应力 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)$，因此两端的结果是相同的。

例 设木材为弹性材料，顺纹杨氏模量为 $E_{\parallel}$，横纹杨氏模量为 $E_{\perp}$，顺纹与横纹的泊桑比均为零，且不能承受顺、横纹方向的剪应力(即剪切模量为零)。为简单起见只考虑二维受力的小应变大位移情况。

因设木材为弹性材料，故由 (6.2.21) 式，上述本构方程中依赖于变形梯度历史 $\mathbf{D}(t-s)$ 的泛函 $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}$ 一律改成依赖于当前时刻的变形梯度 $\mathbf{D}(t)$ 的函数 $\mathbf{f}$。设取参考构形 $\mathscr{R}$ 如图 6.2(a)，即木纹方向平行于 X_{II} 轴；另取参考构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 如图6.2(b)，它是图6.2(a)的构形绕 A 点逆时针旋转 90° 的结果。若以图 6.2(a) 的构形 $\mathscr{R}$ 为参考构形，由 (6.2.3) 或 (6.2.21) 式，本构方程为

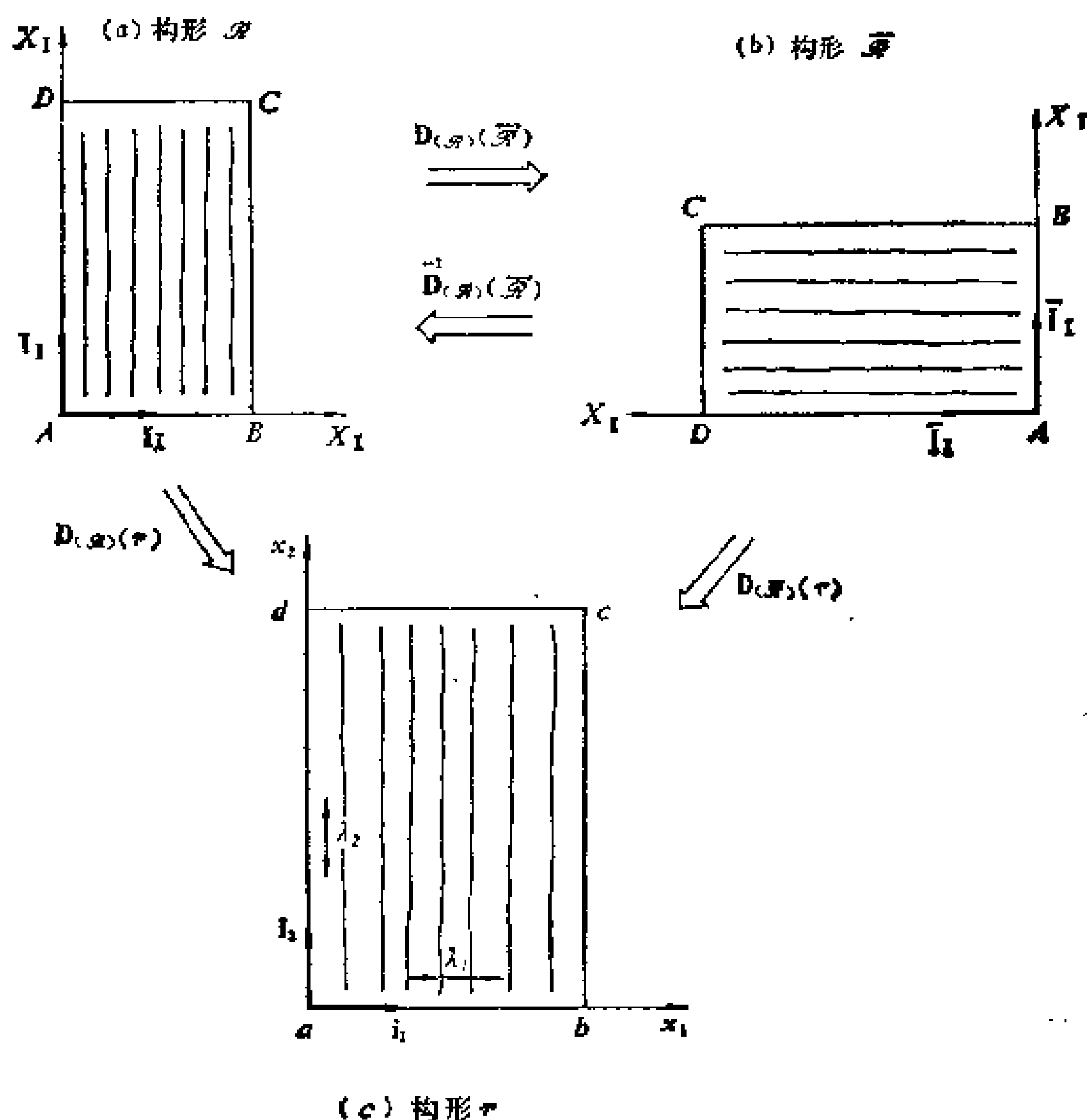


图 6.2

$$\overset{))}{\mathbf{t}} = \overset{)(}{\mathbf{R}}_{(\mathscr{R})} \cdot \overset{((}{\mathbf{f}}_{(\mathscr{R})}(\overset{((}{\mathbf{U}}_{(\mathscr{R})}) \cdot \overset{()}{\mathbf{R}}^{*}{}_{(\mathscr{R})} \tag{a}$$

式中

$$\overset{((}{\mathbf{U}}_{(\mathscr{R})} = (\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}_{(\mathscr{R})} \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})})^{1/2}, \quad \overset{)(}{\mathbf{R}}_{(\mathscr{R})} = \overset{)(}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})} \cdot (\overset{()}{\mathbf{D}}{}^{*}_{(\mathscr{R})} \cdot \overset{)(}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})})^{-1/2} \tag{b}$$

$$\overset{((}{\mathbf{f}}_{(\mathscr{R})}(\overset{((}{\mathbf{U}}_{(\mathscr{R})}) = \overset{((}{\mathbf{K}}_{(\mathscr{R})} \cdot (\overset{((}{\mathbf{U}}_{(\mathscr{R})} - \overset{((}{\mathbf{I}}) \tag{c}$$

$$\overset{((}{\mathbf{K}}_{(\mathscr{R})} = E_{\perp}\mathbf{I}_I\mathbf{I}_I + E_{\parallel}\mathbf{I}_{II}\mathbf{I}_{II} \tag{d}$$

故 (a) 式可写作

$$
\begin{aligned}
\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}} &= \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{f}}_{(\mathscr{R})}(\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})}) \\
&= \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})} \cdot (\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}{}^{*}_{(\mathscr{R})} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})})^{-1/2} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{K}}_{(\mathscr{R})} \cdot [(\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}{}^{*}_{(\mathscr{R})} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})})^{1/2} \\
&\quad - \overset{\langle\langle}{\mathbf{I}}] \cdot (\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}{}^{*}_{(\mathscr{R})} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})})^{-1/2} \cdot \overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}{}^{*}_{(\mathscr{R})}
\end{aligned}
\tag{a}'
$$

若以图 6.2(b)的构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 为参考构形,其中 X_{I}, X_{II} 为 Lagrange 随体坐标,则本构方程为

$$
\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}} = \overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}_{(\bar{\mathscr{R}})} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{f}}_{(\bar{\mathscr{R}})}(\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}_{(\bar{\mathscr{R}})}) \cdot \overset{\langle\rangle}{\mathbf{R}}{}^{*}_{(\bar{\mathscr{R}})} \tag{e}
$$

式中

$$
\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}_{(\bar{\mathscr{R}})} = (\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}{}^{*}_{(\bar{\mathscr{R}})} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}_{(\bar{\mathscr{R}})})^{1/2}, \quad \overset{\rangle\langle}{\mathbf{R}}_{(\bar{\mathscr{R}})} = \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}_{(\bar{\mathscr{R}})} \cdot (\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}{}^{*}_{(\bar{\mathscr{R}})} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}_{(\bar{\mathscr{R}})})^{-1/2} \tag{f}
$$

$$
\overset{\langle\langle}{\mathbf{f}}_{(\bar{\mathscr{R}})}(\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}_{(\bar{\mathscr{R}})}) = \overset{\langle\langle}{\mathbf{K}}_{(\bar{\mathscr{R}})} \cdot (\overset{\langle\langle}{\mathbf{U}}_{(\bar{\mathscr{R}})} - \overset{\langle\langle}{\mathbf{I}}) \tag{g}
$$

$$
\overset{\langle\langle}{\mathbf{K}}_{(\bar{\mathscr{R}})} = E_{\perp}\bar{\mathbf{i}}_{\mathrm{I}}\bar{\mathbf{i}}_{\mathrm{I}} + E_{/\!/}\bar{\mathbf{i}}_{\mathrm{II}}\bar{\mathbf{i}}_{\mathrm{II}} = E_{\perp}\mathbf{i}_{\mathrm{II}}\mathbf{i}_{\mathrm{II}} + E_{/\!/}\mathbf{i}_{\mathrm{I}}\mathbf{i}_{\mathrm{I}} \tag{h}
$$

故 (e) 式可写作

$$
\begin{aligned}
\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}} &= \overset{\rangle\rangle}{\mathbf{f}}_{(\bar{\mathscr{R}})}(\overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}_{(\bar{\mathscr{R}})}) \\
&= \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}_{(\bar{\mathscr{R}})} \cdot (\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}{}^{*}_{(\bar{\mathscr{R}})} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}_{(\bar{\mathscr{R}})})^{-1/2} \cdot \overset{\langle\langle}{\mathbf{K}}_{(\bar{\mathscr{R}})} \cdot [(\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}{}^{*}_{(\bar{\mathscr{R}})} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}_{(\bar{\mathscr{R}})})^{1/2} \\
&\quad - \overset{\langle\langle}{\mathbf{I}}] \cdot (\overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}{}^{*}_{(\bar{\mathscr{R}})} \cdot \overset{\rangle\langle}{\mathbf{D}}_{(\bar{\mathscr{R}})})^{-1/2} \cdot \overset{\langle\rangle}{\mathbf{D}}{}^{*}_{(\bar{\mathscr{R}})}
\end{aligned}
\tag{e}'
$$

比较在不同的参考构形 $\mathscr{R}$ 与 $\bar{\mathscr{R}}$ 中的本构方程 $(a)'$ 与 $(e)'$ 式,可知它们的形式不同之处仅在于弹性张量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{K}}_{(\mathscr{R})}$ 与 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{K}}_{(\bar{\mathscr{R}})}$ 之不同。如果 $E_{\perp} \neq E_{/\!/}$,则 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{K}}_{(\mathscr{R})} \neq \overset{\langle\langle}{\mathbf{K}}_{(\bar{\mathscr{R}})}$,因而本构方程 $(a)'$ 与 $(e)'$ 的形式是不同的。

但是根据对于不同参考构形的不同的本构方程 (a) 与 (e) 式计算出来的应力张量 $\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}}$ 却是相同的。例如,设变形后的构形 κ 如图 6.2(c) 所示,沿顺纹方向的主伸长为 λ_2,横纹方向的主伸长为 λ_1,则由 (a) 至 (d) 式,可计算得:

$$\overset{)(}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})} = \lambda_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{I}_{\mathrm{I}} + \lambda_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{I}_{\mathrm{II}} \tag{i}$$

$$\overset{((}{\mathbf{U}}_{(\mathscr{R})} = \lambda_1 \mathbf{I}_{\mathrm{I}} \mathbf{I}_{\mathrm{I}} + \lambda_2 \mathbf{I}_{\mathrm{II}} \mathbf{I}_{\mathrm{II}} \tag{j}$$

$$\overset{)(}{\mathbf{R}}_{(\mathscr{R})} = \overset{)(}{\mathbf{I}} = \mathbf{i}_1 \mathbf{I}_{\mathrm{I}} + \mathbf{i}_2 \mathbf{I}_{\mathrm{II}} \tag{k}$$

$$\overset{))}{\mathbf{t}} = E_{\perp}(\lambda_1 - 1)\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + E_{/\!/}(\lambda_2 - 1)\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 \tag{l}$$

类似地，由 (e) 至 (h) 式，可计算得：

$$\overset{)(}{\mathbf{D}}_{(\bar{\mathscr{R}})} = \lambda_1 \mathbf{i}_1 \bar{\mathbf{I}}_{\mathrm{I}} + \lambda_2 \mathbf{i}_2 \bar{\mathbf{I}}_{\mathrm{II}} = \lambda_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{I}_{\mathrm{II}} - \lambda_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{I}_{\mathrm{I}} \tag{m}$$

$$\overset{((}{\mathbf{U}}_{(\bar{\mathscr{R}})} = \lambda_1 \bar{\mathbf{I}}_{\mathrm{I}} \bar{\mathbf{I}}_{\mathrm{I}} + \lambda_2 \bar{\mathbf{I}}_{\mathrm{II}} \bar{\mathbf{I}}_{\mathrm{II}} = \lambda_1 \mathbf{I}_{\mathrm{II}} \mathbf{I}_{\mathrm{II}} + \lambda_2 \mathbf{I}_{\mathrm{I}} \mathbf{I}_{\mathrm{I}} \tag{n}$$

$$\overset{)(}{\mathbf{R}}_{(\bar{\mathscr{R}})} = \mathbf{i}_1 \bar{\mathbf{I}}_{\mathrm{I}} + \mathbf{i}_2 \bar{\mathbf{I}}_{\mathrm{II}} = \mathbf{i}_1 \mathbf{I}_{\mathrm{II}} - \mathbf{i}_2 \mathbf{I}_{\mathrm{I}} \tag{o}$$

$$\overset{))}{\mathbf{t}} = E_{\perp}(\lambda_1 - 1)\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + E_{/\!/}(\lambda_2 - 1)\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 \tag{p}$$

两个参考构形 $\mathscr{R}$ 与 $\bar{\mathscr{R}}$ 之间的变形梯度为正交张量：

$$\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}}) = \bar{\mathbf{I}}_{\mathrm{I}} \mathbf{I}_{\mathrm{I}} + \bar{\mathbf{I}}_{\mathrm{II}} \mathbf{I}_{\mathrm{II}} = \mathbf{I}_{\mathrm{II}} \mathbf{I}_{\mathrm{I}} - \mathbf{I}_{\mathrm{I}} \mathbf{I}_{\mathrm{II}}$$

$$\overset{-1}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}}) = \mathbf{D}_{(\bar{\mathscr{R}})}(\mathscr{R}) = \mathbf{I}_{\mathrm{I}} \bar{\mathbf{I}}_{\mathrm{I}} + \mathbf{I}_{\mathrm{II}} \bar{\mathbf{I}}_{\mathrm{II}} = \mathbf{I}_{\mathrm{I}} \mathbf{I}_{\mathrm{II}} - \mathbf{I}_{\mathrm{II}} \mathbf{I}_{\mathrm{I}} \tag{q}$$

显然，按照本构方程 (a)（即 (a)′）与 (e)（即(e′)）式计算所得 $\overset{)}{\mathbf{t}}$ 的结果 (l) 与 (p) 式完全相同；这说明(6.1.8)的关系式得到满足，即

$$\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}(\overset{)(}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})}) = \mathbf{f}_{(\mathscr{R})}(\overset{)(}{\mathbf{D}}_{(\bar{\mathscr{R}})}) = \mathbf{f}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}_{(\mathscr{R})} \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}}))$$

2. 等体变换与等体变换群

材料具有某种对称性，实际上就是指对于某些参考构形 $\mathscr{R}$ 与 $\bar{\mathscr{R}}$，本构方程的形式相同.

因为对于参考构形 $\mathscr{R}$ 与 $\bar{\mathscr{R}}$ 的本构方程形式相同的情况只可能出现在 $\mathscr{R}$ 与 $\bar{\mathscr{R}}$ 为等体的构形，即从 $\mathscr{R}$ 到 $\bar{\mathscr{R}}$ 的变换不出现体积变化的情况，因此以后我们只限于讨论等体变换，即保持体积不变的变换情况。等体变换的变形梯度称为等体变换梯度(unimodular 或 isochoric transformation gradient)。设从构形 $\mathscr{R}$ 到 $\bar{\mathscr{R}}$ 的

变换为

$$\mathbf{H} = \mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{R}) = \frac{d\bar{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}\nabla_{\mathbf{P}} \tag{6.4.1a}$$

则 $\mathbf{H}$ 为等体变换梯度的条件是①

$$\det\mathbf{H} = \pm 1 \tag{6.4.1b}$$

应注意 $\mathbf{H}$ 是与时间 t 无关的。可以证明，若 $\mathbf{H}$ 为等体变换梯度，则 $-\mathbf{H}$ 与 $\overset{-1}{\mathbf{H}}$ 也都是等体变换梯度。

所有的符合 (6.4.1b) 式的 $\mathbf{H}$，即全部的等体变换梯度的集合，构成一个群，称为等体变换群，以 $\mathscr{U}$ 表示。

在代数学中，群是一组元素 A, B, $C\cdots$等的集合，在元素之间定义有乘法，记作 $A\cdot B$，且满足下列四个条件

1）若 A, B 是群中的元素，则 $A\cdot B$ 亦是；

2）结合律： $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

3）存在一个单位元素 I，满足

$I\cdot A = A\cdot I = A$ （对于任意的元素 A）

4）任意元素 A 都有逆 A^{-1}，使

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I$$

可以证明等体变换群 $\mathscr{U}$ 满足上述四个条件。

3. 材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$

现在我们把(6.1.8)式中 $\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{R})$ 的范围缩小到等体变换梯度 (6.4.1a,b) 的情况，此时(6.1.8)式当然仍旧成立，因此

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s)) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s)\cdot\overset{-1}{\mathbf{H}}) \tag{6.4.2}$$

对于任意的等体变换梯度 $\mathbf{H}$（见 (6.4.1a, b) 式）与任意的变形梯度历史 $\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s)$。

上面第 1 小节及其中的例子已经说明对于不同的参考构形$\mathscr{R}$

① (6.4.1b)式右端取 -1 的情况相当于变形与旋转以外还加上反射。

与 $\bar{\mathscr{R}}$，本构方程中的反应泛函 $\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}$ 与 $\mathbf{f}_{(\bar{\mathscr{R}})}$ 一般是不相同的。但是当给定参考构形 $\mathscr{R}$ 以后，可能有一些其它特殊的参考构形 $\bar{\mathscr{R}}$，其反应泛函 $\mathbf{f}_{(\bar{\mathscr{R}})}$ 恰好同 $\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}$ 一样。例如在第 1 小节的例中，如果木材的顺纹杨氏模量 $E_{\parallel}$ 与横纹杨氏模量 $E_{\perp}$ 相等，则对于图 6.2(a) 的参考构形 $\mathscr{R}$ 的弹性张量 $\overset{4}{\mathbf{K}}_{(\mathscr{R})}$（见 ($d$) 式）与对于图 6.2 ($b$) 的参考构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 的弹性张量 $\overset{4}{\mathbf{K}}_{(\bar{\mathscr{R}})}$（见 ($h$) 式）就是相同的，因而相应本构方程 ($a$)′ 式与 ($e$)′ 式的形式也是相同的，本构方程中的反应泛函也是相同的，$\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}=\mathbf{f}_{(\bar{\mathscr{R}})}$。

材料对称群的定义：给定一参考构形 $\mathscr{R}$，反应泛函的形式为 $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s))$，对于构形 $\mathscr{R}$ 的材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 就是满足 $\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}=\mathbf{f}_{(\bar{\mathscr{R}})}$ 的等体变换梯度

$$\mathbf{H}=\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}}),\quad \det\mathbf{H}=\pm 1 \tag{6.4.1a,b}$$

的集合。例如，对于图 6.3（见后 339 页）的横观各向同性材料，设 X_{III} 为材料的对称轴，$\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 就是绕 X_{III} 轴旋转任意角的正交变换的集合.

这里要注意，等式 $\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}=\mathbf{f}_{(\bar{\mathscr{R}})}$ 的含义不是 (6.4.2) 式，而是指对于任意的变形梯度历史 $\mathbf{D}(t-s)$，

$$\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}(t-s))=\mathbf{f}_{(\bar{\mathscr{R}})}(\mathbf{D}(t-s)) \tag{r}$$

都成立. 这个等式只当 $\bar{\mathscr{R}}$ 属于构形 $\mathscr{R}$ 的材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 时才正确。而 (6.4.2) 式则对于任意的 $\bar{\mathscr{R}}$ 都正确（无论 $\bar{\mathscr{R}}$ 是否属于 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$）。

推论：对于两个等体的构形 $\mathscr{R}$ 与 $\bar{\mathscr{R}}$，$\mathbf{H}=\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}})\in\mathscr{U}$，本构方程中的泛函形式是否相同，完全取决于等体变换梯度 $\mathbf{H}$ 是否属于构形 $\mathscr{R}$ 的材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$：

$$\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}=\mathbf{f}_{(\bar{\mathscr{R}})}\rightleftarrows\mathbf{H}=\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}})\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \tag{6.4.3}$$

显然，度量张量 $\mathbf{I}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$。

材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 又称为各向同性群，显然 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 依赖于参

考构形 $\mathscr{R}$，而且它是等体变换群 $\mathscr{U}$ 的子群：$\mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \subseteq \mathscr{U}$。

由于 (r) 式中的 $\mathbf{D}(t-s)$ 是任意的，故可改写为 $\mathbf{D}(t-s) \cdot \overset{-1}{\mathbf{H}}$，再利用(6.4.2)式，则可将(6.4.3)式写作

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}(t-s)) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}(t-s) \cdot \overset{-1}{\mathbf{H}})$$

$$\text{对于任意的 } \mathbf{D}(t-s) \rightleftarrows \mathbf{H} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \qquad (6.4.3)'$$

这里要注意，(6.4.2)式对于任意的 $\mathbf{H} \in \mathscr{U}$ 都成立，而(6.4.3)′式则只对于 $\mathbf{H} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 才成立。

(6.4.3)′式中的 $\mathbf{D}(t-s)$ 是任意的，故可改写作 $\mathbf{D}(t-s) \cdot \mathbf{H}$，因此得到

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}(t-s)) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}(t-s) \cdot \mathbf{H})$$

$$\text{对于任意的 } \mathbf{D}(t-s) \rightleftarrows \mathbf{H} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \qquad (6.4.3)''$$

比较 (6.3.4)′ 与 (6.3.4)″，可以看出如果 $\mathbf{H} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$，则必定 $\overset{-1}{\mathbf{H}} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$。这说明 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 满足群的第 4) 条件。利用(6.4.3)″式容易证明 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 满足群的全部四个条件。

4. 材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 依赖于参考构形 $\mathscr{R}$

由第 3 小节中材料对称群的定义，每给定一个参考构形 $\mathscr{R}$，就有一个相应的材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$。因此 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 依赖于 $\mathscr{R}$。现在我们来研究对于同一材料，如果任选另一个参考构形 $\mathscr{R}'$，那么 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')}$ 与 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 之间有什么关系？

令①

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{R}')$$

为构形 $\mathscr{R}'$ 相对于构形 $\mathscr{R}$ 的变形梯度。因为构形是任选的，所以 $\mathscr{R}'$ 与 $\mathscr{R}$ 一般不是等体的构形，即 $\mathbf{K}$ 一般不是等体变换梯度。

可以证明：若 $\mathbf{H} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$，则

---

① 此处之 $\mathbf{K}$ 勿与前面 (d)，(h) 式之弹性张量 $\mathbf{K}_{(\mathscr{R})}$，$\mathbf{K}_{(\mathscr{R})}$ 混淆。

$$\mathbf{H}' = \mathbf{K} \cdot \mathbf{H} \cdot \overset{-1}{\mathbf{K}} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R}')} \tag{6.4.4a}$$

证 因为(6.1.8)式适用于任意两个构形，把它用于构形 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{R}'$，得到(省去 $\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t-s)$ 的下标 $(\mathscr{R})$)

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}(t-s)) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R}')}(\mathbf{D}(t-s) \cdot \overset{-1}{\mathbf{K}}) \tag{6.4.5}$$

对于任意的 $\mathbf{D}(t-s)$。

利用(6.4.5)式，可将(6.4.3)″以 $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R}')}$ 的形式写出：

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R}')}(\mathbf{D}(t-s) \cdot \overset{-1}{\mathbf{K}}) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R}')}(\mathbf{D}(t-s) \cdot \mathbf{H} \cdot \overset{-1}{\mathbf{K}})$$

$$\text{对于任意的 } \mathbf{D}(t-s) \rightleftarrows \mathbf{H} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$$

因为 $\mathbf{D}(t-s)$ 为任意，在上式中我们可以把它改写作 $\mathbf{D}(t-s) \cdot \mathbf{K}$，因此得到

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R}')}(\mathbf{D}(t-s)) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R}')}(\mathbf{D}(t-s) \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{H} \cdot \overset{-1}{\mathbf{K}})$$

$$\text{对于任意的 } \mathbf{D}(t-s) \rightleftarrows \mathbf{H} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \tag{6.4.6}$$

这就等价于

$$\mathbf{H}' = \mathbf{K} \cdot \mathbf{H} \cdot \overset{-1}{\mathbf{K}} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R}')} \rightleftarrows \mathbf{H} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$$

[证毕]

于是我们不但证明了(6.4.4a)式，而且也证明了它的逆：若 $\mathbf{H}' \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R}')}$，则

$$\mathbf{H} = \overset{-1}{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{H}' \cdot \mathbf{K} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \tag{6.4.4b}$$

我们可以把(6.4.4a, b)两式合记作

$$\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')} = \mathbf{K} \cdot \mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \cdot \overset{-1}{\mathbf{K}}, \quad \mathscr{G}_{(\mathscr{R})} = \overset{-1}{\mathbf{K}} \cdot \mathscr{G}_{(\mathscr{R}')} \cdot \mathbf{K} \tag{6.4.4c}$$

因此 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')}$ 中的元素与 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 中的元素之间有(6.4.4)式的一一对应关系。故称 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')}$ 与 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 为同构的 (isomorphic)。由于满足(6.4.4a)与(6.4.4b)的 $\mathbf{H}'$ 与 $\mathbf{H}$ 称为共轭① (conjugate)，故

---

① 在矩阵理论中，此种情况称为"相似"。

称满足(6.4.4c)式的 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')}$ 与 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 为共轭群。

二、正交变换梯度 $\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 的条件

由于正交张量 $\mathbf{Q}$ 满足(6.4.1b)式：$\det\mathbf{Q}=\pm 1$，正交变换必为等体变换。可以证明全部正交变换梯度 $\mathbf{Q}$ 的集合 $\mathscr{O}$ 满足群的四个条件，故称 $\mathscr{O}$ 为正交变换群。显然 $\mathscr{O}\subseteq\mathscr{U}$。

正交变换表示刚体的旋转(或旋转加反射)，连续介质力学特别是固体力学对于哪一些正交变换(梯度) $\mathbf{Q}$ 属于材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 这一问题有兴趣。根据 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 群的性质，如果 $\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$，则其逆 $\overset{-1}{\mathbf{Q}}=\mathbf{Q}^*$ 亦必 $\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$。

在(6.4.3)'式中令 $\mathbf{H}=\mathbf{Q}$，得到决定 $\mathbf{Q}$ 是否属于材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 的条件：

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}(t-s))=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}(t-s)\cdot\mathbf{Q}^*)$$

$$\text{对于任意的 } \mathbf{D}(t-s)\rightleftarrows\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \tag{6.4.7}$$

在(6.4.7)式中 $\mathbf{D}(t-s)$ 为任意的，故可以把它改写为 $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}(t-s)$。于是得到①

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}(t-s))=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}(t-s)\cdot\mathbf{Q}^*)$$

$$\text{对于任意的 } \mathbf{D}(t-s)\rightleftarrows\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \tag{6.4.7)'$$

由 PMI 的不变性要求(6.1.4)式，其中的 $\mathbf{Q}(t-s)$ 可为任意的，故可令 $\mathbf{Q}(t-s)\equiv\mathbf{Q}$：

$$\mathbf{Q}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}(t-s))\cdot\mathbf{Q}^*=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}(t-s))$$

代入(6.4.7)'式左端，得到

$$\mathbf{Q}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}(t-s))\cdot\mathbf{Q}^*=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}(t-s)\cdot\mathbf{Q}^*)$$

---

① 假定张量可以平移，因而不必考虑张量的两点性。

$$\text{对于任意的 } \mathbf{D}(t-s) \rightleftarrows \mathbf{Q} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \tag{6.4.8}$$

显然，度量张量

$$\mathbf{I} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \tag{6.4.9a}$$

又由(6.4.8)式，

$$-\mathbf{I} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \tag{6.4.9b}$$

因此，如果 $\mathbf{Q} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$，由群的性质及 (6.4.9$b$)，

$$-\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot (-\mathbf{I}) \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \tag{6.4.9$'$}$$

现在我们来讨论(6.4.8)式的含义。利用极分解公式，

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t-s) &= \mathbf{R}(t-s) \cdot \mathbf{U}(t-s) \\ &= \mathbf{V}(t-s) \cdot \mathbf{R}(t-s) \end{aligned} \tag{6.4.10}$$

或简写为

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \tag{6.4.10$'$}$$

可以证明：当 $\mathbf{D}$ 进行正交变换时，由 $\mathbf{D}$ 的极分解所决定的 $\mathbf{R}$，$\mathbf{U}$，$\mathbf{V}$，$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$，$\overset{-1}{\mathbf{c}} = \mathbf{V}^2$ 也都变成自己的正交变换，用式子表示如下：

若 $\mathbf{D} \to \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^*$，则必有

$$\begin{aligned} &\mathbf{R} \to \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^* \\ &\mathbf{U} \to \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^*, \quad \mathbf{C} \to \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^* \\ &\mathbf{V} \to \mathbf{Q} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}^*, \quad \overset{-1}{\mathbf{c}} \to \mathbf{Q} \cdot \overset{-1}{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{Q}^* \end{aligned} \tag{6.4.11}$$

证 由(6.4.10)$'$式，可得 $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^*$ 的极分解式：

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^* &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^* \\ &= (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^*) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^*) \\ &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^* \\ &= (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}^*) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^*) \end{aligned} \tag{6.4.12}$$

根据极分解的唯一性，由 (6.4.12) 式可得 (6.4.11) 的 $\mathbf{R}$，$\mathbf{U}$ 与 $\mathbf{V}$ 式。再利用 $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$，$\overset{-1}{\mathbf{c}} = \mathbf{V}^2$，即可证(6.4.11)中的 $\mathbf{C}$ 与 $\overset{-1}{\mathbf{c}}$ 式。

因此(6.4.8)式的含义是：如果正交变换 $\mathbf{Q}$ 属于对于参考构

形 $\mathscr{R}$ 的材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$，那么对变形梯度历史 $\mathbf{D}(t-s)$ 作正交变换(即指把前矢量与后矢量都进行由 $\mathbf{Q}$ 所表示的正交变换)，因而由(6.4.11)式，$\mathbf{R}$, $\mathbf{U}$(及 $\mathbf{C}=\mathbf{U}^2$)与 $\mathbf{V}$ (及 $\overset{-1}{\mathbf{c}}=\mathbf{V}^2$)也变成自己的正交变换，由 (6.4.8) 式按本构方程确定的 Cauchy 应力张量 $\overset{\ll}{\mathbf{t}}$ 也变成自己的正交变换。再简单一点说，如果 $\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$，则把变形梯度历史 $\mathbf{D}(t-s)$ 作一个以 $\mathbf{Q}$ 表示的旋转，所有的变形张量与旋转张量以及按本构方程确定的 Cauchy 应力张量都将作同样的旋转。例如图 6.2 的例中，如果顺纹与横纹方向的杨氏模量相等即 $E_{/\!/}=E_{\perp}$，则 $\mathbf{Q}=\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{R})\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$，在图 6.2($a$) 的构形 $\mathscr{R}$ 中，把竖直方向伸长变形旋转90°变成水平方向伸长变形，则应力由竖直方向受拉也旋转 90° 变成水平方向受拉，数值不变。

这里要特别注意(6.4.8)式与 PMI 的不变性要求(6.1.4)式的区别：

1) (6.4.8)式只适用于属于材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 的正交变换$\mathbf{Q}$；而 PMI 不变性要求(6.1.4)式则用于任何的 $\mathbf{Q}$；

2) (6.4.8)式的含义是当变形梯度 $\mathbf{D}$ 变换成 $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Q}^*$ 时(因而各个变形与旋转张量按(6.4.11)式同样地变换)，Cauchy 应力张量 $\overset{\ll}{\mathbf{t}}$ 也变换成 $\mathbf{Q}\cdot\overset{\ll}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{Q}^*$；而 (6.1.4) 式的含义则为当变形梯度按标架转换关系(5.2.15)式：$\mathbf{D}\rightarrow\tilde{\mathbf{D}}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}$ 进行变换 (因而由(5.2.19)式) $\mathbf{R}\rightarrow\tilde{\mathbf{R}}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}$, $\tilde{\mathbf{U}}=\mathbf{U}$ 不变，由(5.2.20)式 $\mathbf{V}\rightarrow\tilde{\mathbf{V}}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{Q}^*$ 时，Cauchy 应力张量 $\overset{\ll}{\mathbf{t}}$ 也按其标架转换关系(5.2.14)式变成 $\tilde{\overset{\gg}{\mathbf{t}}}=\mathbf{Q}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{Q}^*$。

在(6.4.8)式中，$\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 的条件是通过简单材料的本构方程(6.1.2)′中的泛函 $\mathop{\mathbf{f}}\limits_{s=0}^{\infty}(\mathbf{D}(t-s))$ 来表示的。同样我们也可以通过简单材料本构方程的其它化简形式中的泛函来表示。

通过第一种化简形式(6.2.3)式中的泛函(也就是(6.1.2)'式中的泛函 $\mathbf{f}$)表示:

$$\mathbf{Q}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{U}(t-s))\cdot\mathbf{Q}^{*}=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{U}(t-s)\cdot\mathbf{Q}^{*})$$

$$\text{对于任意的 }\mathbf{U}(t-s)\rightleftarrows\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}\qquad(6.4.13)$$

通过第二种化简形式(6.2.4)式中的泛函表示:

$$\mathbf{Q}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{h}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{C}(t-s))\cdot\mathbf{Q}^{*}=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{h}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{C}(t-s)\cdot\mathbf{Q}^{*})$$

$$\text{对任意的 }\mathbf{C}(t-s)\rightleftarrows\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}\qquad(6.4.14)$$

通过第三种化简形式(6.2.6)式中的泛函表示:

$$\mathbf{Q}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{g}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{C}(t-s))\cdot\mathbf{Q}^{*}=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{g}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{C}(t-s)\cdot\mathbf{Q}^{*})$$

$$\text{对任意的 }\mathbf{C}(t-s)\rightleftarrows\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}\qquad(6.4.15)$$

通过第四种化简形式(6.2.12)式中的泛函(也就是(6.1.2)'式中的泛函 $\mathbf{f}$)表示:

$$\mathbf{Q}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{U}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{U}(t))\cdot\mathbf{Q}^{*}$$
$$=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}((\mathbf{Q}\cdot\mathscr{U}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{Q}^{*})\cdot(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{U}(t)\cdot\mathbf{Q}^{*}))$$

$$\text{对于任意的 }\mathscr{U}_{(t)}(t-s)\text{ 与 }\mathbf{U}(t)\rightleftarrows\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}\qquad(6.4.16)$$

通过第五种化简形式(6.2.13)式中的泛函表示:

$$\mathbf{Q}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{k}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{U}_{(t)}(t-s),\mathbf{U}(t))\cdot\mathbf{Q}^{*}$$
$$=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{k}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{Q}\cdot\mathscr{U}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{Q}^{*},\mathbf{Q}\cdot\mathbf{U}(t)\cdot\mathbf{Q}^{*})$$

$$\text{对于任意的 }\mathscr{U}_{(t)}(t-s)\text{ 与 }\mathbf{U}(t)\rightleftarrows\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}\qquad(6.4.17)$$

通过第六种化简形式(6.2.14)式中的泛函表示:

$$\mathbf{Q}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{l}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{C}_{(t)}(t-s),\mathbf{C}(t))\cdot\mathbf{Q}^{*}$$

$$= \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{l}}}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{Q}\cdot\mathscr{C}(t-s)\cdot\mathbf{Q}^*, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{C}(t)\cdot\mathbf{Q}^*)$$

对于任意的 $\mathscr{C}_{(t)}(t-s)$ 与 $\mathbf{C}(t)$ (6.4.18)

$\rightleftarrows \mathbf{Q}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$

通过第七种化简形式(6.2.18)式中的泛函表示:

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{C})\cdot\mathbf{Q}^* = \mathbf{r}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{Q}^*) \text{ 对于任意的 } \mathbf{C}$$

$$\mathbf{Q}\cdot\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{q}}}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{E}_{(t)}(t-s),\mathbf{C}(t))\cdot\mathbf{Q}^* \tag{6.4.19}$$

$$= \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{q}}}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{Q}\cdot\mathscr{E}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{Q}^*, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{C}(t)\cdot\mathbf{Q}^*)$$

对于任意的 $\mathscr{E}_{(t)}(t-s)$ 与 $\mathbf{C}(t)\rightleftarrows\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$

以上的(6.4.8)及(6.4.13)—(6.4.19)式都是 $\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 条件的不同表达形式。

由(6.4.9)式，$\mathbf{I}$ 与 $-\mathbf{I}$ 必属于 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$。对于有些材料，除了 $\mathbf{I}$ 与 $-\mathbf{I}$ 以外，还可能有一些正交变换 $\mathbf{Q}$ 也属于 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$。例如图 6.3 示一横观各向同性固体材料的物体的非扭曲状态 $\mathscr{R}$①，笛卡儿坐标轴 X_{III} 为材料的对称轴。以 $\mathbf{Q}$ 表示绕材料对称轴 X_{III} 旋转任意 φ 角的正交变换，即

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{III}\mathbf{I}_{III} + (\mathbf{I}_I\cos\varphi + \mathbf{I}_{II}\sin\varphi)\mathbf{I}_I + (-\mathbf{I}_I\sin\varphi + \mathbf{I}_{II}\cos\varphi)\mathbf{I}_{II} \tag{r}$$

式中 $\mathbf{I}_I$, $\mathbf{I}_{II}$, $\mathbf{I}_{III}$ 为笛卡儿坐标的基矢量。$\mathbf{Q}$ 的矩阵为

$$\|\mathbf{Q}\| = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

上述正交变换 $\mathbf{Q}$ 的集合，就是横观各向同性材料的 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$。由构形 $\mathscr{R}$ 经过这种正交变换（即绕 X_{III} 旋转 φ 角）后达到的新构形 $\bar{\mathscr{R}}$，具有与构形 $\mathscr{R}$ 相同形式的本构方程。

① 见后§6.6，二。此处非扭曲状态指由自然状态经过正交变换或在横观各向同性平面(即图 6.3 的 $X_I - X_{II}$ 面)中均匀拉伸(见(6.6.2)式)的状态。

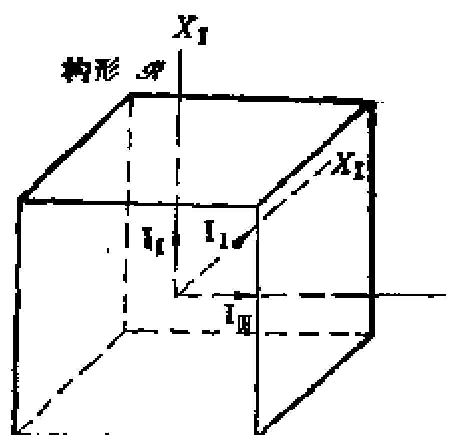


图 6.3

三、各向同性

除了 $\mathbf{I}$ 与 $-\mathbf{I}$ 以外，哪些正交变换 $\mathbf{Q}$ 属于材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$，这取决于材料及所选择的参考构形 $\mathscr{R}$。在连续介质力学中有一个很重要的情况，就是全部的正交变换群 $\mathscr{O}$ 都属于 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$。

定义 如果有一参考构形 $\mathscr{R}$，其材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 包含全部的正交变换群 $\mathscr{O}$：

$$\mathscr{O}\subseteq\mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \tag{6.4.20}$$

则称材料为各向同性（isotropic），而构形 $\mathscr{R}$ 称为各向同性材料的非扭曲状态（undistorted state）。换句话说，各向同性材料的非扭曲状态的材料对称群必包含全部的正交变换群；否则，如果对某状态其材料对称群不包含全部正交变换群，则此状态不是非扭曲状态①。

由各向同性材料的定义(6.4.20)式与材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 依赖于参考构形 $\mathscr{R}$ 的关系(6.4.4)式，可以推论：如果 $\mathscr{R}$ 为各向同性

① 由后面的§6.5一，简单流体的任何一个状态都是非扭曲状态；由后面的§6.6二，各向同性简单固体的非扭曲状态是指由自然状态经过正交变换或均匀膨胀的状态。

材料的非扭曲状态，则$\mathscr{R}$经过任一正交变换$\mathbf{K}$而达到的构形$\mathscr{R}'(\mathbf{K}=\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{R}'))$亦为非扭曲状态。因此，在各向同性材料的各个非扭曲状态中，力学试验无法分辨。

由以上的定义，各向同性材料非扭曲状态$\mathscr{R}$的材料对称群$\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$至少是全部的正交变换群$\mathscr{O}$。另外一方面，由前述材料对称群的定义，$\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$最大不可能超过全部的等体变换群$\mathscr{U}$。

以各向同性材料的非扭曲状态为参考构形$\mathscr{R}$，任何的正交变换$\mathbf{Q}$均属于$\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$，因此，(6.4.8)式的条件对于任意的$\mathbf{Q}\in\mathscr{O}$均成立，此时我们称泛函

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}(t-s))$$

满足各向同性条件①，并称它为各向同性泛函。同理，(6.4.13)—(6.4.19)各式中的泛函$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}$，$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{h}}}$，$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{g}}}$，$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{k}}}$，$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{l}}}$，$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{q}}}$均满足各向同性条件，故均为各向同性泛函，而(6.4.19)式中的函数$\mathbf{r}$则为各向同性函数。

同样可以证明，对于各向同性材料且参考构形$\mathscr{R}$为非扭曲状态，出现在以第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量$\overset{\times}{\boldsymbol{\tau}}$表示的本构方程(6.2.3)′，(6.2.4)′，(6.2.12)′—(6.2.14)′，((6.2.19)′式中的各个泛函，与出现在以第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量$\overset{\times\times}{\mathbf{T}}$表示的本构方程(6.2.3)″，(6.2.4)″，(6.2.12)″—(6.2.14)″，(6.2.19)″式中的各个泛函，都是各向同性泛函。

四、各向同性材料的本构方程②

对于各向同性材料，设参考构形$\mathscr{R}$为非扭曲状态。本构方

---

① (6.4.8)式对于任意的$\mathbf{Q}$均成立，这样的条件叫作$\mathbf{f}$的各向同性条件。(6.4.13)—(6.4.19)各式亦类似。

② 本章只讨论简单材料。

程的第一种化简形式(6.2.3)式可以写成

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}(\mathbf{U}(t-s)) \cdot \mathbf{R}(t)^*$$

$$= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}(\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{U}(t-s) \cdot \mathbf{R}(t)^*)$$

这里略去了表示参考构形的下标“$(\mathscr{R})$”不写。上式的第二个等式利用了各向同性条件(6.4.13)式(其中令 $\mathbf{Q} = \mathbf{R}(t)$) 而导出。

对于本构方程的第四至第七种化简形式 (6.2.12)—(6.2.14), (6.2.18), 采用当前时刻 t 的构形为参考构形,本构方程的形式可以进一步化简。下面我们需要用到以下的关系式:

由极分解公式(6.4.10)可得到右伸长张量 $\mathbf{U}(t)$ 与左伸长张量 $\mathbf{V}(t)$ 之间的关系

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{R}(t)^* = \mathbf{V}(t) \tag{6.4.21a}$$

式中

$$\mathbf{U}(t) = \overset{1/2}{\mathbf{C}}(t), \quad \mathbf{V}(t) = \overset{-1/2}{\mathbf{c}}(t) = \overset{1/2}{\mathbf{B}}(t)$$

因此, 右 Cauchy-Green 变形张量 $\mathbf{C}(t)$ 与左 Cauchy-Green 变形张量 $\mathbf{B}(t)$ 之间的关系

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{C}(t) \cdot \mathbf{R}(t)^* = \mathbf{B}(t) \tag{6.4.21b}$$

式中

$$\mathbf{B}(t) = \overset{-1}{\mathbf{c}}(t)$$

还有由(6.2.9),(6.2.15)第二式与(6.2.16)式可导出关系

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathscr{U}_{(t)}(t-s) \cdot \mathbf{R}(t)^* = \mathbf{U}_{(t)}(t-s) \tag{6.4.21c}$$

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathscr{C}_{(t)}(t-s) \cdot \mathbf{R}(t)^* = \mathbf{C}_{(t)}(t-s) \tag{6.4.21d}$$

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathscr{E}_{(t)}(t-s) \cdot \mathbf{R}(t)^* = \mathbf{E}_{(t)}(t-s) \tag{6.4.21e}$$

$$= \frac{1}{2}[\mathbf{C}_{(t)}(t-s) - \mathbf{I}]$$

于是, 利用各向同性条件(6.4.16)式(其中令 $\mathbf{Q} = \mathbf{R}(t) \in \mathscr{O}$) 及 (6.4.21$a$,$c$) 式,本构方程的第四种化简形式(6.2.12)式可化成

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)=\mathbf{R}(t)\cdot\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{f}}}(\mathscr{U}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{U}(t))\cdot\mathbf{R}(t)^{*}$$

$$=\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{f}}}((\mathbf{R}(t)\cdot\mathscr{U}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{R}(t)^{*})$$

$$\cdot(\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{U}(t)\cdot\mathbf{R}(t)^{*}))$$

$$=\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{f}}}(\mathbf{U}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{V}(t))\tag{6.4.22}$$

同样，利用各向同性条件(6.4.17)式(其中令 $\mathbf{Q}=\mathbf{R}(t)\in\mathscr{O}$)及 (6.4.21$a$,$c$)，本构方程的第五种化简形式(6.2.13)式可化成

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)=\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{k}}}(\mathbf{U}_{(t)}(t-s),\mathbf{V}(t))\tag{6.4.23}$$

利用各向同性条件(6.4.18)式(其中令 $\mathbf{Q}=\mathbf{R}(t)\in\mathscr{O}$)及(6.4.21$b$,$d$)式,本构方程的第六种化简形式(6.2.14)式可化成

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)=\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{l}}}(\mathbf{C}_{(t)}(t-s),\mathbf{B}(t))\tag{6.4.24}$$

以及利用各向同性条件 (6.4.19) 式 (其中令 $\mathbf{Q}=\mathbf{R}(t)\in\mathscr{O}$) 及 (6.4.21$b$,$e$) 式，本构方程的第七种化简形式 (6.2.18) 式可化成

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)=\mathbf{r}(\mathbf{B}(t))+\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{q}}}(\mathbf{E}_{(t)}(t-s),\mathbf{B}(t))\tag{6.4.25}$$

这些本构方程(6.4.22)—(6.4.25)的形式表明：各向同性材料(参考构形 $\mathscr{R}$ 为非扭曲状态)在 t 时刻的 Cauchy 应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)$ 只取决于当时的左伸长张量 $\mathbf{V}(t)$ (或左 Cauchy-Green 变形张量 $\mathbf{B}(t)=\mathbf{V}(t)^2$) 与伸长史 $\mathbf{U}_{(t)}(t-s)$，而与旋转史 $\mathbf{R}(t-s)$ 无关。

各向同性材料 ($\mathscr{R}$ 非扭曲)的本构方程中所有出现的泛函或函数都是各向同性泛函或函数,故可以利用张量分析中的 Cauchy 基本表示定理来写出它们的分量形式。例如以对流应力 $\bar{\mathbf{t}}$ 表示的第三种化简形式(6.2.6)，其分量形式为

$$\bar{t}_{AB}(t)=\underset{s=0}{\overset{\infty}{g}}{}_{AB}(C_{KL}(t-s),G_{MN})\tag{6.4.26}$$

(6.4.25)式的分量形式则为

$$
\begin{aligned}
t_{ij}(t) = & \; r_{ij}(B_{kl}(t),\, g_{mn}(t)) \\
& + \mathop{\mathfrak{q}}_{s=0}^{\infty}{}_{ij}(C_{(t)pq}(t-s) - g_{pq}(t),\, B_{ru}(t),\, g_{vw}(t))
\end{aligned}
\tag{6.4.27}
$$

§6.5 简 单 流 体

一、定义

在初等的教科书中把流体定义为形状随其容器改变的材料。其含义就是说在密度不变时流体的性质(或行为)不受其形状的影响。用精确的数学语言来下定义:

定义 一简单材料,如果对某参考构形 $\mathscr{R}$,材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 就是全部的等体变换群 $\mathscr{U}$,即

$$\mathscr{G}_{(\mathscr{R})} = \mathscr{U} \tag{6.5.1}$$

则称此材料为简单流体 (simple fluid),$\mathscr{R}$ 称为简单流体的非扭曲状态。

因为全部的正交变换群 $\mathscr{O}$ 包含于等体变换群 $\mathscr{U}$ 之内,即 $\mathscr{O} \subset \mathscr{U}$,故由(6.5.1)式,$\mathscr{O} \subseteq \mathscr{G}_{(\mathscr{R})} = \mathscr{U}$,所以(6.4.20)式满足,故**简单流体是各向同性材料**,而且上述定义中的参考构形 $\mathscr{R}$ 是各向同性材料的非扭曲状态。

还可以证明一个推论:

简单流体对于任何一个参考构形(记作 $\mathscr{R}'$),材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 都是全部的等体变换群 $\mathscr{U}$,即

$$\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')} = \mathscr{U}, \quad \mathscr{R}' \text{ 任意} \tag{6.5.2}$$

这就是说,任意的构形 $\mathscr{R}'$ 都是简单流体的非扭曲状态。

证 设 $\mathscr{R}$ 是简单流体定义中所提到的参考构形,$\mathscr{R}$ 是简单流体的非扭曲状态。今设 $\mathscr{R}'$ 为任意构形,

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{R}')$$

因 $\mathscr{R}'$ 为任意，故 $\mathscr{R}'$ 与 $\mathscr{R}$ 可以不是等体的，即密度可以不同，$\det\mathbf{K}$ 可以不等于 1。

由 (6.4.4a, b)，$\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')}$ 中的元素 $\mathbf{H}'$ 与 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 中的元素 $\mathbf{H}$ 之间存在关系

$$\mathbf{H}' = \mathbf{K}\cdot\mathbf{H}\cdot\overset{-1}{\mathbf{K}},\quad \mathbf{H} = \overset{-1}{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{H}'\cdot\mathbf{K}$$

由上式可证 $\det\mathbf{H}' = \det\mathbf{H}$。因 $\mathbf{H}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})} = \mathscr{U}$，$\det\mathbf{H} = \pm 1$，故 $\det\mathbf{H}' = \pm 1$，$\mathbf{H}'\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')}$。因 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')}$ 与 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 同构，故 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')} = \mathscr{U}$，$\mathscr{R}'$ 为非扭曲状态。 证完

二、简单流体的本构方程

下面我们证明简单流体的本构方程对参考构形 $\mathscr{R}$ 的依赖性只反映在构形 $\mathscr{R}$ 的质量密度 $\rho_{(\mathscr{R})}$ 上。

假定有两个构形 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{R}'$，它们的质量密度相同：

$$\rho_{(\mathscr{R})} = \rho_{(\mathscr{R}')} \tag{6.5.3}$$

令

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{R}')$$

则由(2.4.6)式

$$\text{体积比} = \frac{\rho_{(\mathscr{R})}}{\rho_{(\mathscr{R}')}} = |\det\mathbf{K}| = 1 \tag{6.5.4}$$

因此 $\mathbf{K}\in\mathscr{U} = \mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$。由(6.4.3)式，对于参考构形 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{R}'$，本构方程中的反应泛函形式相同，

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}(t-s)) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R}')}(\mathbf{D}(t-s)) \tag{6.5.5}$$

所以两个参考构形 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{R}'$，只要它们的质量密度相同(见(6.5.3)式)，本构方程中的泛函形式就相同(见(6.5.5)式)。换句话说，反应泛函 $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}{}_{(\mathscr{R})}$ 仅仅依赖于参考构形 $\mathscr{R}$ 的质量密度 $\rho_{(\mathscr{R})}$，而与构形的其它性质(例如方位、形状)无关。只要在反应泛函 $\mathbf{f}$ 中加进一

个自变量 $\rho_{(\mathscr{R})}$ 就完全反映了 $\mathbf{f}$ 对参考构形的依赖关系：

$$\mathop{\mathbf{f}}_{s=0}^{\infty}{}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}(t-s)) = \mathop{\mathbf{f}}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{D}(t-s),\ \rho_{(\mathscr{R})})$$

于是，对于简单流体，本构方程的第一种化简形式(6.2.3)式可写成

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t) = \mathbf{R}(t)\cdot \mathop{\mathbf{f}}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{U}(t-s),\ \rho_{(\mathscr{R})})\cdot \mathbf{R}(t)^{*} \qquad (6.5.6)$$

式中 $\mathbf{f}$ 是变形史 $\mathbf{U}(t-s)$ 的泛函和标量 $\rho_{(\mathscr{R})}$ 的函数，$\mathbf{U}(t-s)$ 即指 $\mathbf{U}_{(\mathscr{R})}(t-s)$（省去了下标"$(\mathscr{R})$"未写）。

既然反应泛函对参考构形的依赖仅仅表现在 $\rho_{(\mathscr{R})}$ 上(当然 $\mathbf{D}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{R}$ 等都是相对于参考构形 $\mathscr{R}$ 的)，那么我们可以选择当前时刻 t 的构形为参考构形，此时 $\mathbf{R}(t)=\mathbf{I}$，(6.5.6)式成为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t) = \mathop{\mathbf{f}}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{U}_{(t)}(t-s),\ \rho(t)) \qquad (6.5.7)$$

这里的 $\mathbf{f}$ 与(6.5.6)式中的 $\mathbf{f}$ 是同一个泛函。

由前所述，简单流体是各向同性材料，故(6.5.7)式中的泛函应满足类似于(6.4.8)，(6.4.14)—(6.4.19)的各向同性条件，即

$$\begin{aligned}&\mathbf{Q}\cdot \mathop{\mathbf{f}}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{U}_{(t)}(t-s),\rho(t))\cdot \mathbf{Q}^{*}\\&= \mathop{\mathbf{f}}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{Q}\cdot \mathbf{U}_{(t)}(t-s)\cdot \mathbf{Q}^{*},\ \rho(t))\quad \mathbf{Q}\in\mathscr{O}\end{aligned} \qquad (6.5.8)$$

应注意(6.5.8)式作为各向同性条件，对于任意的正交变换都应满足。也就是说，$\mathbf{f}$ 是各向同性泛函。

(6.5.7)式表明：简单流体在当前时刻 t 的应力 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)$ 取决于当前的密度 $\rho(t)$ 及相对于当前构形的伸长史(或变形史) $\mathbf{U}_{(t)}(t-s)$。

(6.5.8)式则表明：若全部的伸长史做一个以正交变换 $\mathbf{Q}$（常张量）表示的旋转，则 Cauchy 应力张量也做同样的旋转。

仿上面的讨论，对于简单流体，本构方程的第七种化简形式

(6.2.18)应为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)=\mathbf{R}(t)\cdot\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{i}}}(\mathscr{C}_{(t)}(t-s),\mathbf{C}(t),\rho_{(\mathscr{R})})\cdot\mathbf{R}(t)^{*}\quad(6.5.9)$$

式中 $\mathbf{C}(t)$ 即指 $\mathbf{C}_{(\mathscr{R})}(t)$，

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{i}}}(\mathscr{C}_{(t)}(t-s),\mathbf{C}(t),\rho_{(\mathscr{R})})$$

$$=\mathbf{r}(\mathbf{C}(t),\rho_{(\mathscr{R})})+\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{q}}}(\mathscr{C}_{(t)}(t-s),\mathbf{C}(t),\rho_{(\mathscr{R})})$$

取当前时刻 t 的构形为参考构形$\mathscr{R}$，则 $\mathbf{R}(t)=\mathbf{I}$，$\mathbf{C}(t)=\mathbf{I}$，及由(6.2.16)′式，

$$\mathscr{C}_{(t)}(t-s)=\mathbf{E}_{(t)}(t-s)$$

本构方程(6.5.9)就成为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)=\mathbf{r}(\rho(t))+\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{q}}}(\mathbf{E}_{(t)}(t-s),\rho(t))\quad(6.5.10)$$

式中 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{q}$ 满足(6.4.19)式的各向同性条件：

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}(\rho(t))\cdot\mathbf{Q}^{*}=\mathbf{r}(\rho(t)),\ \mathbf{Q}\in\mathscr{O}\quad(6.5.11a)$$

$$\mathbf{Q}\cdot\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{q}}}(\mathbf{E}_{(t)}(t-s),\rho(t))\cdot\mathbf{Q}^{*}$$

$$=\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{q}}}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{E}_{(t)}(t-s)\cdot\mathbf{Q}^{*},\rho(t))\quad\mathbf{Q}\in\mathscr{O}\quad(6.5.11b)$$

由 (6.5.11a) 式，可以证明 $\mathbf{r}(\rho(t))$ 为一球形张量①，记作

$$\mathbf{r}(\rho(t))=-p(\rho(t))\mathbf{I}\quad(6.5.12)$$

故本构方程(6.5.10)式成为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)=-p(\rho(t))\mathbf{I}+\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbf{q}}}(\mathbf{E}_{(t)}(t-s),\rho(t))\quad(6.5.10)'$$

对于静止的流体，$\mathbf{E}_{(t)}(t-s)\equiv\mathbf{0}$，假设 $\mathbf{q}=\mathbf{0}$，则 (6.5.10)′ 式成为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}=-p(\rho)\mathbf{I}\quad(6.5.13)$$

---

① 证明方法可取一笛卡儿坐标系，并取 $\mathbf{Q}$ 为坐标轴交换、旋转等正交变换。

以后我们将定义弹性流体，假定(6.5.13)式适用于任何时刻，其本构方程为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = -p(\rho(t))\mathbf{I} \qquad (6.5.13)'$$

这就是流体弹性力学（Elasticity of fluids）所研究的对象。

三、不可压缩流体

假定内部约束条件为 $\rho(t) = \text{const.}$ 本构方程(6.5.10)'成为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t) = -p\mathbf{I} + \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{q}}}(\mathbf{E}_{(t)}(t-s)) \qquad (6.5.14)$$

式中 p 为不可定压力（indeterminate pressure），即不可只从变形的历史确定。为了区别，(6.5.10)'式中的压力 $p(\rho(t))$ 则有时称为热力学压力（thermodynamic pressure）。和(6.3.8)式相类似，我们可以规定上式中的第二项 $\mathbf{q}$ 为一偏斜张量。

§6.6 简单固体

一、定义

简单固体的定义如下：

一简单材料，如果对某参考构形$\mathscr{R}$，材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 为正交变换群 $\mathscr{O}$ 之子群，即

$$\mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \subseteq \mathscr{O} \qquad (6.6.1)$$

则称此简单材料为简单固体（simple solid），并称此参考构形 $\mathscr{R}$ 为此简单固体的非扭曲状态。

可以区分两种情况：

1) $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})} = \mathscr{O}$，符合于(6.4.20)式，简单固体是各向同性的，称为各向同性简单固体，简称各向同性固体；

2) $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \subset \mathscr{O}$，简单固体非各向同性，称为各向异性（anisotropic）简单固体。

一个材料不可能同时既是简单固体，又是简单流体，因为简单流体的任意构形 $\mathscr{R}$ 都是非扭曲状态，$\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}=\mathscr{U}$，不可能满足(6.6.1)式。但是，简单固体与简单流体并不构成简单材料的全部。有的简单材料可能既非简单固体，又非简单流体。如果对某一参考构形 $\mathscr{R}$，$\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}\subset\mathscr{U}$，故材料非简单流体，同时 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 不与任何 $\mathscr{O}$ 的子群共轭(见(6.4.4c)式)，故材料非简单固体。这种材料 Coleman 称之为简单液晶 (simple liquid crystal)。

但是各向同性的简单材料则二者必居其一：不是简单固体，就是简单流体。这是因为根据群论中的定理，不存在既包含 $\mathscr{O}$ 而又含于 $\mathscr{U}$ 的群。如果 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 介于 $\mathscr{O}$ 与 $\mathscr{U}$ 之间：$\mathscr{O}\subseteq\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}\subseteq\mathscr{U}$，则 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}=\mathscr{O}$ 与 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}=\mathscr{U}$ 二者必居其一。

二、简单固体的非扭曲状态

可以证明：若参考构形 $\mathscr{R}$ 为简单固体的非扭曲状态，令 $\mathbf{K}$ 为任一正交变换：

$$\mathbf{K}=\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{R}'),\quad \mathbf{K}^{*}=\mathbf{K}^{-1}$$

则由 $\mathscr{R}$ 经过正交变换 $\mathbf{K}$ 所达到的构形 $\mathscr{R}'$ 必也是非扭曲状态。

证 由 (6.4.4c) 式

$$\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')}=\mathbf{K}\cdot\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}\cdot\overset{-1}{\mathbf{K}}$$

因为 $\mathscr{R}$ 为非扭曲状态，故 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}\subset\mathscr{O}$。设任何正交变换 $\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}\subset\mathscr{O}$，则 $\mathbf{Q}'=\mathbf{K}\cdot\mathbf{Q}\cdot\overset{-1}{\mathbf{K}}\in\mathscr{O}$。因此 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')}\subset\mathscr{O}$，$\mathscr{R}'$ 亦为非扭曲状态。 证完

但应指出，如果 $\mathbf{K}=\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{R}')$ 非正交变换，则由非扭曲状态的参考构形 $\mathscr{R}$ 经过变换 $\mathbf{K}$ 以后所达到的构形 $\mathscr{R}'$ 一般不是非扭曲状态。例如图 6.3 所示的横观各向同性材料，设图中的构形 $\mathscr{R}$ 为非扭曲状态，材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 包括全部绕 X_{111} 轴旋转任意 φ 角的正交变换 $\mathbf{Q}$ (表达式见 338 页 (r) 式)。若令

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{R}') = \lambda \mathbf{I}_{I}\mathbf{I}_{I} + \lambda^{-1}\mathbf{I}_{II}\mathbf{I}_{II} + \mathbf{I}_{III}\mathbf{I}_{III}$$

构形 $\mathscr{R}'$ 是构形 $\mathscr{R}$ 沿 X_{I} 方向伸长 λ 倍，沿 X_{II} 方向缩小 λ 倍的结果。$\mathbf{K}\cdot\mathbf{Q}\cdot\overset{-1}{\mathbf{K}}\in\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')}$，但可以验证它不属于 $\mathscr{O}$，因此 $\mathscr{R}'$ 不是非扭曲状态。但若令

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{R}') = \lambda(\mathbf{I}_{I}\mathbf{I}_{I} + \mathbf{I}_{II}\mathbf{I}_{II}) + \mu\mathbf{I}_{III}\mathbf{I}_{III} \tag{6.6.2}$$

则可验证 $\mathbf{K}\cdot\mathbf{Q}\cdot\overset{-1}{\mathbf{K}} = \mathbf{Q}\in\mathscr{O}$，故 $\mathscr{R}'$ 是非扭曲状态。注意非扭曲状态未必是自然状态 (natural state)。自然状态仅指应力为零的非扭曲状态。

可以证明，各向同性材料的非扭曲状态 $\mathscr{R}$ 经过均匀膨胀(即 $\mathbf{K} = \mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{R}') = \lambda\mathbf{I}$) 后的构形 $\mathscr{R}'$ 仍为非扭曲状态。

第七章　弹　　性

§7.1　弹　　性

一、定义

有一类材料，当参考构形$\mathscr{R}$给定后，物体中任何时刻t的Cauchy 应力张量$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)$只依赖于当时的变形梯度$\mathbf{D}(t)$（而不依赖于变形梯度的全部历史），即

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{D}(t)) \qquad (7.1.1)$$

式中$\mathbf{f}$为张量函数。服从本构方程(7.1.1)的材料，称为弹性材料。弹性材料是简单材料的特例，其本构方程(7.1.1)也是简单材料本构方程(6.1.2)′式的特例，只需在其中把泛函$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathbf{f}}}$改为函数$\mathbf{f}$，把作为自变量的变形梯度历史$\mathbf{D}(t-s)$ $(0\leqslant s<\infty)$改为当时的变形梯度$\mathbf{D}(t)$。$\mathbf{f}$称为反应函数。

关于弹性材料的许多结果都可以作为第六章"简单材料"结果的特例而得到。

二、标架无差异原理(PMI)对本构方程中反应函数f的要求

作为简单材料的特例，由(6.1.4)式，对于任意的变形梯度$\mathbf{D}$和任意的正交张量$\mathbf{Q}$，PMI 要求

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{D})\cdot\mathbf{Q}^{*}=\mathbf{f}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}) \qquad (7.1.2)$$

因(7.1.2)式中$\mathbf{D}=\mathbf{D}(t)$与$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(t)$，均为任意的，故自变量t均略去不写。(7.1.2)式称为 PMI 的不变性要求。

三、反应函数 $\mathbf{f}$ 依赖于参考构形 $\mathscr{R}$ 的选择

在弹性材料的本构方程(7.1.1)中，变形梯度 $\mathbf{D}(t)$ 是相对于某参考构形 $\mathscr{R}$ 而计算的，本来应记作 $\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(t)$。反应函数 $\mathbf{f}$ 也依赖于参考构形 $\mathscr{R}$ 的选择，原应记作 $\mathbf{f}_{(R)}$。由(6.1.8)式，对于任意两个参考构形 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{R}$，对于任意的 $\mathbf{D}$，反应函数 $\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}$ 与 $\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}$ 之间应满足关系：

$$\mathbf{f}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}) = \mathbf{f}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^{-1}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{R})) \tag{7.1.3}$$

四、本构方程的化简形式

为了简单起见，我们都略去自变量 t 不写。

作为简单材料的特例，由本构方程的第一种化简形式(6.2.3)式，得到

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}^* \tag{7.1.4}$$

由第四种化简形式(6.2.12)与第五种化简形式(6.2.13)亦可得到此结果，因为其中

$$\mathscr{U}_{(t)}(t-s)\big|_{s=0} = \mathscr{U}_{(t)}(t) = \mathbf{I}$$

由本构方程的第二种化简形式(6.2.4)，或者第六种形式(6.2.14)或第七种形式(6.2.18)得到

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}^* = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}^* \tag{7.1.5}$$

由本构方程的第三种化简形式(6.2.6)，可得

$$\overset{\ll}{\mathbf{t}} = \mathbf{g}(\mathbf{C}) \tag{7.1.6}$$

式中由(6.2.5)式，对流应力张量 $\overset{\ll}{\mathbf{t}}$ 的定义为

$$\overset{\ll}{\mathbf{t}} = \overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^* \cdot \overset{\gg}{\mathbf{t}} \cdot \overset{\times}{\mathbf{D}} \tag{7.1.7}$$

(7.1.4)式的含义是：将变形梯度 $\mathbf{D}$ 进行极分解，得到 $\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$。

让物体先产生右伸长张量 $\mathbf{U}$ 所表示的变形，然后将应力张量进行以 $\mathbf{R}$ 表示的旋转，即得 Cauchy 应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$，(7.1.5) 式的含义亦类似。

五、不可压缩弹性材料

作为不可压缩简单材料的特例，由(6.3.8)式得到本构方程

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = -p\mathbf{I} + \mathbf{f}(\mathbf{D}), \quad |\det\mathbf{D}| = 1 \tag{7.1.8}$$

利用(7.1.4)或(7.1.5)式的推导，(7.1.8)式可写作

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = -p\mathbf{I} + \mathbf{R}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{U})\cdot\mathbf{R}^* \tag{7.1.9}$$

或

$$\begin{aligned}\overset{\gg}{\mathbf{t}} &= -p\mathbf{I} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{h}(\mathbf{C})\cdot\mathbf{D}^* \\ &= -p\mathbf{I} + \mathbf{R}\cdot\mathbf{r}(\mathbf{C})\cdot\mathbf{R}^*\end{aligned} \tag{7.1.10}$$

利用(7.1.6)式的推导，则(7.1.8)式可写作

$$\overset{\ll}{\mathbf{t}} = -p\mathbf{I} + \mathbf{g}(\mathbf{C}) \tag{7.1.11}$$

以上各式右端第一项的 p 为不可定压力。不失广泛性，可以规定右端第二项为偏斜张量。

六、弹性固体

弹性固体是弹性材料，也是简单固体的特例。作为一种弹性材料，由(7.1.1)式，Cauchy 应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)$ 只依赖于当时的变形梯度 $\mathbf{D}(t)$。同时，它又是 §6.6 的简单固体，由(6.6.1)式，对于某参考构形 $\mathscr{R}$，材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}\subseteq\mathscr{O}$。$\mathscr{R}$ 为非扭曲状态。$\mathscr{R}$ 经过任意的正交变换以后所达到的 $\mathscr{R}'$ 亦为非扭曲状态。应力张量为零的非扭曲状态称为自然状态。

设参考构形 $\mathscr{R}$ 为自然状态，则由(7.1.4)—(7.1.6)式，

$$\mathbf{f}(\mathbf{I}) = \mathbf{h}(\mathbf{I}) = \mathbf{r}(\mathbf{I}) = \mathbf{g}(\mathbf{I}) = \mathbf{0} \tag{7.1.12}$$

七、弹性流体即传统的理想流体

弹性流体是弹性材料，故 Cauchy 应力张量 $\mathbf{t}(t)$ 只依赖于当时的变形梯度 $\mathbf{D}(t)$。同时，它又是 § 6.5 的简单流体，故 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}=\mathscr{U}$，且任意的构形均为无扭曲状态。

由 (6.5.11b) 式，其中 $\mathbf{E}_{(t)}(t)=\mathbf{0}$

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{q}(\rho)\cdot\mathbf{Q}^*=\mathbf{q}(\rho),\ \mathbf{Q}\in\mathscr{O}$$

故 $\mathbf{q}(\rho)$ 为球形张量，记作

$$\mathbf{q}(\rho)=-q(\rho)\mathbf{I} \tag{7.1.13}$$

因此本构方程(6.5.10)′右端两项均为球形张量，可合并记作

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}=-p(\rho)\mathbf{I} \tag{7.1.14}$$

这就是传统的理想流体本构方程。

当然也存在这样的弹性材料，它既非弹性固体，也非弹性流体，称为弹性液晶。弹性液晶是简单液晶(见§6.6)的特例。

§ 7.2 各向同性弹性

一、各向同性弹性材料的定义，本构方程

若弹性材料对于某参考构形 $\mathscr{R}$，材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}\supseteq\mathscr{O}$，则称此材料为各向同性弹性材料，且称构形 $\mathscr{R}$ 为非扭曲状态。

以后总假定参考构形 $\mathscr{R}$ 为非扭曲状态。

作为各向同性简单材料的特例，由(6.4.8)式，对于任意的 $\mathbf{D}$，任意的 $\mathbf{Q}\in\mathscr{O}$ 反应函数 $\mathbf{f}$ 应满足各向同性条件：

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{D})\cdot\mathbf{Q}^*=\mathbf{f}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Q}^*) \tag{7.2.1}$$

因此 $\mathbf{f}$ 为各向同性张量函数。

利用(6.4.11)式，可以将 $\mathbf{f}$ 应满足的各向同性条件(7.2.1)式表示成为(7.1.4)—(7.1.6)诸式中的函数 $\mathbf{f}(\mathbf{U})$，$\mathbf{h}(\mathbf{C})$ 或 $\mathbf{r}(\mathbf{C})$，$\mathbf{g}(\mathbf{C})$

应满足的各向同性条件：

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{U})\cdot\mathbf{Q}^{*}=\mathbf{f}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{Q}^{*})$$

对于任意的 $\mathbf{U}$，任意的 $\mathbf{Q}\in\mathscr{O}$ (7.2.2)

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{h}(\mathbf{C})\cdot\mathbf{Q}^{*}=\mathbf{h}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{Q}^{*})$$

或

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}(\mathbf{C})\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{r}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{Q}^{*})$$

对于任意的 $\mathbf{C}$，任意的 $\mathbf{Q}\in\mathscr{O}$ (7.2.3)

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{C})\cdot\mathbf{Q}^{*}=\mathbf{g}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{Q}^{*})$$

对于任意的 $\mathbf{C}$，任意的 $\mathbf{Q}\in\mathscr{O}$ (7.2.4)

因此 $\mathbf{f}$，$\mathbf{h}$ 或 $\mathbf{r}$，$\mathbf{g}$ 都是各向同性张量函数。(7.2.1)—(7.2.4)各式实际上就是简单材料各向同性条件(6.4.8)，(6.4.13)—(6.4.19)(其中 $\mathbf{Q}$ 为任意正交张量)的特例。

利用各向同性条件 (7.2.2) 式与 (6.4.21a) 式，可将本构方程(7.1.4)写成

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}=\mathbf{f}(\mathbf{V}) \tag{7.2.5}$$

利用各向同性条件(7.2.3)式与 (6.4.21b) 式，可将本构方程(7.1.5)写作

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}=\mathbf{r}(\mathbf{B}) \tag{7.2.6}$$

由(7.1.6)与(7.1.7)式也可得到(7.2.6)式的形式。

(7.2.5)式是各向同性简单材料的本构方程(6.4.22)或(6.4.23)的特例，而(7.2.6)式则是(6.4.24)或(6.4.25)式的特例。

由各向同性条件，并利用(6.4.11)式，可证明 $\mathbf{f}(\mathbf{V})$ 与 $\mathbf{r}(\mathbf{B})$ 必为各向同性张量函数。这就是说：若保持参考构形 $\mathscr{R}$ (非扭曲状态)不变，把材料的变形张量作一个正交变换(即旋转，$\mathbf{V}$ 或 $\mathbf{B}$ 各变成 $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{Q}^{*}$ 或 $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}^{*}$)，则应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 也作同一个正交变换(即旋转，$\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 变成 $\mathbf{Q}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{Q}^{*}$)。显然，只有当材料为各向同性时，这才是正确的。例如图 6.2 中的木材，如 $E_{\parallel}$ 不等于 $E_{\perp}$，把拉伸变形方向旋转 90°，应力并不仅仅是旋转 90° (因为顺纹拉伸变

成横纹拉伸，应力数值改变了)。

因为 $\mathbf{f}(\mathbf{V})$ 与 $\mathbf{r}(\mathbf{B})$ 都是各向同性张量函数，故可利用张量分析中的 Canchy 基本表示定理写下本构方程(7.2.5)与(7.2.6)的分量形式。例如(7.2.6)的分量形式为

$$t_{ij} = r_{ij}(B_{kl}, g_{mn}) \tag{7.2.7}$$

(7.2.7)式是各向同性简单材料(6.4.27)式的特例。

二、反应函数的表示定理

利用各向同性张量函数的表示定理，反应函数(7.2.5)或(7.2.6)式可以表示成自变量(张量)的二次多项式。例如(7.2.6)式可表示成

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = \varphi_0\mathbf{I} + \varphi_1\mathbf{B} + \varphi_2\mathbf{B}^2 \tag{7.2.8}$$

式中 $\varphi_i(i = 0, 1, 2)$ 称为反应系数，是 $\mathbf{B}$ 的三个主不变量的函数。

$$\varphi_i = \varphi_i(\mathscr{J}_1^B, \mathscr{J}_2^B, \mathscr{J}_3^B) \quad i = 0, 1, 2 \tag{7.2.9}$$

此三个函数为材料函数。

利用 Hamilton-Cayley 等式：

$$\mathbf{B}^3 - \mathscr{J}_1^B\mathbf{B}^2 + \mathscr{J}_2^B\mathbf{B} - \mathscr{J}_3^B\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

得

$$\mathbf{B}^2 = \mathscr{J}_1^B\mathbf{B} - \mathscr{J}_2^B\mathbf{I} + \mathscr{J}_3^B\mathbf{B}^{-1} \tag{7.2.10}$$

将(7.2.10)代入(7.2.8)式，得

$$\begin{aligned}\overset{\gg}{\mathbf{t}} &= \varphi_0\mathbf{I} + \varphi_1\mathbf{B} + \varphi_2(\mathscr{J}_1^B\mathbf{B} - \mathscr{J}_2^B\mathbf{I} + \mathscr{J}_3^B\mathbf{B}^{-1}) \\ &= \Phi_0\mathbf{I} + \Phi_1\mathbf{B} + \Phi_{-1}\mathbf{B}^{-1}\end{aligned} \tag{7.2.11}$$

式中 $\Phi_i(i = 0, 1, -1)$ 为材料函数，亦称反应系数；

$$\Phi_i = \Phi_i(\mathscr{J}_1^B, \mathscr{J}_2^B, \mathscr{J}_3^B) \quad i = 0, 1, -1 \tag{7.2.12}$$

Φ_i 与 φ_j 可以互相表示如下：

$$\Phi_0 = \varphi_0 - \mathscr{J}_2^B\varphi_2, \ \Phi_1 = \varphi_1 + \mathscr{J}_1^B\varphi_2, \ \Phi_{-1} = \mathscr{J}_3^B\varphi_2 \tag{7.2.13}$$

$$\varphi_0 = \Phi_0 + \frac{\mathscr{J}_2^B}{\mathscr{J}_3^B}\Phi_{-1},\quad \varphi_1 = \Phi_1 - \frac{\mathscr{J}_1^B}{\mathscr{J}_3^B}\Phi_{-1},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\mathscr{J}_3^B}\Phi_{-1} \tag{7.2.14}$$

以后在讨论各向同性弹性材料时，如不特别声明，总假定取非扭曲状态为参考构形。对于此参考构形本身，必有

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$$

由(7.2.8)或(7.2.11)式，得到在参考构形(非扭曲状态)中 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 为 $\mathbf{I}$ 的倍数，故为球形张量。因此各向同性材料非扭曲状态的应力必为球形张量，即承受三向等拉(或压)。

由(7.2.8)或(7.2.11)式，各向同性材料的 Cauchy 应力张量 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 必与左伸长张量 $\overset{\gg}{\mathbf{B}} = \overset{\gg}{\mathbf{c}}^{-1}$ 具有相同的主方向。而 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 的主值则可由(7.2.8)或(7.2.11)式得出①：

$$\begin{aligned} t_i &= \varphi_0 + \varphi_1 v_i^2 + \varphi_2 v_i^4 \\ &= \Phi_0 + \Phi_1 v_i^2 + \Phi_{-1} v_i^{-2} \qquad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{7.2.15}$$

式中 $v_i(i=1,2,3)$ 表示 $\mathbf{V} = \mathbf{B}^{1/2}$ 的主值，故 $\mathbf{B}$ 的主值为 $v_i^2(i=1, 2, 3)$。

因 $\varphi_i(i = 1, 2, 3)$ 或 $\Phi_i(i = 0, 1, -1)$ 为 $\mathscr{J}_1^B$, $\mathscr{J}_2^B$ 与 $\mathscr{J}_3^B$ 的函数，故为 v_i 的对称函数。将 t_1 记作 $f(v_1, v_2, v_3)$，即由(7.2.15)式，

$$t_1 = \varphi_0 + \varphi_1 v_1^2 + \varphi_2 v_1^4 = f(v_1, v_2, v_3) \tag{7.2.16}$$

式中 $f(v_1, v_2, v_3)$ 对于 v_2 与 v_3 为对称，即

$$f(v_1, v_2, v_3) = f(v_1, v_3, v_2)$$

而

---

① $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 的主值宜用 $t_{(i)}(i = 1, 2, 3)$ 表示，把指标 i 放在括号内，以免与张量或矢量指标混淆，但此处为简单起见，仍记作 t_i。$\overset{\gg}{\mathbf{V}}$ 的主值则记作 v_i。

$$t_2 = \varphi_0 + \varphi_1 v_2^2 + \varphi_2 v_2^4$$
$$t_3 = \varphi_0 + \varphi_1 v_3^2 + \varphi_2 v_3^4$$

故必有

$$t_2 = f(v_2, v_1, v_3) = f(v_2, v_3, v_1)$$
$$t_3 = f(v_3, v_1, v_2) = f(v_3, v_2, v_1)$$

总之

$$t_i = f(v_i, v_j, v_k) = f(v_i, v_k, v_j)$$
$$i \neq j \neq k \tag{7.2.17}$$

故各向同性弹性材料的本构方程完全取决于一个三变量的标量函数

$$f(\xi, \eta, \zeta)$$

它对第二与第三自变量，η 与 ζ，是对称的。

对于各向同性弹性材料，第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}$ 的(6.2.3)″与(6.2.4)″式中的泛函 $\bar{\bar{\mathbf{f}}}$ 与 $\mathbf{h}$ 应改为函数 $\bar{\bar{\mathbf{f}}}(\mathbf{U}(t))$ 与 $\mathbf{h}(\mathbf{C}(t))$。函数 $\bar{\bar{\mathbf{f}}}$ 与 $\mathbf{h}$ 各为 $\mathbf{U}$ 与 $\mathbf{C}$ 的各向同性张量函数，故可表示为类似于(7.2.8)或(7.2.11)式的 $\mathbf{U}(=\mathbf{C}^{1/2})$ 或 $\mathbf{C}$ 的多项式。因此 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{T}}$ 与 $\overset{\langle\langle}{\mathbf{C}}$ 具有相同的主方向。在 §4.7 中我们已经提到过这一点。

三、不可压缩弹性材料

内部约束条件为(由(6.3.7)式)

$$\mathscr{J}_3^B = \det\mathbf{B} = 1 \tag{7.2.18}$$

故对于不可压缩弹性材料，(7.2.9)或(7.2.12)式中的自变量只有 $\mathscr{J}_1^B$ 与 $\mathscr{J}_2^B$。本构方程(7.2.8)与(7.2.11)式成为（不失去广泛性，可令 $\varphi_0 = 0$，$\Phi_0 = 0$）

$$\overset{\rangle\rangle}{\mathbf{t}} = -p\mathbf{I} + \varphi_1\mathbf{B} + \varphi_2\mathbf{B}^2 \tag{7.2.19}$$

$$\overset{\lor}{\mathbf{t}} = -\bar{p}\mathbf{I} + \Phi_1\mathbf{B} + \Phi_{-1}\mathbf{B}^{-1} \qquad (7.2.20)$$

式中反应系数 φ_i 或 Φ_i 只是 $\mathscr{I}_1^B$ 与 $\mathscr{I}_2^B$ 的函数。

利用(7.2.10)式，可证(7.2.19)与(7.2.20)式中系数的关系：

$$-\bar{p} = -p - \mathscr{I}_2^B\varphi_2,\ \ \Phi_1 = \varphi_1 + \mathscr{I}_1^B\varphi_2, \Phi_{-1} = \varphi_2 \qquad (7.2.21)$$

§7.3 可压缩各向同性材料的均匀应变之例

设取自然状态为参考构形。

例 1 简单伸长，如图 7.1。

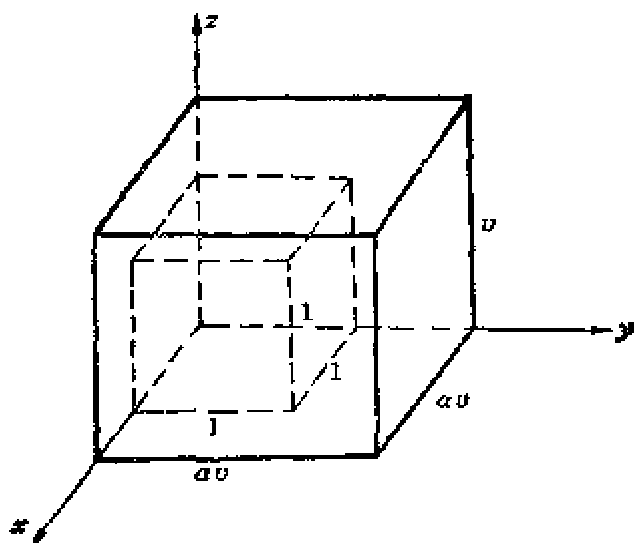


图 7.1

取笛卡儿坐标 x, y, z 方向为 $\mathbf{V} = \mathbf{B}^{1/2}$ 之主方向，并设 $\mathbf{B}$ 之主值为

$$v_1 = v_2 = \alpha v, \quad v_3 = v \qquad (7.3.1)$$

则

$$\mathscr{I}_1^B = (1 + 2\alpha^2)v^2, \quad \mathscr{I}_2^B = (2 + \alpha^2)\alpha^2 v^4,$$
$$\mathscr{I}_3^B = \alpha^4 v^6 \qquad (7.3.2)$$

由(7.2.15)式，Cauchy 应力张量 $\overset{\lor}{\mathbf{t}}$ 的主值为

$$t_{xx} = t_{yy} = \Phi_0 + \alpha^2 v^2 \Phi_1 + \alpha^{-2} v^{-2} \Phi_{-1}$$

$$t_{zz} = \Phi_0 + v^2 \Phi_1 + v^{-2} \Phi_{-1} \tag{7.3.3}$$

如果图 7.1 的柱体只沿 z 轴方向单向受拉，由于材料处于均匀应力状态，且侧面为自由，即 $t_{xx} = t_{yy} = 0$，则由(7.3.3)式，α 与 v 之间满足关系：

$$\Phi_0(\alpha^2, v^2) + \alpha^2 v^2 \Phi_1(\alpha^2, v^2) + \alpha^{-2} v^{-2} \Phi_{-1}(\alpha^2, v^2) = 0 \tag{7.3.4}$$

给定 v，由此式可解出 α^2。可能出现三种情况：

(1) α^2 有唯一的实数解；

(2) α^2 无实数解，这表示在单向拉力作用下不可能实现(7.3.1)式所示的简单伸长；

(3) α^2 有实数解，但不唯一，这表示对应于同一个 v 值，可能有不止一个的简单伸长状态。

例 2 均匀膨胀

$$v_1 = v_2 = v_3 = v \tag{7.3.5}$$

此为例 1 的特殊情况($\alpha = 1$)。由(7.3.3)式

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = -p(v)\mathbf{I} \tag{7.3.6}$$

式中

$$p(v) = -\Phi_0(3v^2, 3v^4, v^6) - v^2\Phi_1(3v^2, 3v^4, v^6)$$
$$- v^{-2}\Phi_{-1}(3v^2, 3v^4, v^6) \tag{7.3.7}$$

例 3 简单剪切，即 § 2.11 的例 3 (图 2.4)。把笛卡儿坐标 X_{I}, X_{II}, X_{III} 记作 X, Y, Z，笛卡儿坐标 x_1, x_2, x_3 记作 x, y, z，则变形后与变形前坐标变换关系式为

$$x = X + SY, \quad y = Y, \quad z = Z \tag{7.3.8}$$

式中 S 为剪切角 γ 的正切，即 $S = \tan\gamma$。利用 § 2.11 中例 3 的结果，左 Cauchy-Green 变形张量与 Canchy 变形张量的矩阵各为

$$\|\mathbf{B}\| = \|\overset{\gg}{\mathbf{c}}{}^{-1}\| = \begin{Vmatrix} 1 + S^2 & S & 0 \\ S & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\|\overset{-1}{\mathbf{B}}\| = \|\overset{\gg}{\mathbf{c}}\| = \left\|\begin{matrix} 1 & -S & 0 \\ -S & 1+S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \tag{7.3.9}$$

B 与 **C** 的主值均为

$$\begin{aligned} v_1^2 &= 1 + \frac{1}{2}S^2 + S\sqrt{1 + \frac{1}{4}S^2} \\ v_2^2 &= 1 + \frac{1}{2}S^2 - S\sqrt{1 + \frac{1}{4}S^2} \\ v_3^2 &= 1 \end{aligned} \tag{7.3.10}$$

B 的主方向为

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \left[2 + \frac{1}{2}S^2 - S\sqrt{1 + \frac{1}{4}S^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left[\mathbf{i}_1 + \left(-\frac{1}{2}S + \sqrt{1 + \frac{1}{4}S^2}\right)\mathbf{i}_2\right] \\ \mathbf{n}_2 &= \left[2 + \frac{1}{2}S^2 + S\sqrt{1 + \frac{1}{4}S^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left[-\mathbf{i}_1 + \left(\frac{1}{2}S + \sqrt{1 + \frac{1}{4}S^2}\right)\mathbf{i}_2\right] \\ \mathbf{n}_3 &= \mathbf{i}_3 \end{aligned} \tag{7.3.11}$$

当剪切角 γ 趋于零即 $S = \tan\gamma \to 0$ 时，

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}_2 \\ \mathbf{n}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}_2 \\ \mathbf{n}_3 &= \mathbf{i}_3 \end{aligned} \tag{7.3.12}$$

而当 $S \to \infty$ 时

$$\mathbf{n}_1 \to \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{n}_2 \to \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{n}_3 \to \mathbf{i}_3 \tag{7.3.13}$$

将 (7.3.9) 式记作

$$\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{I}\| + S\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + S^2\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\|\overset{-1}{\mathbf{B}}\| = \|\mathbf{I}\| - S\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + S^2\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

代入(7.2.11)式，得

$$\begin{aligned}\|\overset{\gg}{\mathbf{t}}\| &= \Phi_0\|\mathbf{I}\| + \Phi_1\|\mathbf{B}\| + \Phi_{-1}\|\overset{-1}{\mathbf{B}}\| \\ &= (\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_{-1})\|\mathbf{I}\| + (\Phi_1 - \Phi_{-1})S \\ &\quad \times \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + \Phi_1 S^2\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \\ &\quad + \Phi_{-1}S^2\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\end{aligned} \tag{7.3.14}$$

由(7.3.9)式，**B** 与 **C** 的三个主不变量为

$$\mathscr{I}_1^B = \mathscr{I}_1^C = 3 + S^2, \quad \mathscr{I}_2^B = \mathscr{I}_2^C = 3 + S^2$$

$$\mathscr{I}_3^B = \mathscr{I}_3^C = 1 \tag{7.3.15}$$

因此简单剪切属于等体变形 ($\mathscr{I}_3^B = \mathscr{I}_3^C = 1$)，反应系数(7.2.12)式为①

$$\Phi_i(S^2) = \Phi_i(3 + S^2, 3 + S^2, 1) \quad i = 0, 1, -1 \tag{7.3.16}$$

由(7.3.14)式可得 Cauchy 应力张量的分量为

$$t_{xy} = t_{yx} = [\Phi_1(S^2) - \Phi_{-1}(S^2)]S \xlongequal{\text{记作}} \mu(S^2)S$$

$$t_{xz} = t_{zx} = t_{yz} = t_{zy} = 0$$

---

① 为简单起见，(7.3.16) 式两端的函数虽然不同，但用相同的字母 Φ_i 表示。

$$t_{xx} = [\Phi_0(S^2) + \Phi_1(S^2) + \Phi_{-1}(S^2)] + \Phi_1(S^2)S^2$$
$$t_{yy} = [\Phi_0(S^2) + \Phi_1(S^2) + \Phi_{-1}(S^2)] + \Phi_{-1}(S^2)S^2 \quad (7.3.17)$$
$$t_{zz} = \Phi_0(S^2) + \Phi_1(S^2) + \Phi_{-1}(S^2)$$

式中

$$\mu(S^2) = \Phi_1(S^2) - \Phi_{-1}(S^2) \quad (7.3.18)$$

当 $S \to 0$ 时(小应变情况),

$$\mu(0) = \mu \quad (7.3.19)$$

μ 为线弹性理论的剪切弹性模量。 $\mu(S^2)$ 可称为广义或割线剪切模量，它是 S 的偶函数。由(7.3.17)式，$t_{xy} = t_{yx}$ 为 S 的奇函数；若 S 变号，则 t_{xy} 亦变号。可以预料

$$\mu(S^2) > 0 \quad (7.3.20)$$

取(7.3.17)式中 t_{xx} 与 t_{yy} 之差，并利用(7.3.18)式，得

$$t_{xx} - t_{yy} = [\Phi_1(S^2) - \Phi_{-1}(S^2)]S^2 = \mu(S^2)S^2 \quad (7.3.21)$$

故

$$t_{xx} - t_{yy} = St_{xy} \quad (7.3.22)$$

因此当 $S \neq 0$ 时

$$t_{xx} > t_{yy}$$

这说明在简单剪切情况下存在着其值不相等的正应力 t_{xx} 与 t_{yy}，这个现象称为 Poynting 效应。 这与线弹性理论有重要的区别。在线弹性理论中，$S \to 0$，$t_{xy} = O(S)$ 为线性，而

$$t_{xx} - t_{yy} = O(S^2)$$

则属于二次效应。 二次效应不一定表现在 t_{xy} 与 S 的关系为非线性，而表现在必定有正应力存在。(7.3.22)式是一个普遍关系，对于任何可压缩各向同性弹性材料都成立。

§ 7.4 非线性连续介质力学的方法

在本书的引言中对于非线性连续介质力学曾经作过广泛的讨

论。现在我们以均质各向同性可压缩弹性材料为例来作具体的阐述。

简单地说，非线性连续介质力学的任务是列出本构方程并解边值问题。首先，在第四至第六章（适用于本书所研究的一切材料），作了以下的假定：

(1) 假定在一物体内的相互体力可以略去；

(2) 假定偶应力与体力偶可以不计；

(3) 假定应力只取决于局部运动史；

(4) 假定只需要考虑一阶变形梯度。

这些假定定义了一类材料，即简单材料。当然，一切的本构方程都应满足坐标不变性(采用张量记法，已自动满足)与标架不变性(即标架无差异原理 PMI)。PMI对所有简单材料的一般本构方程规定了不变性要求。

弹性材料按定义只取决于当前构形而与变形史无关。对于匀质材料，整个材料相对于某一总体参考构形的本构方程是相同的。各向同性材料是这样一种材料，对于非扭曲状态，其材料对称群包含全体正交变换群。由此得到本构方程(7.2.11)的形式，其中 $\Phi_i(i=0, 1, -1)$ 为三个材料函数，称为反应系数。它们是三个主不变量 $\mathscr{I}_i^B(i=1, 2, 3)$ 或三个主伸长 v_i 的函数。然后我们证明了这三个函数仅取决于一个如 (7.2.16) 式所定义的材料函数 $f(v_1, v_2, v_3)$，这个函数对于后二个变量 v_2 与 v_3 为对称。材料函数 Φ_i 或 f 一般由试验确定。因此我们看到，连续介质力学把一种特殊的材料性质，归结为某一类确定形式的本构方程中的材料函数。

对于均质的可压缩弹性材料，材料函数可以由均匀变形的试验确定。在前一节 (§ 7.3) 中，我们讨论了三种均匀变形：简单伸长，均匀膨胀与简单剪切。应该注意到，在这三个例子中，我们尚未知道材料函数的具体形式或数值，但是却求得了一部分边值问

题的解。(7.3.22)式不包含任何的材料函数或常数，故可用来作为材料是否均质的各向同性可压缩弹性材料的一种检验。简单伸长(包括均匀膨胀)情况的主伸长为(v, αv, αv)，而简单剪切情况则为(v, v^{-1}, 1)。它们只涉及到两个变量 v 与 α，所以不可能设想只从这两种均匀变形的试验能得到(v_1, v_2, v_3)的任意组合。我们还必须补充其他更一般的均匀变形试验。对于所感兴趣的(v_1, v_2, v_3)范围的均匀变形进行试验的结果，可以确定依赖于主变形分量或主不变量的材料函数。如果我们相信材料为均质的各向同性可压缩弹性材料，则非线性连续介质力学告诉我们，为了确定材料性质必须做哪一些试验。

知道了材料的函数以后，就可以求解非均匀变形情况的边值问题。

§7.5　不可压缩各向同性弹性材料

我们来讨论均匀变形情况。

在简单伸长情况(§7.3，例1)，沿 z 轴方向的伸长为 v，则横向伸长 αv 可由等体条件确定：

$$(\alpha v)^2 v = 1, \qquad \alpha = v^{-3/2} \tag{7.5.1}$$

由(7.2.20)式，

$$\begin{aligned} t_{xx} &= t_{yy} = -\bar{p} + v^{-1}\Phi_1 + v\Phi_{-1} \\ t_{zz} &= -\bar{p} + v^2\Phi_1 + v^{-2}\Phi_{-1} \end{aligned} \tag{7.5.2}$$

式中 Φ_1 与 Φ_{-1} 为下列两个主不变量(第三主不变量 $\mathscr{T}_3^B = 1$)的函数：

$$\mathscr{I}_1^B = 2v^{-1} + v^2, \quad \mathscr{I}_2^B = 2v + v^{-2} \tag{7.5.3}$$

在(7.5.2)式中 $\bar{p}$ 可以为任意值，故对于任意的 v，可选 $\bar{p}$ 使 $t_{xx} = t_{yy} = 0$，使得只在 t_{zz} 作用(即单向拉伸)下实现简单伸长。此时由(7.5.2)式

$$t_{xx} = t_{yy} = 0$$

$$t_{yx} = \left(v^2 - \frac{1}{v}\right)\Phi_1 + \left(\frac{1}{v^2} - v\right)\Phi_{-1} \tag{7.5.4}$$

对于不可压缩各向同性弹性材料，由(7.2.20)式，在任意的均匀变形情况下，主应力与主伸长关系为

$$t_i = -\bar{p} + v_i^2\Phi_1 + v_i^{-2}\Phi_{-1},\quad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{7.5.5}$$

式中

$$v_1 v_2 v_3 = 1 \tag{7.5.6}$$

$\bar{p}$ 为任意值，反应系数 Φ_1 与 Φ_{-1} 为第一与第二主不变量的函数。可以选择 $\bar{p}$，使得某一个方向的 t_i 等于零，这样应力状态就成为平面应力了。若令 $t_3 = 0$，则得

$$\begin{aligned} t_1 &= (v_1^2 - v_3^2)\Phi_1 + (v_1^{-2} - v_3^{-2})\Phi_{-1} \\ &= \left(v_1^2 - \frac{1}{v_1^2 v_2^2}\right)(\Phi_1 - v_2^2\Phi_{-1}) \\ t_2 &= (v_2^2 - v_3^2)\Phi_1 + (v_2^{-2} - v_3^{-2})\Phi_{-1} \\ &= (v_2^2 - v_3^2)(\Phi_1 - v_1^2\Phi_{-1}) \\ t_3 &= 0 \end{aligned} \tag{7.5.7}$$

变化 v_1 与 v_2 的值，可以得到 $\mathscr{I}_1^B$ 与 $\mathscr{I}_2^B$ 的任意值。因此，只要用平面应力试验就可得到在 $(\mathscr{I}_1^B,\ \mathscr{I}_2^B)$ 的任何所需范围内的材料函数 Φ_1 与 Φ_{-1}，这就比可压缩材料省事多了。

第八章　热弹性与超弹性

§8.1 热弹性材料

在第五至第七章关于本构方程的讨论中，我们几乎完全回避并略去了热力学的变量与原理，建立的是纯机械的弹性理论。在本章中将扩大弹性材料的概念，以便把热力学考虑进来。我们将做一些有关热变量的假定，并且由熵不等式导出若干推论。在§8.2中将讨论在什么样的热力学条件下纯机械的弹性材料理论成立。

一、热弹性材料的定义

符合以下本构方程的材料称为热弹性材料：

$$\mathbf{t}(t)=\underset{\cdot}{t}(\mathbf{D}(t),\theta(t),\boldsymbol{\Theta}(t)) \tag{8.1.1}$$

$$\eta(t)=\underset{\cdot}{\eta}(\mathbf{D}(t),\theta(t),\boldsymbol{\Theta}(t)) \tag{8.1.2}$$

$$\phi(t)=\underset{\cdot}{\phi}(\mathbf{D}(t),\theta(t),\boldsymbol{\Theta}(t)) \tag{8.1.3}$$

$$\mathbf{h}(t)=\underset{\cdot}{h}(\mathbf{D}(t),\theta(t),\boldsymbol{\Theta}(t)) \tag{8.1.4}$$

式中 $\mathbf{t}$ 为 Canchy 应力张量，η 为熵的质量密度，$\phi=e-\theta\eta$ 为自由能的质量密度，$\mathbf{h}$ 为热流矢量，$\underset{\cdot}{t}$，$\underset{\cdot}{\eta}$，$\underset{\cdot}{\phi}$，$\underset{\cdot}{h}$ 为反应函数，它们的自变量为变形梯度 $\mathbf{D}(t)$，温度 $\theta(t)$ 与温度梯度 $\nabla\theta(t)=\boldsymbol{\Theta}(t)$。如果材料为非均质，(8.1.1)—(8.1.4)式中还可能显含 X(表示物质质点)。

在(8.1.1)—(8.1.4)式中已假定选择了某一参考构形。当然反应函数 $\underset{\cdot}{t}, \underset{\cdot}{\eta}, \underset{\cdot}{\psi}, \underset{\cdot}{h}$ 依赖于参考构形的选择。

二、标架无差异原理(PMI)与熵不等式的推论

本构方程(8.1.1)—(8.1.4)都应满足 PMI，也就是说，若把所有的量都改为其标架转换量(加"～"号表示)，本构方程仍然成立，因此

$$\tilde{\mathbf{t}}(t) = \underset{\cdot}{t}(\tilde{\mathbf{D}}(t), \tilde{\theta}(t), \tilde{\boldsymbol{\Theta}}(t))$$

$$\tilde{\eta}(t) = \underset{\cdot}{\eta}(\tilde{\mathbf{D}}(t), \tilde{\theta}(t), \tilde{\boldsymbol{\Theta}}(t))$$

$$\tilde{\psi}(t) = \underset{\cdot}{\psi}(\tilde{\mathbf{D}}(t), \tilde{\theta}(t), \tilde{\boldsymbol{\Theta}}(t))$$

$$\tilde{\mathbf{h}}(t) = \underset{\cdot}{h}(\tilde{\mathbf{D}}(t), \tilde{\theta}(t), \tilde{\boldsymbol{\Theta}}(t))$$

利用§5.2许多例子中所讨论的各个量的标架转换关系，上式可写作

$$\mathbf{Q} \cdot \underset{\cdot}{t}(\mathbf{D}, \theta, \boldsymbol{\Theta}) \cdot \mathbf{Q}^* = \underset{\cdot}{t}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}, \theta, \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Theta}) \tag{8.1.5}$$

$$\underset{\cdot}{\eta}(\mathbf{D}, \theta, \boldsymbol{\Theta}) = \underset{\cdot}{\eta}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}, \theta, \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Theta}) \tag{8.1.6}$$

$$\underset{\cdot}{\psi}(\mathbf{D}, \theta, \boldsymbol{\Theta}) = \underset{\cdot}{\psi}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}, \theta, \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Theta}) \tag{8.1.7}$$

$$\mathbf{Q} \cdot \underset{\cdot}{h}(\mathbf{D}, \theta, \boldsymbol{\Theta}) = \underset{\cdot}{h}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}, \theta, \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Theta}) \tag{8.1.8}$$

以上各式对于任意的 $\mathbf{D}$, θ, $\boldsymbol{\Theta}$ 及任意的正交变换 $\mathbf{Q}$ 均成立。(8.1.5)—(8.1.8)是 PMI 对反应函数的要求。

现在来应用熵不等式(4.9.8)：

$$\gamma \geqslant 0 \tag{4.9.8}$$

式中 γ 为每单位质量的熵生成率。(4.9.13)式给出

$$\theta\gamma = -\dot{\psi} - \eta\dot{\theta} + \frac{1}{\rho}\mathbf{t}:\mathbf{d} - \frac{1}{\rho\theta}\mathbf{h} \cdot (\theta\nabla) \tag{4.9.13}$$

此式是利用热力学第一定律(4.8.14)式与热力学第二定律(4.9.7)式消去热源密度 σ 的结果。上式右端出现的 $\dot{\phi}$ 可以利用(8.1.3)式计算：

$$\dot{\phi}=\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{D}}:\dot{\mathbf{D}}+\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\Theta}}\cdot\dot{\boldsymbol{\Theta}}$$

利用(3.2.5)式 $\dot{\mathbf{D}}=\mathbf{L}\cdot\mathbf{D}$，并记

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{D}}=\partial_{\mathbf{D}}\phi$$

则上式可写作

$$\dot{\phi}=\mathrm{tr}[\mathbf{D}\cdot(\partial_{\mathbf{D}}\phi)^{*}\cdot\mathbf{L}]+(\partial_{\theta}\phi)\dot{\theta}+(\partial_{\boldsymbol{\Theta}}\phi)\cdot\dot{\boldsymbol{\Theta}}\quad(8.1.9)$$

而(4.9.13)式中的 $\mathbf{t}:\mathbf{d}$ 则可写作

$$\mathbf{t}:\mathbf{d}=\mathrm{tr}(\mathbf{t}\cdot\mathbf{d})=\mathrm{tr}(\mathbf{t}\cdot\mathbf{L})$$

将以上二式代入(4.9.13)式中，乘以 ρ 再并项与化简后，得到熵不等式：

$$\begin{aligned}\rho\theta\gamma=\ &\mathrm{tr}\{[\mathbf{t}(\mathbf{D},\theta,\boldsymbol{\Theta})-\rho\mathbf{D}\cdot(\partial_{\mathbf{D}}\phi(\mathbf{D},\theta,\boldsymbol{\Theta}))^{*}]\cdot\mathbf{L}\}\\&-\rho\{\eta(\mathbf{D},\theta,\boldsymbol{\Theta})+\partial_{\theta}\phi(\mathbf{D},\theta,\boldsymbol{\Theta})\}\dot{\theta}\\&-\frac{1}{\theta}\mathbf{h}(\mathbf{D},\theta,\boldsymbol{\Theta})\cdot\boldsymbol{\Theta}-\rho(\partial_{\boldsymbol{\Theta}}\phi(\mathbf{D},\theta,\boldsymbol{\Theta}))\cdot\dot{\boldsymbol{\Theta}}\geqslant 0\end{aligned}\quad(8.1.10)$$

(8.1.10)式对于任意的 $\mathbf{D}$, $\mathbf{L}=\dot{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{D}^{-1}$, $\theta,\dot{\theta},\boldsymbol{\Theta}$, 与 $\dot{\boldsymbol{\Theta}}$ 均成立。为了实现这一组任意值，只需在物体上加一定的体力 $\mathbf{f}$（由 Canchy 第一运动律(4.3.3)式决定）与一定的热源密度 σ（由热力学第一定律(4.8.14)式决定）。

由(8.1.10)式可得以下的推论：

1. 熵不等式(8.1.10)式对任意的 $\dot{\boldsymbol{\Theta}}$ 成立，但是式左端对于 $\dot{\boldsymbol{\Theta}}$ 为

线性，故为了不破坏熵不等式，要求含 $\dot{\Theta}$ 的项为零，即

$$\partial_{\dot{\Theta}}\underset{\cdot}{\phi}(\mathbf{D},\theta,\Theta)=0$$

这就是说，自由能函数 $\underset{\cdot}{\phi}$ 与温度梯度 Θ 无关，故(8.1.3)式应改为

$$\phi(t)=\underset{\cdot}{\phi}(\mathbf{D}(t),\theta(t)) \tag{8.1.3$'$}$$

2. 同样，熵不等式(8.1.10)对任意的 $\mathbf{L}$ 成立，但式左端对于 $\mathbf{L}$ 为线性，故必有

$$\underset{\cdot}{t}(\mathbf{D},\theta,\Theta)-\rho\mathbf{D}\cdot(\partial_{\mathbf{D}}\underset{\cdot}{\phi}(\mathbf{D},\theta,\Theta))^*=0$$

利用(8.1.3)$'$式，由上式可得

$$\overset{\scriptscriptstyle\gg}{\mathbf{t}}(t)=\underset{\cdot}{t}(\mathbf{D}(t),\theta(t))=\rho\mathbf{D}(t)\cdot(\partial_{\mathbf{D}}\underset{\cdot}{\phi}(\mathbf{D}(t),\theta(t)))^* \tag{8.1.1$'$}$$

故 Cauchy 应力张量 $\overset{\scriptscriptstyle\gg}{\mathbf{t}}$ 也与温度梯度 Θ 无关，并依赖于自由能密度 ϕ 对变形梯度 $\mathbf{D}$ 的导数。

3. 同样，熵不等式(8.1.10)左端对于 $\dot{\theta}$ 为线性，故必有

$$\underset{\cdot}{\eta}(\mathbf{D},\theta,\Theta)+\partial_{\theta}\underset{\cdot}{\phi}(\mathbf{D},\theta,\Theta)=0$$

利用(8.1.3)$'$式，上式可写作

$$\eta(t)=\underset{\cdot}{\eta}(\mathbf{D},\theta)=-\partial_{\theta}\underset{\cdot}{\phi}(\mathbf{D}(t),\theta(t)) \tag{8.1.2$'$}$$

故熵密度 η 也与温度梯度 Θ 无关，它是自由能密度 ϕ 对于温度 θ 的负导数。

4. 利用以上的结果，熵不等式(8.1.10)化简为

$$\rho\theta^2\gamma=-\underset{\cdot}{h}(\mathbf{D},\theta,\Theta)\cdot\Theta\geqslant 0 \tag{8.1.11}$$

(8.1.11)式说明热流方向 $\mathbf{h}$ 与负温度梯度 $-\Theta$ 必成锐角。例如，按各向同性材料的 Fourier 导热律，$\mathbf{h}$ 与 $-\Theta$ 平行。

设 $\underset{\cdot}{h}$ 对 Θ 可以求导，则在 $\Theta=0$ 附近，令 Θ 为 $d\Theta$，(8.1.11)式成为

$$-[\underset{\cdot}{h}(\mathbf{D},\theta,\mathbf{0})+O(d\boldsymbol{\Theta})]\cdot d\boldsymbol{\Theta}\geqslant 0$$

故

$$\underset{\cdot}{h}(\mathbf{D},\theta,\mathbf{0})=\mathbf{0} \tag{8.1.12}$$

所以，当无温度梯度(即$\boldsymbol{\Theta}=\mathbf{0}$)时，必无热流。

以上的许多结论(第 1 到第4)都是从熵不等式得到的。

最后得到热弹性材料的本构方程(8.1.1)—(8.1.4)的形式为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)=\rho\mathbf{D}(t)\cdot(\partial_{\mathbf{D}}\underset{\cdot}{\phi}(\mathbf{D}(t),\theta(t)))^{*} \qquad (8.1.1)'$$

$$\eta(t)=-\partial_{\theta}\underset{\cdot}{\phi}(\mathbf{D}(t),\theta(t)) \qquad (8.1.2)'$$

$$\phi(t)=\underset{\cdot}{\phi}(\mathbf{D}(t),\theta(t)) \qquad (8.1.3)'$$

$$\mathbf{h}(t)=\underset{\cdot}{h}(\mathbf{D}(t),\theta(t),\boldsymbol{\Theta}(t)) \qquad (8.1.4)'$$

其中 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)$，$\eta(t)$ 与$\phi(t)$ 均与 $\boldsymbol{\Theta}(t)$ 无关。

因为自由能密度 ϕ 与温度梯度$\boldsymbol{\Theta}$ 无关，利用(8.1.1)′与(8.1.2)′式，(8.1.9)式成为

$$\begin{aligned}\dot{\phi}&=\mathrm{tr}[\mathbf{D}\cdot(\partial_{\mathbf{D}}\underset{\cdot}{\phi})^{*}\cdot\mathbf{L}]+(\partial_{\theta}\underset{\cdot}{\phi})\dot{\theta}\\&=\mathrm{tr}\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{t}\cdot\mathbf{L}\right)-\eta\dot{\theta}=\frac{1}{\rho}\mathrm{tr}(\mathbf{t}\cdot\mathbf{d})-\eta\dot{\theta}\end{aligned} \qquad (8.1.9)'$$

利用(4.9.12)式 $\phi=e-\theta\eta$，上式可写作

$$\dot{e}=\frac{1}{\rho}\mathrm{tr}(\mathbf{t}\cdot\mathbf{d})+\theta\dot{\eta} \qquad (8.1.9)''$$

将(8.1.9)″式代人热力学第一定律(4.8.14)式，得到

$$\rho\theta\dot{\underset{\cdot}{\eta}}(\mathbf{D}(t),\theta(t))=-\underset{\cdot}{h}(\mathbf{D}(t),\theta(t),\boldsymbol{\Theta}(t))\cdot\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\nabla}}+\rho\sigma \tag{8.1.13}$$

(8.1.13)式可称为能量平衡方程。 它亦可通过将 (8.1.11) 式代人(4.9.7)′式而得到。

热弹性力学中求解边值问题就是将 Cauchy 第一运动律(4.3.3)式与本节的本构方程 (8.1.1)′—(8.1.4)′ 及能量平衡方程(8.1.13)联立求解。

三、本构方程的另一种形式

在以上的讨论中，所采用的热力学自变量为温度 θ 与温度梯度 $\boldsymbol{\Theta}$,而热力学函数为熵 η 与自由能 ψ。我们常常为了方便,把温度 θ 与熵 η 的位置对换一下,即把 η 当作自变量,把 θ 当作热力学函数，同时把另一个热力学函数自由能 ψ 改为内能 ε。这样就把热弹性材料本构方程假定(8.1.1)—(8.1.4)式改成以下的形式:

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)=\underset{\triangle}{t}(\mathbf{D}(t),\eta(t),\boldsymbol{\Theta}(t)) \tag{8.1.14}$$

$$\theta(t)=\underset{\triangle}{\theta}(\mathbf{D}(t),\eta(t),\boldsymbol{\Theta}(t)) \tag{8.1.15}$$

$$\varepsilon(t)=\underset{\triangle}{\varepsilon}(\mathbf{D}(t),\eta(t),\boldsymbol{\Theta}(t)) \tag{8.1.16}$$

$$\mathbf{h}(t)=\underset{\triangle}{h}(\mathbf{D}(t),\eta(t),\boldsymbol{\Theta}(t)) \tag{8.1.17}$$

仿照前面 (8.1.5)—(8.1.8) 式的推导，PMI 对反应函数的要求是

$$\mathbf{Q}\cdot\underset{\triangle}{t}(\mathbf{D},\eta,\boldsymbol{\Theta})\cdot\mathbf{Q}^*=\underset{\triangle}{t}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D},\eta,\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Theta}) \tag{8.1.18}$$

$$\underset{\triangle}{\theta}(\mathbf{D},\eta,\boldsymbol{\Theta})=\underset{\triangle}{\theta}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D},\eta,\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Theta}) \tag{8.1.19}$$

$$\underset{\triangle}{\varepsilon}(\mathbf{D},\eta,\boldsymbol{\Theta})=\underset{\triangle}{\varepsilon}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D},\eta,\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Theta}) \tag{8.1.20}$$

$$\mathbf{Q}\cdot\underset{\triangle}{h}(\mathbf{D},\eta,\boldsymbol{\Theta})=\underset{\triangle}{h}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D},\eta,\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Theta}) \tag{8.1.21}$$

以上各式对于任意的 $\mathbf{D},\eta,\boldsymbol{\Theta}$ 及任意的正交变换 $\mathbf{Q}$ 均成立。

熵生成率 γ 则可采用(4.9.9)式:

$$\theta\gamma=-\dot{\varepsilon}+\theta\dot{\eta}+\frac{1}{\rho}\overset{\gg}{\mathbf{t}}:\overset{\gg}{\mathbf{d}}-\frac{1}{\rho\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\overset{\rightarrow}{\nabla}) \tag{4.9.9}$$

式中右端出现的 $\dot{\varepsilon}$ 可以利用(8.1.16)式进行计算,仿照(8.1.9)式的推导,可得

$$\dot{e} = \mathrm{tr}[\mathbf{D} \cdot (\partial_{\mathbf{D}} \underset{\triangle}{e})^* \cdot \mathbf{L}] + (\partial_\eta \underset{\triangle}{e})\dot{\eta} + (\partial_{\boldsymbol{\Theta}} \underset{\triangle}{e}) \cdot \dot{\boldsymbol{\Theta}} \quad (8.1.22)$$

类似于(8.1.10)，可得到熵不等式：

$$\begin{aligned} \rho\theta\gamma = &\ \mathrm{tr}\{[\underset{\triangle}{t}(\mathbf{D},\eta,\boldsymbol{\Theta}) - \rho\mathbf{D} \cdot (\partial_{\mathbf{D}} \underset{\triangle}{e}(\mathbf{D},\eta,\boldsymbol{\Theta}))^*] \cdot \mathbf{L}\} \\ &- \rho\{-\underset{\triangle}{\theta}(\mathbf{D},\eta,\boldsymbol{\Theta}) + \partial_\eta \underset{\triangle}{e}(\mathbf{D},\eta,\boldsymbol{\Theta})\}\dot{\eta} \\ &- \frac{1}{\theta} \underset{\triangle}{h}(\mathbf{D},\eta,\boldsymbol{\Theta}) \cdot \boldsymbol{\Theta} - \rho(\partial_{\boldsymbol{\Theta}} \underset{\triangle}{e}(\mathbf{D},\eta,\boldsymbol{\Theta})) \cdot \dot{\boldsymbol{\Theta}} \geqslant 0 \end{aligned} \quad (8.1.23)$$

(8.1.23)式对于任意的 $\mathbf{D}$，$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{D}} \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}$，$\eta$，$\dot{\eta}$，$\boldsymbol{\Theta}$ 与 $\dot{\boldsymbol{\Theta}}$ 均成立。

仿照前面(8.1.1)′—(8.1.4)′式与(8.1.11)式的推导，可证本构方程(8.1.14)—(8.1.17)式应采取以下的形式：

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t) = \rho\mathbf{D}(t) \cdot (\partial_{\mathbf{D}}(\underset{\triangle}{e}(\mathbf{D}(t),\eta(t))))^* \quad (8.1.14)'$$

$$\theta(t) = \partial_\eta \underset{\triangle}{e}(\mathbf{D}(t),\eta(t)) \quad (8.1.15)'$$

$$e(t) = \underset{\triangle}{e}(\mathbf{D}(t),\eta(t)) \quad (8.1.16)'$$

$$\mathbf{h}(t) = \underset{\triangle}{h}(\mathbf{D}(t),\eta(t),\boldsymbol{\Theta}(t)) \quad (8.1.17)'$$

而熵不等式的形式则应为

$$\rho\theta^2\gamma = -\underset{\triangle}{h}(\mathbf{D},\eta,\boldsymbol{\Theta}) \cdot \boldsymbol{\Theta} \geqslant 0 \quad (8.1.24)$$

仿照(8.1.12)式的推导，设 $\underset{\triangle}{h}$ 对 $\boldsymbol{\Theta}$ 可以求导，则可证明

$$\underset{\triangle}{h}(\mathbf{D},\eta,\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (8.1.25)$$

所以，当无温度梯度(即 $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{0}$)时，必无热流。

利用(8.1.14)′与(8.1.15)′式，(8.1.22)式也变成前面的(8.1.9)″式。将它代入热力学第一定律(4.8.14)式，可得能量平衡方程

$$\rho\underset{\triangle}{\theta}(\mathbf{D}(t),\eta(t))\dot{\eta} = -\underset{\triangle}{h}(\mathbf{D}(t),\eta(t),\boldsymbol{\Theta}(t)) \cdot \overset{\gg}{\nabla} + \rho\sigma \quad (8.1.26)$$

(8.1.26)式同(8.1.13)式，只是自变量 $\theta(t)$ 改为 $\eta(t)$ 而已。

四、不可压缩热弹性材料

表示不可压缩的内部约束条件为(由(6.3.7)与(3.2.16)式)

$$\det\mathbf{D} = 1, \mathrm{tr}\mathbf{L} = \mathrm{tr}\mathbf{d} = 0 \tag{8.1.27}$$

前面可压缩热弹性材料的本构方程(8.1.1)—(8.1.4)中，只需将(8.1.1)式改为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t) = -p(t)\mathbf{I} + \underset{0}{t}(\mathbf{D}(t),\theta(t),\Theta(t)) \tag{8.1.28}$$

式中张量函数 $\underset{0}{t}$ 中包含有一个不可定的球形张量部分。

重复本节前面第二部分的推导，(8.1.28)式比以前(8.1.1)式多出的压力项 $-p(t)\mathbf{I}$ 对于熵不等式(4.9.8)，(4.9.13)中出现的 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}:\overset{\gg}{\mathbf{d}}$ 即 $\mathrm{tr}(\overset{\gg}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\gg}{\mathbf{d}})$ 没有影响，因为 $\mathrm{tr}\mathbf{d} = 0$。与前面可压缩情况的差别只是在熵不等式 (8.1.10) 式中 $\mathbf{L}$ 不是任意的，而必须服从内部约束条件(8.1.27)式。因此本构方程(8.1.1)′式中 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}$ 必含有一个不可定的球形张量部分。这一部分可以归于(8.1.28)式的 $-p\mathbf{I}$ 项之中，故可假定 $\mathrm{tr}\overset{\gg}{\mathbf{t}} = 0$。因此可压缩热弹性材料的本构方程(8.1.1)′—(8.1.4)′式仍旧适用，只是(8.1.1)′式中的 $\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t)$ 应理解为(8.1.28) 式的右端第二项。按同样的理解，本构方程(8.1.14)′—(8.1.17)′ 也仍旧适用。

五、热弹性流体

热弹性流体是热弹性材料的特例。把第六章弹性流体的本构方程(6.5.13)′ 推广为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}}(t) = -p(\rho(t),\theta(t),\Theta(t))\mathbf{I} \tag{8.1.29}$$

$$\eta(t) = \eta(\rho(t), \theta(t), \boldsymbol{\Theta}(t)) \tag{8.1.30}$$

$$\phi(t) = \phi(\rho(t), \theta(t), \boldsymbol{\Theta}(t)) \tag{8.1.31}$$

$$\mathbf{h}(t) = h(\rho(t), \theta(t), \boldsymbol{\Theta}(t)) \tag{8.1.32}$$

因为热弹性流体是简单流体的特例，故必为各向同性，(8.1.32)式 $\mathbf{h}$（矢量）必为 $\boldsymbol{\Theta}$（矢量）的各向同性函数。在张量分析中，可以证明矢量的各向同性矢量函数必定具有以下的形式①：

$$\mathbf{h}(t) = k(\rho(t), \theta(t), |\boldsymbol{\Theta}(t)|)\boldsymbol{\Theta}(t) \tag{8.1.32'}$$

这说明 $\mathbf{h}(t)$ 必定平行于 $\boldsymbol{\Theta}(t)$。利用第三章的等式 (3.2.16)，(3.7.14)，

$$\mathrm{tr}\mathbf{L} = \mathrm{tr}\mathbf{d} = \frac{\dot{\mathscr{T}}}{\mathscr{T}} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} \tag{8.1.33}$$

仿照上面热弹性材料本构方程 (8.1.1)′—(8.1.4)′ 与熵不等式 (8.1.11)式的推导方法（建议读者自己推导），可得②

---

① 设矢量 $\mathbf{b}$ 为矢量 $\mathbf{a}$ 的函数，$\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$，且 $\mathbf{f}$ 为各向同性函数，即

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a})$$

式中 $\mathbf{Q}$ 为任意的二阶正交张量。 取笛卡儿坐标 $Ox_1x_2x_3$，设 $\mathbf{b}$ 的分量 b_1，b_2，b_3 依赖于 $\mathbf{a}$ 的分量 a_1, a_2, a_3 的关系为

$$b_1 = f_1(a_1, a_2, a_3),\quad b_2 = f_2(a_1, a_2, a_3),\quad b_3 = f_3(a_1, a_2, a_3)$$

设 Ox_1 轴平行于 $\mathbf{a}$，故 $a_2 = a_3 = 0$，且

$$b_1 = f_1(a_1, 0, 0),\quad b_2 = f_2(a_1, 0, 0),\quad b_3 = f_3(a_1, 0, 0)$$

取 $\mathbf{Q}$ 为绕 Ox_1 轴旋转 π 角的变换，可证 $b_2 = b_3 = 0$。再取 $\mathbf{Q}$ 为绕 Ox_2 轴旋转 π 角的变换，则

$$-f_1(a_1, 0, 0) = f_1(-a_1, 0, 0)$$

故

$$f_1(a_1, 0, 0) = \phi(a_1)a_1$$

式中 $\phi(a_1)$ 为偶函数，因此

$$\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \phi(|\mathbf{a}|)\mathbf{a}$$

② (8.1.29)′式中的 ρ^2 因子来自于(4.9.13)式右端的下列项：

$$\frac{1}{\rho}\overset{\gg}{\mathbf{t}}:\overset{\gg}{\mathbf{d}} = -\frac{p}{\rho}\mathrm{tr}\overset{\gg}{\mathbf{d}} = -\frac{p}{\rho}\left(-\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right) = \frac{p}{\rho^2}\dot{\rho}$$

$$\mathbf{t}(t) = -\rho^2\partial_\rho \psi(\rho(t),\theta(t))\mathbf{I} \tag{8.1.29$'$}$$

$$\eta(t) = -\partial_\theta \psi(\rho(t),\theta(t)) \tag{8.1.30$'$}$$

$$\psi(t) = \psi(\rho(t), \theta(t)) \tag{8.1.31$'$}$$

$$\mathbf{h}(t) = h(\rho(t),\theta(t),\boldsymbol{\Theta}(t)) \tag{8.1.32$'$}$$

及熵不等式。

$$\theta\gamma = -\frac{1}{\rho\theta} k(\rho(t),\theta(t),|\boldsymbol{\Theta}(t)|)\boldsymbol{\Theta}(t)^2 \geqslant 0$$

即

$$k(\rho(t),\theta(t),|\boldsymbol{\Theta}(t)|) \leqslant 0 \tag{8.1.34}$$

这就是理想流体的经典热力学结果。将 θ 与 η 的位置对换，仿照前面(8.1.14)′—(8.1.17)′与 (8.1.24) 的推导方法，也可得到相应的结果。

§8.2 讨　论

在前面第七章建立弹性材料的理论过程中，只做了纯机械的研究，或者说，完全略去了热力学的考虑。现在我们来研究在什么样的热力学条件下，第七章的弹性材料理论能成立。

一、均温情况

均温情况是指温度 $\theta(t)$ 不随空间位置变化，而只随时间 t 变化的情况。至于变形梯度 $\mathbf{D}(X,t)$ 则是既随质点又随时间而变化的。此时，在本构方程(8.1.1)′—(8.1.4)′中可以把温度 $\theta(t)$ 看作是一个随时间 t 按既定函数规律变化的参数 $\theta(t)$，温度梯度

$$\boldsymbol{\Theta}(t) = \theta(t)\overleftarrow{\nabla} = 0 \tag{8.2.1}$$

故本构方程(8.1.1)′—(8.1.4)′成为

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{t}}(X,t) = \underset{\cdot}{t}(\mathbf{D}(X,t), \theta(t))$$

$$= \rho\mathbf{D}(X,t) \cdot (\partial_{\mathbf{D}}\underset{\cdot}{\psi}(\mathbf{D}(X,t), \theta(t)))^{*} \qquad (8.2.2)$$

$$\eta(X,t) = \underset{\cdot}{\eta}(\mathbf{D}(X,t), \theta(t))$$

$$= -\partial_{\theta}\underset{\cdot}{\psi}(\mathbf{D}(X,t), \theta(t)) \qquad (8.2.3)$$

$$\psi(X,t) = \underset{\cdot}{\psi}(\mathbf{D}(X,t), \theta(t)) \qquad (8.2.4)$$

$$\mathbf{h}(X,t) = \underset{\cdot}{h}(\mathbf{D}(X,t), \theta(t), \mathbf{0}) \qquad (8.2.5)$$

(8.2.2)式可以理解为第七章的纯机械的本构方程，只不过是含有一个温度参数 $\theta(t)$ 而因为 $\boldsymbol{\Theta} = 0$，熵不等式 (8.1.11) 恒满足。

能量平衡方程(8.1.13),其中 $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{0}$，为

$$\rho\theta\dot{\underset{\cdot}{\eta}}(\mathbf{D}(X,t), \theta(t)) = -\underset{\cdot}{h}(\mathbf{D}(X,t), \theta(t), \mathbf{0}) \cdot \overset{\cdot}{\nabla} + \rho\sigma$$

$$(8.2.6)$$

满足(8.2.6)式有两种可能：

1. 由于 $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{0}$，由(8.1.12)式，$\mathbf{h}(X,t) = 0$，物体内无热源。(8.2.6)式成为

$$\rho\theta\dot{\underset{\cdot}{\eta}}(\mathbf{D}(X,t), \theta(t)) = \rho\sigma \qquad (8.2.6)'$$

要求从外界物体提供由上式计算的热源 σ，以保证均温 $\theta(t)$ 的实现。

2. 假定物体具有无限大的导热能力。即便无温度梯度($\boldsymbol{\Theta}=0$)时，仍可以有热流 $\mathbf{h}$。也就是说，取消(8.2.5)式，而由(8.2.6)式按已给的热源 σ 计算热流 $\mathbf{h}$。

特例。均温 $\theta(t)$ 保持不变，即 θ 为与质点 X 及时间 t 无关的常数。同时设变形梯度 $\mathbf{D}(X)$ 与时间 t 无关。则由 (8.2.3) 式 $\eta(X)$ 不随时间变化。因 $\mathbf{h} = \mathbf{0}$，设无热源($\sigma = 0$)，(8.2.6)式恒

满足。

二、绝热情况，即设无热流且无热源（绝热条件）

$$\mathbf{h}=0 \quad \sigma=0 \tag{8.2.7}$$

熵不等式 (8.1.24) 恒满足。由能量平衡方程 (8.1.26) 与绝热条件 (8.2.7)，$\dot{\eta}=0$，故

$$\eta=\eta(X) \tag{8.2.8}$$

熵不随时间变化，故为恒熵情况。

本构方程(8.1.14)′—(8.1.17)′成为

$$\overset{D}{\mathbf{t}}(X,t)=\underset{\triangle}{t}(\mathbf{D}(X,t),\eta(X))$$

$$=\rho\mathbf{D}(X,t)\cdot(\partial_{\mathbf{D}}\underset{e}{e}(\mathbf{D}(X,t),\eta(X)))^{*} \tag{8.2.9}$$

$$\theta(X,t)=\underset{\triangle}{\theta}(\mathbf{D}(X,t),\eta(X))$$

$$=\partial_{\eta}\underset{\triangle}{e}(\mathbf{D}(X,t),\eta(X)) \tag{8.2.10}$$

$$e(X,t)=\underset{\triangle}{e}(\mathbf{D}(X,t),\eta(X)) \tag{8.2.11}$$

$$\mathbf{h}(X,t)=\underset{\triangle}{h}(\mathbf{D}(X,t),\eta(X),\boldsymbol{\Theta}(X,t)) \tag{8.2.12}$$

(8.2.9)式也可以理解为第七章的纯机械的本构方程，但是含有一个熵参数 $\eta(X)$。

由(8.2.10)与(8.2.11)式计算温度 $\theta(X,t)$ 与内能 $e(X,t)$，至于(8.2.12)式则被(8.2.7)的 $\mathbf{h}=\mathbf{0}$ 代替，这相当于假定材料为绝热的，或者假定过程是快速变化的，导热的影响甚微。

§8.3 超弹性材料

一、超弹性材料的定义与本构方程

当热力学变量 $\theta(t)$ 不随质点X 而变化，即考虑均温运动，或

$\eta(X)$ 不随时间 t 而变化，即考虑恒熵运动时，本构方程(8.1.1)′ 或 (8.1.14)′ 都可表示为以下的形式

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = \rho \mathbf{D} \cdot (\partial_{\mathbf{D}} \beta(\mathbf{D}))^{*} \tag{8.3.1}$$

式中对于均温运动，β 表示自由能密度 ψ，而对于恒熵运动，β 表示内能密度 ε。凡是本构方程如 (8.3.1) 式的材料，称为超弹性 (hyperelastic) 材料，其本构方程涉及一标量函数 $\beta(\mathbf{D})$ 对变形梯度 $\mathbf{D}$ 的导数。$\beta(\mathbf{D})$ 常称为应变能函数。

如果材料为不可压缩的，则本构方程(8.3.1)应改为(8.1.28)式即

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = -p\mathbf{I} + \rho \mathbf{D} \cdot (\partial_{\mathbf{D}} \beta(\mathbf{D}))^{*} \tag{8.3.2}$$

无论 β 理解为自由能密度 ψ，或者理解为内能密度 ε，由(8.1.7)式或者(8.1.20)式，标架无差异原理 (PMI) 要求 β 为客观标量，即

$$\beta(\mathbf{D}) = \beta(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}) \tag{8.3.3}$$

对于任意的 $\mathbf{D}$ 与任意的正交变换 $\mathbf{Q}$。由于 $\mathbf{D} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ 令 (8.3.3) 式中 $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{*}$，得

$$\beta(\mathbf{D}) = \beta(\mathbf{U}) \tag{8.3.4}$$

(8.3.4)式表明：应变能密度 β 只依赖于右伸长张量 $\mathbf{U}$，而与材料在此变形后之旋转 $\mathbf{R}$ 无关。可以验证，任何标量函数 $\beta(\mathbf{U})$ 都是客观的，因此满足 PMI，因为 $\check{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$。

由于 $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{D}$ 比 $\mathbf{U}$ 更易计算，我们定义一新的反应函数

$$\beta(\mathbf{D}) = \beta(\mathbf{U}) = \bar{\beta}(\mathbf{C}) = \bar{\bar{\beta}}(\mathbf{E}) \tag{8.3.5}$$

式中 $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2$，则本构方程(8.3.1)可写作

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = \rho \mathbf{D} \cdot (\partial_{\mathbf{D}} \bar{\beta}(\mathbf{C}))^{*} \tag{8.3.1$'$}$$

为了求(8.3.1)′式中的 $\partial_{\mathbf{D}} \bar{\beta}(\mathbf{C})$，可先写出 $\bar{\beta}(\mathbf{C})$ 的微分。将

$$d\mathbf{C} = d(\mathbf{D}^* \cdot \mathbf{D}) = d\mathbf{D}^* \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D}^* \cdot d\mathbf{D}$$

代人

$$d\bar{\beta}(\mathbf{C}) = \partial_{\mathbf{C}}\bar{\beta}(\mathbf{C}) : d\mathbf{C}$$

并注意 $\partial_{\mathbf{C}}\bar{\beta}(\mathbf{C})$ 为对称，得到①

$$\begin{aligned} d\bar{\beta}(\mathbf{C}) &= 2\partial_{\mathbf{C}}\bar{\beta}(\mathbf{C}) : (\mathbf{D}^* \cdot d\mathbf{D}) \\ &= 2\mathrm{tr}[\partial_{\mathbf{C}}\bar{\beta}(\mathbf{C}) \cdot (\mathbf{D}^* \cdot d\mathbf{D})] \\ &= 2[\partial_{\mathbf{C}}\bar{\beta}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}^*]^* : d\mathbf{D} \\ &= 2[\mathbf{D} \cdot \partial_{\mathbf{C}}\bar{\beta}(\mathbf{C})] : d\mathbf{D} \end{aligned}$$

将上式与

$$d\bar{\beta}(\mathbf{C}) = \partial_{\mathbf{D}}\bar{\beta}(\mathbf{C}) : d\mathbf{D}$$

比较，可知

$$\partial_{\mathbf{D}}\bar{\beta}(\mathbf{C}) = 2\mathbf{D} \cdot \partial_{\mathbf{C}}\bar{\beta}(\mathbf{C}) \tag{8.3.6a}$$

$$[\partial_{\mathbf{D}}\bar{\beta}(\mathbf{C})]^* = 2\partial_{\mathbf{C}}\bar{\beta}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}^* \tag{8.3.6b}$$

故利用(8.3.6)式，本构方程(8.3.1)′式成为

$$\overset{\gg}{\mathbf{t}} = 2\rho\mathbf{D} \cdot \partial_{\mathbf{C}}\bar{\beta}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}^* \tag{8.3.7a}$$

$$= \rho(\partial_{\mathbf{D}}\bar{\beta}(\mathbf{C})) \cdot \mathbf{D}^* \tag{8.3.7b}$$

(8.3.7) (*a*) 与 (*b*) 式各称为本构方程的 Boussinesg 形式与 Neumann 形式。将(8.3.7)式代入(4.4.2)式，得到以第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}}$ 表示的本构方程:

$$\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\rho_0}{\rho}\overset{\gg}{\mathbf{t}} \cdot \overset{-1}{\overset{)(}{\mathbf{D}}}{}^* = 2\rho_0\mathbf{D} \cdot \partial_{\mathbf{C}}\bar{\beta}(\mathbf{C}) = \rho_0\partial_{\mathbf{D}}\bar{\beta}(\mathbf{C}) \tag{8.3.8}$$

(8.3.8)式称为本构方程的 Kirchhoff 形式。 利用(8.3.5)式的函数 $\bar{\bar{\beta}}(\mathbf{E})$，它可表示成

$$\overset{)(}{\boldsymbol{\tau}} = \rho_0\mathbf{D} \cdot \partial_{\mathbf{E}}\bar{\bar{\beta}}(\mathbf{E}) \tag{8.3.8$'$}$$

将(8.3.8)式代入(4.5.12)式，可得以第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\overset{\ll}{\mathbf{T}}$ 表示的本构方程:

---

① 利用习题 3.20 [提示]中的第二个公式，又见 251 页脚注。

$$\overset{(4)}{\mathbf{T}} = \overset{-1}{\overset{()}{\mathbf{D}}} \cdot \overset{(1)}{\boldsymbol{\tau}} = 2\,\rho_0 \partial_{\mathbf{C}} \bar{\beta}(\mathbf{C}) = \rho_0 \partial_{\mathbf{E}} \bar{\bar{\beta}}(\mathbf{E}) \qquad (8.3.9)$$

(8.3.9)式称为本构方程的 Cosserat 形式。

二、应变能函数 $\beta(\mathbf{D})$ 对于参考构形 $\mathscr{R}$ 的依赖关系

以 $\beta_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}_{(\mathscr{R})})$表示对于参考构形 $\mathscr{R}$ 的应变能函数，$\beta_{(\bar{\mathscr{R}})}(\mathbf{D}_{(\bar{\mathscr{R}})})$表示对于参考构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 的应变能函数。仿照(6.1.8)或(6.4.2)式，可以证明在 $\beta_{(\mathscr{R})}$ 与 $\beta_{(\bar{\mathscr{R}})}$ 之间存在着关系：

$$\beta_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}_{(\mathscr{R})}) = \beta_{(\bar{\mathscr{R}})}(\mathbf{D}_{(\bar{\mathscr{R}})})$$

式中

$$\mathbf{D}_{(\bar{\mathscr{R}})} = \mathbf{D}_{(\mathscr{R})} \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}})$$

因此

$$\beta_{(\bar{\mathscr{R}})}(\mathbf{D}) = \beta_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D} \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}})) \qquad \text{对于任意的 } \mathbf{D} \qquad (8.3.10)$$

三、对于参考构形 $\mathscr{R}$ 的材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$

以 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 表示对于参考构形 $\mathscr{R}$ 的材料对称群。按材料对称群的定义，$\mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \subseteq \mathscr{U}$（等体变换群）。如果 $\mathbf{H} = \mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}}) \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$，则在构形 $\mathscr{R}$ 中与在构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 中应变能函数具有相同的形式：

$$\beta_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}) = \beta_{(\bar{\mathscr{R}})}(\mathbf{D}), \quad \mathbf{H} = \mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\bar{\mathscr{R}}) \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$$

仿(6.4.3)″式的推导，可证明

$$\beta_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}) = \beta_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{H}) \quad \text{对于任意的 } \mathbf{D} \qquad (8.3.11)$$

$$\rightleftarrows \mathbf{H} \in \mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$$

仿(6.4.4)式的推导，对于参考构形 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{R}'$ 的材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 与 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')}$ 之间有以下的关系：

$$\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')} = \mathbf{K} \cdot \mathscr{G}_{(\mathscr{R})} \cdot \overset{-1}{\mathbf{K}}, \quad \mathscr{G}_{(\mathscr{R})} = \overset{-1}{\mathbf{K}} \cdot \mathscr{G}_{(\mathscr{R}')} \cdot \mathbf{K} \qquad (8.3.12)$$

式中

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}_{(\mathscr{R})}(\mathscr{R}')$$

$\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 与 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R}')}$ 为同构，且为共轭群。

四、各向同性

若超弹性材料对于某参考构形 $\mathscr{R}$ 的材料对称群 $\mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$ 包含全部的正交变换群 $\mathscr{O}$，即

$$\mathscr{O} \subseteq \mathscr{G}_{(\mathscr{R})}$$

则称超弹性材料为各向同性超弹性材料，并称构形 $\mathscr{R}$ 为非扭曲状态。

仿照(6.4.8)式的证明，由(8.3.11)式，令 $\mathbf{H} = \mathbf{Q}^*$，并将 $\mathbf{D}$ 改为 $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}$，对于任意的 $\mathbf{Q} \in \mathscr{O}$，得到

$$\beta_{(\mathscr{R})}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}) = \beta_{(\mathscr{R})}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^*)$$

上式左端利用 PM1 的要求(8.3.3)式代入，对于任意的 $\mathbf{Q} \in \mathscr{O}$，得

$$\beta_{(\mathscr{R})}(\mathbf{D}) = \beta_{(\mathscr{R})}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^*) \tag{8.3.13}$$

故对于非扭曲状态 $\mathscr{R}$，$\beta_{(\mathscr{R})}$ 为 $\mathbf{D}$ 的各向同性标量函数。利用(8.3.4)与(6.4.11)式，(8.3.13)式可写作

$$\beta_{(\mathscr{R})}(\mathbf{U}) = \beta_{(\mathscr{R})}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^*) \tag{8.3.14}$$

对于任意的 $\mathbf{U}$，任意的 $\mathbf{Q} \in \mathscr{O}$ 与非扭曲状态 $\mathscr{R}$。因

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^* = \mathbf{V}$$

故在(8.3.14)式中取 $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$ 得

$$\beta_{(\mathscr{R})}(\mathbf{U}) = \beta_{(\mathscr{R})}(\mathbf{V}) \tag{8.3.15}$$

因此，由(8.3.5)式，上式可写作

$$\bar{\beta}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{C}) = \bar{\beta}_{(\mathscr{R})}(\mathbf{B}) \tag{8.3.16}$$

为了计算本构方程(8.3.7)或(8.3.8)中的 $\partial_{\mathbf{C}}\bar{\beta}(\mathbf{C})$，可以如下进行(略去下标“$(\mathscr{R})$”不写)：

由(8.3.16)式，

$$d\bar{\beta} = \partial_{\mathbf{C}}\bar{\beta}(\mathbf{C}) : d\mathbf{C} \tag{a}$$

$$= \partial_{\mathbf{B}}\bar{\beta}(\mathbf{B}) : d\mathbf{B} \tag{b}$$

因

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}^2=(\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{R}^*)\cdot(\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{R}^*)$$
$$=\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}^2\cdot\mathbf{R}^*=\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{R}^*$$

故

$$d\mathbf{B}=\mathbf{R}\cdot d\mathbf{C}\cdot\mathbf{R}^* \tag{c}$$

(c)式代入(b)式，得

$$\begin{aligned} d\bar{\beta} &= \partial_{\mathbf{B}}\bar{\beta}(\mathbf{B}):(\mathbf{R}\cdot d\mathbf{C}\cdot\mathbf{R}^*) \\ &= \mathrm{tr}[\partial_{\mathbf{B}}\bar{\beta}(\mathbf{B})\cdot\mathbf{R}\cdot d\mathbf{C}\cdot\mathbf{R}^*] \\ &= \mathrm{tr}[\mathbf{R}^*\cdot\partial_{\mathbf{B}}\bar{\beta}(\mathbf{B})\cdot\mathbf{R}\cdot d\mathbf{C}] \\ &= (\mathbf{R}^*\cdot\partial_{\mathbf{B}}\bar{\beta}(\mathbf{B})\cdot\mathbf{R}):d\mathbf{C} \end{aligned} \tag{d}$$

将(d)式与(a)式比较，得

$$\partial_{\mathbf{C}}\bar{\beta}(\mathbf{C})=\mathbf{R}^*\cdot\partial_{\mathbf{B}}\bar{\beta}(\mathbf{B})\cdot\mathbf{R} \tag{8.3.17}$$

将(8.3.17)代入(8.3.7a)式，得到各向同性超弹性材料的本构方程(参考构形 $\mathscr{R}$ 为非扭曲状态)：

$$\begin{aligned} \overset{\gg}{\mathbf{t}} &= 2\rho\mathbf{D}\cdot[\mathbf{R}^*\cdot\partial_{\mathbf{B}}\bar{\beta}(\mathbf{B})\cdot\mathbf{R}]\cdot\mathbf{D}^* \\ &= 2\rho\mathbf{V}\cdot\partial_{\mathbf{B}}\bar{\beta}(\mathbf{B})\cdot\mathbf{V} \\ &= 2\rho\overset{1/2}{\mathbf{B}}\cdot\partial_{\mathbf{B}}\bar{\beta}(\mathbf{B})\cdot\overset{1/2}{\mathbf{B}} \end{aligned} \tag{8.3.18}$$

由(8.3.14)—(8.3.16)式，$\bar{\beta}(\mathbf{B})$ 为 $\mathbf{B}$ 的各向同性标量函数，故由张量分析，它可表示为

$$\bar{\beta}(\mathbf{B})=\bar{\beta}(\mathscr{J}_1^B,\mathscr{J}_2^B,\mathscr{J}_3^B) \tag{8.3.19}$$

因此[①]

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{B}}\bar{\beta}(\mathbf{B}) &= \frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\mathscr{J}_1^B}\frac{d\mathscr{J}_1^B}{d\mathbf{B}}+\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\mathscr{J}_2^B}\frac{d\mathscr{J}_2^B}{d\mathbf{B}}+\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\mathscr{J}_3^B}\frac{d\mathscr{J}_3^B}{d\mathbf{B}} \\ &= \frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\mathscr{J}_1^B}\mathbf{I}+\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\mathscr{J}_2^B}(\mathscr{J}_1^B\mathbf{I}-\mathbf{B}^*)+\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\mathscr{J}_3^B}\mathscr{J}_3^B\overset{-1}{\mathbf{B}}{}^* \end{aligned}$$

---

① 关于二阶张量不变量对张量导数的公式，可参阅黄克智等编著《张量分析》§6.5，清华大学出版社。

注意到 $\mathbf{B}$ 为对称，故(8.3.18)式又可表示成

$$\overset{\text{»}}{\mathbf{t}} = 2\rho \mathbf{B} \cdot \partial_{\mathbf{B}} \bar{\beta}(\mathbf{B}) \tag{8.3.18$'$}$$

得到本构方程：

$$\begin{aligned}
\overset{\text{»}}{\mathbf{t}} &= 2\rho\left[\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_1^B}\mathbf{B} + \frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_2^B}(\mathscr{J}_1^B\mathbf{B} - \mathbf{B}^2) + \frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_3^B}\mathscr{J}_3^B\mathbf{I}\right] \\
&= 2\rho\left[\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_3^B}\mathscr{J}_3^B\mathbf{I} + \left(\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_1^B} + \frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_2^B}\mathscr{J}_1^B\right)\mathbf{B} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_2^B}\mathbf{B}^2\right]
\end{aligned} \tag{8.3.20}$$

将(8.3.20)式与第七章本构方程(7.2.8)式比较，可得(7.2.8)式中反应系数φ_0，φ_1与φ_2通过应变能函数$\bar{\beta}(\mathbf{B})$的表达式：

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= 2\rho\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_3^B}\mathscr{J}_3^B \\
\varphi_1 &= 2\rho\left(\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_1^B} + \frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_2^B}\mathscr{J}_1^B\right) \\
\varphi_2 &= -2\rho\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_2^B}
\end{aligned} \tag{8.3.21}$$

将(8.3.21)式代入第七章(7.2.13)式，可得本构方程(7.2.11)中的反应系数Φ_0，Φ_1与Φ_{-1}通过应变能函数$\bar{\beta}(\mathbf{B})$的表达式：

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= \varphi_0 - \mathscr{J}_2^B\varphi_2 = 2\rho\left(\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_3^B}\mathscr{J}_3^B + \mathscr{J}_2^B\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_2^B}\right) \\
\Phi_1 &= \varphi_1 + \mathscr{J}_1^B\varphi_2 = 2\rho\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_1^B} \\
\Phi_{-1} &= \mathscr{J}_3^B\varphi_2 = -2\rho\mathscr{J}_3^B\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_2^B}
\end{aligned} \tag{8.3.22}$$

因此本构方程(7.2.11)成为

$$\overset{\text{»}}{\mathbf{t}} = 2\rho\left[\left(\mathscr{J}_3^B\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_3^B} + \mathscr{J}_2^B\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial \mathscr{J}_2^B}\right)\mathbf{I}\right.$$

$$+\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\mathscr{J}_1^B}\mathbf{B}-\mathscr{J}_3^B\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\mathscr{J}_2^B}\overset{-1}{\mathbf{B}}\Bigg] \tag{8.3.23}$$

作为超弹性材料的特例，超弹性固体与超弹性流体也可仿照简单固体与简单流体来定义。

第九章 塑 性

本章讲述大变形(有限变形)情况下率无关(即无时间效应)的塑性本构理论。在某些情形，传统的塑性理论已经显得不足。例如，对于岩土材料、粒状材料以及高强钢等的深入研究，表明，不能再沿用正交法则(即塑性变形率与屈服面正交)和塑性变形体积不变等经典假设。计算技术的发展使得在结构分析中有可能采用更接近实际，因而也更复杂的本构关系。目前许多著名的固体力学学者正在研究所谓变形局部化问题。例如薄板拉伸，在发生失稳现象时，变形集中于很窄的剪切带上。这一问题引起了研究金属压力加工成形者的兴趣。 波兰的Marciniak[1] 等曾提出一个模型，企图以材料厚度不均匀来解释变形局部化的现象。但用其模型算出的失稳载荷比实际值高得多；若要求失稳载荷值与实验结果相符，必须假定板的初始厚度非常显著地不均匀，但实际并非如此。许多固体力学学者，如 J. R. Rice, J. W. Hutchinson, A. Needleman 等人从弹塑性大变形本构模型入手进行研究，结果表明，对于均匀变形问题当载荷(拉伸)加到一定程度时会出现解的分叉现象，且分叉点对本构模型十分敏感。因此，弹塑性大变形本构关系的研究是一项既有理论价值又有实际意义的工作。 此外，近年来固体力学与材料科学的结合，要求更精细地研究由变形到破坏过程中的损伤机制，并在此基础上建立更好的本构模型，而损伤往往伴随着大变形。在断裂力学中，由于裂纹尖端附近的高度应变集中，损伤是不可避免的。因此，裂纹尖端场的研究需要有考虑损伤的大变形塑性本构关系。以上情况说明，目前固体力学发展最重要的课题之一就是建立考虑损伤的、好的(既符合实际又便

于应用的)本构理论。

在本章的前四节（§ 9.1—§ 9.4）中假定所研究的变形过程是恒温的，即暂不考虑温度(或熵)等热力学变量。

§ 9.1 各向同性(或称“等向”)硬化的弹塑性本构关系

一、小变形情况的 Prandtl-Reuss 本构方程(即 J_2 流动理论)

为了简单起见，在本小节中采用笛卡儿坐标。在小变形情况下，无需区分各种应力或应变，因此应力张量用 $\boldsymbol{\sigma}$ 表示，其分量为 σ_{ij}，应力偏斜张量(偏量)用 $\mathbf{s}$ 表示，其分量为 s_{ij}：

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\mathscr{I}_1(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{9.1.1}$$

应变张量用 $\boldsymbol{\eta}$ 表示。用 σ_e 表示 $\boldsymbol{\sigma}$ 的等效应力，其定义式为

$$J_2 = J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_e^2 = -\mathscr{I}_2(\mathbf{s}) \tag{9.1.2}$$

式中 $\mathscr{I}_2(\mathbf{s})$ 表示应力偏量 $\mathbf{s}$ 的第二不变量。(9.1.2) 式就是通常所谓 J_2 流动理论所提到的 J_2。它对时间的导数为①

$$\dot{J}_2 = s_{ij}\dot{s}_{ij} = s_{ij}\dot{\sigma}_{ij} \tag{9.1.3}$$

Prandtl-Reuss 本构关系可表示为

$$\dot{\eta}_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\dot{\sigma}_{ij} - \nu\delta_{ij}\dot{\sigma}_{kk}] + \frac{\alpha}{h}s_{ij}\dot{J}_2$$

---

① 在小变形笛卡儿坐标情况下，可以在张量分量上面加“·”表示对时间的导数而不致引起混淆。一般情况下应避免这样做。

$$\dot{\eta} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\dot{\sigma} - \nu \mathscr{J}_1(\dot{\sigma})I] + \frac{\alpha}{h}\dot{J}_2 s \qquad (9.1.4)$$

上式右端第一、二项分别表示弹性应变率 $\dot{\eta}^e_{ij}$ 与塑性应变率 $\dot{\eta}^p_{ij}$，式中的 h 是 σ_e 或 J_2 的函数，由比例加载（例如单向拉伸）材料试验确定。$\alpha=1$ 或 0 分别表示塑性加载或弹性卸载情况。E，ν 分别为杨氏模量和波桑比。(9.1.4)式还可写成

$$\dot{\eta}_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\delta_{ik}\delta_{jl} - \nu\delta_{ij}\delta_{kl}]\dot{\sigma}_{kl} + \frac{\alpha}{h}s_{ij}\dot{J}_2 \qquad (9.1.4)'$$

进一步可将上式右端 [⋯] 代表的弹性柔度矩阵改写为对称形式，得到

$$\dot{\eta}_{ij} = \frac{1}{E}\left[\frac{1}{2}(1+\nu)(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) - \nu\delta_{ij}\delta_{kl}\right]\dot{\sigma}_{kl} + \frac{\alpha}{h}s_{ij}\dot{J}_2$$

$$= \mathscr{M}_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + \frac{\alpha}{h}s_{ij}\dot{J}_2 \qquad (9.1.4)''$$

$$\dot{\eta} = \mathscr{M} : \dot{\sigma} + \frac{\alpha}{h}\dot{J}_2 s$$

式中$\mathscr{M}$表示四阶张量，称为弹性柔度张量，其分量 $\mathscr{M}_{ijkl}$ 具有以下三种对称性（以后简称“三对称性”）：

(1) 对 i 与 j 对称；

(2) 对 k 与 l 对称；

(3) 对(i,j)与(k,l)对称。

即

$$\mathscr{M}_{ijkl} = \mathscr{M}_{jikl} = \mathscr{M}_{ijlk} = \mathscr{M}_{klij}$$

(9.1.4)各式中的 α 取值为

$$\begin{aligned} &\alpha = 1 \quad 当\ J_2 = (J_2)_{\max}\ 且\ \dot{J}_2 = s_{ij}\dot{\sigma}_{ij} \geqslant 0 \\ &\alpha = 0 \quad 当\ J_2 = (J_2)_{\max}\ 且\ \dot{J}_2 < 0 \\ &\qquad\quad 或当\ J_2 < (J_2)_{\max} \end{aligned} \qquad (9.1.5)$$

这里 $(J_2)_{\max}$ 表示材料受力历史上 J_2 曾达到过的最大值。

上述(9.1.4)各式均为应变率通过应力率表示。欲得到应力率

通过应变率表示的形式，可对(9.1.4)式求逆，过程如下：

第一步，计算(9.1.4)式之迹，即取指标 i 与 j 缩并，

$$\dot{\eta}_{ii} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\dot{\sigma}_{ii} - 3\nu\dot{\sigma}_{kk}] = \frac{1-2\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk} \tag{9.1.6a}$$

故

$$\dot{\sigma}_{kk} = \frac{E}{1-2\nu}\dot{\eta}_{kk} \tag{9.1.6b}$$

第二步，(9.1.4)式两端乘以 s_{ij}，并对指标取和，得

$$\begin{aligned} s_{ij}\dot{\eta}_{ij} &= \frac{1}{E}[(1+\nu)s_{ij}\dot{\sigma}_{ij} - \nu s_{ij}\delta_{ij}\dot{\sigma}_{kk}] + \frac{1}{h}s_{ij}s_{ij}\dot{J}_2 \\ &= \frac{1}{E}(1+\nu)\dot{J}_2 + \frac{2}{h}J_2\dot{J}_2 \end{aligned}$$

故

$$\dot{J}_2 = \frac{E s_{kl}\dot{\eta}_{kl}}{(1+\nu) + 2EJ_2/h} \tag{9.1.7}$$

将(9.1.6)、(9.1.7)代入(9.1.4)并整理后得

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= \frac{E}{1+\nu}\left[\dot{\eta}_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\dot{\eta}_{kk}\right] - \frac{E}{1+\nu}\frac{a}{q}s_{ij}s_{kl}\dot{\eta}_{kl} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{E}{1+\nu}\left[\dot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathscr{I}_1(\dot{\boldsymbol{\eta}})\right] - \frac{E}{1+\nu}\frac{a}{q}\mathbf{s}\,\mathbf{s}:\dot{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned} \tag{9.1.8}$$

式中

$$q = \frac{(1+\nu)h}{E} + 2J_2 \tag{9.1.9}$$

同样，(9.1.8)式也可改写成

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} = &\frac{E}{1+\nu}\left[\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right]\dot{\eta}_{kl} \\ &- \frac{E}{1+\nu}\frac{a}{q}s_{ij}s_{kl}\dot{\eta}_{kl} \end{aligned} \tag{9.1.8$'$}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right]\dot{\eta}_{kl}$$

$$-\frac{E}{1+\nu}\frac{\alpha}{q}s_{ij}s_{kl}\dot{\eta}_{kl}$$

$$=\mathscr{L}_{ijkl}\dot{\eta}_{kl}-\frac{E}{1+\nu}\frac{\alpha}{q}s_{ij}s_{kl}\dot{\eta}_{kl}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathscr{L}:\dot{\boldsymbol{\eta}}-\frac{E}{1+\nu}\frac{\alpha}{q}\mathbf{ss}:\dot{\boldsymbol{\eta}} \tag{9.1.8}''$$

式中$\mathscr{L}$为具有三对称性的四阶弹性刚度张量，

$$\mathscr{L}_{ijkl}=\mathscr{L}_{jikl}=\mathscr{L}_{ijlk}=\mathscr{L}_{klij}$$

(9.1.8)各式中α的取值为

$$\begin{aligned}\alpha=1 \quad & 当\ J_2=(J_2)_{\max},\ 且\ s_{ij}\dot{\eta}_{ij}>0\\ \alpha=0 \quad & 当\ J_2=(J_2)_{\max},\ 且\ s_{ij}\dot{\eta}_{ij}\leqslant 0\\ & 或当\ J_2<(J_2)_{\max}\end{aligned} \tag{9.1.10}$$

二、大变形情况的 Prandtl-Reuss 本构方程

大变形情况下，首先遇到的问题就是为了保证满足 PMI，应当采用哪一种客观应力率和客观应变率。B. Budiansky 在他的一篇未发表的文章中曾采用 Cauchy 应力 $\mathbf{t}$ 的 Jaumann 导数 $\dot{\mathbf{t}}$ (其定义见(5.2.41)式)。而后，Hutchinson 改用 Kirchhoff 应力$\underset{\circ}{\mathbf{t}}$的 Jaumann 导数 $\overset{\circ}{\underset{\circ}{\mathbf{t}}}$，并且证明改动以后边值问题才对应于一定的泛函变分问题。本节参考 Hutchinson[2] 提出的这个方案。

用$\underset{\cdot}{\mathbf{s}}$表示 Kirchhoff 应力$\underset{\cdot}{\mathbf{t}}$的偏量：

$$\underset{\cdot}{\mathbf{s}}=\underset{\cdot}{\mathbf{t}}-\frac{1}{3}\mathscr{I}_1(\underset{\cdot}{\mathbf{t}})\mathbf{I} \tag{9.1.11}$$

变形率$\boldsymbol{d}$可分为弹性与塑性两部分之和：

$$\mathbf{d}=\mathbf{d}^e+\mathbf{d}^p \tag{9.1.12}$$

分别将小变形情况的 Prandtl-Reuss 方程中的弹性与塑性应变率部分作如下的推广。变形率的弹性部分为

$$\mathbf{d}^e = \frac{1}{\underset{\cdot}{E}}[(1+\nu)\underset{\cdot}{\dot{\mathbf{t}}} - \nu\mathscr{J}_1(\underset{\cdot}{\dot{\mathbf{t}}})\mathbf{I}] \qquad (9.1.13a)$$

式中 E 为 Kirchhoff 应力-对数应变单向拉伸曲线的弹性模量①。在随体 Lagrange 坐标系 $\{X^A, t\}$ 中，(9.1.13a)式的分量形式为

$$\begin{aligned}
\hat{d}^e_{AB} &= \frac{1}{\underset{\cdot}{E}}[(1+\nu)\hat{\underset{\cdot}{\dot{t}}}_{AB} - \nu\hat{g}_{AB}\hat{\underset{\cdot}{\dot{t}}}{}^C_C] \\
&= \frac{1}{\underset{\cdot}{E}}[(1+\nu)\hat{g}_{AC}\hat{g}_{BD} - \nu\hat{g}_{AB}\hat{g}_{CD}]\hat{\underset{\cdot}{\dot{t}}}{}^{CD} \\
&= \frac{1}{\underset{\cdot}{E}}\left[\frac{1}{2}(1+\nu)(\hat{g}_{AC}\hat{g}_{BD} + \hat{g}_{AD}\hat{g}_{BC}) - \nu\hat{g}_{AB}\hat{g}_{CD}\right]\hat{\underset{\cdot}{\dot{t}}}{}^{CD} \\
&= \hat{\underset{\cdot}{\mathscr{M}}}_{ABCD}\hat{\underset{\cdot}{\dot{t}}}{}^{CD} \qquad (9.1.13b)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{d}^e = \underset{\cdot}{\mathscr{M}}:\underset{\cdot}{\dot{\mathbf{t}}}$$

式中 $\underset{\cdot}{\mathscr{M}}$ 表示四阶弹性柔度张量，下面的记号“。”表示所采用的是 Kirchhoff 应力张量。变形率的塑性部分为

$$\mathbf{d}^p = \frac{\alpha}{h}\dot{J}_2\underset{\cdot}{\mathbf{s}}$$

$$\hat{d}^p_{AB} = \frac{\alpha}{h}\dot{J}_2\hat{\underset{\cdot}{s}}_{AB} \qquad (9.1.14)$$

式中

---

① 在变形率 $\mathbf{d}$ 主方向沿 Euler 标架(即变形率标架与 Euler 标架重合)情况下，$d_{(iI)}=0$，当 $i\neq I$，由(3.4.58)式，$(\dot{\mathbf{E}}^{(0)})_{(II)} = d_{(II)}$，($i=I$，对指标不取和)，因此对数应变率分量与变形率分量相等。沿单向拉伸方向，变形率分量 $d_{(II)}$ 对时间的积分就是对数应变 $(\mathbf{E}^{(0)})_{(II)}$。

$$J_2 = J_2(\mathbf{t}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{s}:\mathbf{s} = \frac{1}{2}\,\mathbf{s}:\mathbf{t} = \frac{1}{2}\,\hat{s}_{AB}\hat{s}^{AB} = \frac{1}{2}\,\hat{s}_{AB}\hat{t}^{AB}$$

$$= \frac{1}{3}\,t_e^2 = -\mathscr{J}_2(\mathbf{s}) \tag{9.1.15a}$$

由上式对时间求导得

$$\dot{J}_2 = \dot{J}_2(\mathbf{t}) = \mathbf{s}:\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}:\overset{\nabla}{\mathbf{s}} = \mathbf{s}:\overset{\nabla}{\mathbf{t}} = \hat{s}_{AB}\overset{\nabla}{\hat{t}}{}^{AB} \tag{9.1.15b}$$

其中第三个等式 $\mathbf{s}:\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}:\overset{\nabla}{\mathbf{s}}$ 可证明如下：利用 Jaumann 导数的定义(5.2.41)式，可知

$$\begin{aligned}\mathbf{s}:\overset{\nabla}{\mathbf{s}} &= \mathbf{s}:(\dot{\mathbf{s}} - \mathbf{w}\cdot\mathbf{s} + \mathbf{s}\cdot\mathbf{w})\\ &= \mathbf{s}:\dot{\mathbf{s}} - \mathbf{s}:(\mathbf{w}\cdot\mathbf{s}) + \mathbf{s}:(\mathbf{s}\cdot\mathbf{w})\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}\mathbf{s}:(\mathbf{w}\cdot\mathbf{s}) &= \mathrm{tr}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{w}\cdot\mathbf{s}) = \mathrm{tr}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}\cdot\mathbf{w})\\ &= (\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}):\mathbf{w} = 0\end{aligned}$$

式中最后一步的 $\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}$ 为对称张量，$\mathbf{w}$ 为反对称张量，故它们的双点积为零。同理可证 $\mathbf{s}:(\mathbf{s}\cdot\mathbf{w}) = 0$。 因此(9.1.15b)的第三个等式得证。因此$(9.1.14)_2$分量形式又可写作

$$d^p_{AB} = \frac{\alpha}{h}\,\hat{s}_{AB}\hat{s}_{CD}\,\overset{\nabla}{\hat{t}}{}^{CD} \tag{9.1.14$'$}$$

(9.1.14)′ 式表明，塑性变形率沿应力偏量的方向，也即屈服面法向，其大小正比于 Kirchhoff 应力 $\mathbf{t}$ 的 Jaumann导数 $\overset{\nabla}{\mathbf{t}}$ 在屈服面法向的投影。

将(9.1.13)和(9.1.14)代入(9.1.12)式，得到

$$\begin{aligned}\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p &= \frac{1}{E}[(1+\nu)\overset{\nabla}{\mathbf{t}} - \nu\mathbf{I}\,\mathscr{J}(\overset{\nabla}{\mathbf{t}})] + \frac{\alpha}{h}\,\mathbf{s}\mathbf{s}:\overset{\nabla}{\mathbf{t}}\\ &= \mathbf{M}:\overset{\nabla}{\mathbf{t}}\end{aligned} \tag{9.1.16a}$$

$$\hat{d}_{AB} = \frac{1}{E}\left[\frac{1}{2}(1+\nu)(\hat{g}_{AC}\hat{g}_{BD}+\hat{g}_{AD}\hat{g}_{BC}) - \nu\hat{g}_{AB}\hat{g}_{CD}\right]\hat{\dot{t}}^{CD}$$

$$+\frac{\alpha}{h}\hat{s}_{AB}\hat{s}_{CD}\hat{\dot{t}}^{CD} = \hat{M}_{ABCD}\hat{\dot{t}}^{CD} \tag{9.1.16b}$$

式中 $\mathbf{M}$ 为具有三对称性的四阶弹塑性柔度张量，其分量为$\hat{M}_{ABCD}$，

$$\mathbf{M} = \mathscr{M} + \frac{\alpha}{h}\mathbf{s}\mathbf{s}$$

$$\hat{M}_{ABCD} = \hat{\mathscr{M}}_{ABCD} + \frac{\alpha}{h}\hat{s}_{AB}\hat{s}_{CD} \tag{9.1.16c}$$

而

$$\alpha = 1 \qquad 当\ J_2(\mathbf{t}) = (J_2)_{max}，且\ \mathbf{s}:\dot{\mathbf{t}} \geqslant 0$$

$$\alpha = 0 \qquad 当\ J_2(\mathbf{t}) = (J_2)_{max}，且\ \mathbf{s}:\dot{\mathbf{t}} < 0$$

$$或当\ J_2(\mathbf{t}) < (J_2)_{max} \tag{9.1.17}$$

由于在(9.1.16a)式两端出现的均为客观量，且它们之间的运算结果仍保持客观性，故可断定（9.1.16a）式是一个满足 PMI 的本构关系。

（9.1.16a）式之逆为

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{E}{1+\nu}\left[\mathbf{d} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathbf{I}\mathscr{J}_1(\mathbf{d})\right] - \frac{E}{1+\nu}\frac{\alpha}{q}\mathbf{s}\mathbf{s}:\mathbf{d}$$

$$= \mathbf{L}:\mathbf{d} \tag{9.1.18a}$$

$$\hat{\dot{t}}^{AB} = \frac{E}{1+\nu}\left[\hat{d}^{AB} + \frac{\nu}{1-2\nu}\hat{g}^{AB}\hat{d}^{\cdot C}_{C}\right] - \frac{E}{1+\nu}\frac{\alpha}{q}\hat{s}^{AB}\hat{s}^{CD}\hat{d}_{CD}$$

$$= \frac{E}{1+\nu}\left[\hat{g}^{AC}\hat{g}^{BD} + \frac{\nu}{1-2\nu}\hat{g}^{AB}\hat{g}^{CD}\right]\hat{d}_{CD}$$

$$-\frac{E}{1+\nu}\frac{\alpha}{q}\hat{s}^{AB}\hat{s}^{CD}\hat{d}_{CD}$$

$$= \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}(\mathring{g}^{AC}\mathring{g}^{BD}+\mathring{g}^{AD}\mathring{g}^{BC})+\frac{\nu}{1-2\nu}\mathring{g}^{AB}\mathring{g}^{CD}\right]\mathring{d}_{CD}$$

$$-\frac{E}{1+\nu}\frac{\alpha}{q}\mathring{s}^{AB}\mathring{s}^{CD}\mathring{d}_{CD}$$

$$= \mathring{\mathscr{L}}^{ABCD}\mathring{d}_{CD} - \frac{E}{1+\nu}\frac{\alpha}{q}\mathring{s}^{AB}\mathring{s}^{CD}\mathring{d}_{CD}$$

$$= \mathring{L}^{ABCD}\mathring{d}_{CD} \tag{9.1.18b}$$

式中 $\mathbf{\mathring{L}}$ 为具有三对称性的四阶弹塑性刚度张量，其分量为 $\mathring{L}^{ABCD}$，

$$\mathbf{\mathring{L}} = \mathring{\mathscr{L}} - \frac{E}{1+\nu}\frac{\alpha}{q}\mathring{\mathbf{s}}\mathring{\mathbf{s}}$$

$$\mathring{L}^{ABCD} = \mathring{\mathscr{L}}^{ABCD} - \frac{E}{1+\nu}\frac{\alpha}{q}\mathring{s}^{AB}\mathring{s}^{CD} \tag{9.1.18c}$$

(9.1.18)各式中的 α 取值为

$$\alpha = 1 \quad 当\ J_2 = (J_2)_{\max},\ 且\ \mathring{\mathbf{s}}:\mathbf{d} = \mathring{s}^{AB}\mathring{d}_{AB} > 0$$

$$\alpha = 0 \quad 当\ J_2 = (J_2)_{\max},\ 且\ \mathring{\mathbf{s}}:\mathbf{d} = \mathring{s}^{AB}\mathring{d}_{AB} \leqslant 0 \quad 或当\ J_2 < (J_2)_{\max} \tag{9.1.19}$$

仿(9.1.9)式有

$$q = \frac{(1+\nu)h}{E} + 2J_2(\mathring{\mathbf{t}}) \tag{9.1.20}$$

下面讨论如何用单向拉伸或其它比例加载试验确定大变形本构关系(9.1.16)中的材料函数 $h = h(\bar{\varepsilon}_e)$。在试验中测量的是真应力，即 Cauchy 应力 $\mathbf{t}$ 以及真应变，即对数应变 $\mathbf{E}^{(0)}$，而本构关系(9.1.16)与(9.1.18)中采用的却是 Kirchhoff 应力 $\mathring{\mathbf{t}}$ 和变形率 $\mathbf{d}$，因此必须建立它们之间的联系。对(9.1.16a)取迹，得

$$\mathscr{I}_1(\mathbf{d}) = \frac{1}{E}(1-2\nu)\mathscr{I}_1(\mathring{\mathbf{t}}) \tag{9.1.21}$$

式中由(3.2.16)，$\mathscr{I}_1(\mathbf{d}) = \operatorname{div}\mathbf{v} = \dot{J}/J$ 表示 $\varkappa(t)$ 构形每单位体积的变化率。因此 $\underset{\cdot}{\dot{\mathbf{t}}}$ 与 $\dot{\mathbf{t}}$ 的关系为

$$\underset{\cdot}{\dot{\mathbf{t}}} = (J\mathbf{t})^{\cdot} = J\dot{\mathbf{t}} + \dot{J}\mathbf{t} = J\dot{\mathbf{t}} + J\mathscr{I}_1(\mathbf{d})\mathbf{t} = J\dot{\mathbf{t}} + \mathscr{I}_1(\mathbf{d})\underset{\cdot}{\mathbf{t}} \tag{9.1.22}$$

在单向拉伸试验中，假设采用笛卡儿坐标，Cauchy 应力张量的分量为 $t_{11} = t_e$，其余 $t_{ij} = 0$，t_e 为 Cauchy 等效应力。Kirchhoff 应力张量的分量为

$$\underset{\cdot}{t}_{11} = \frac{\rho_0}{\rho} t_{11} = \frac{\rho_0}{\rho} t_e = \underset{\cdot}{t}_e,$$

其余 $\underset{\cdot}{t}_{ij} = 0$，$\underset{\cdot}{t}_e$ 为 Kirchhoff 等效应力。Kirchhoff 应力偏量的分量为

$$\underset{\cdot}{s}_{11} = \frac{2}{3}\underset{\cdot}{t}_{11},\quad \underset{\cdot}{s}_{22} = \underset{\cdot}{s}_{33} = -\frac{1}{3}\underset{\cdot}{t}_{11},\quad \text{其余}\ \underset{\cdot}{s}_{ij} = 0$$

将 (9.1.16a) 用于单向拉伸，得

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{1}{\underset{\cdot}{E}}[(1+\nu)\overset{\circ}{\underset{\cdot}{t}}_{11} - \nu\overset{\circ}{\underset{\cdot}{t}}_{11}] + \frac{1}{h}\left(\frac{2}{3}\underset{\cdot}{t}_{11}\right)^2 \overset{\circ}{\underset{\cdot}{t}}_{11} \\ &= \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{h}\left(\frac{2}{3}\underset{\cdot}{t}_{11}\right)^2\right]\overset{\circ}{\underset{\cdot}{t}}_{11} \end{aligned} \tag{9.1.23}$$

在单向拉伸状态下，试件不旋转，旋率 $\mathbf{w} = \mathbf{0}$，所以 $\overset{\circ}{\underset{\cdot}{t}}_{11} = \dot{\underset{\cdot}{t}}_{11}$，(9.1.23)可写作

$$d_{11} = \left[\frac{1}{\underset{\cdot}{E}} + \frac{1}{h}\left(\frac{2}{3}\underset{\cdot}{t}_{11}\right)^2\right]\dot{\underset{\cdot}{t}}_{11} = \left[\frac{1}{\underset{\cdot}{E}} + \frac{1}{h}\left(\frac{2}{3}\underset{\cdot}{t}_{11}\right)^2\right]\dot{\underset{\cdot}{t}}_e \tag{9.1.24}$$

d_{11} 表示单位时间单位长度(沿拉伸方向)的伸长，故由(3.4.58)式拉伸方向的对数应变(真应变)为

$$\ln \lambda_1 = \int d_{11} dt$$

如图 9.1 所示，用 $\underset{\circ}{E}_t$ 表示单向拉伸 Kirchhoff 应力-对数应变曲线的切线模量，则(9.1.24)式可写成

$$\frac{d(\ln\lambda_1)}{d\underset{\circ}{t}_e}=\frac{1}{\underset{\circ}{E}}+\frac{1}{h}\left(\frac{2}{3}\underset{\circ}{t}_e\right)^2=\frac{1}{\underset{\circ}{E}_t}$$

故

$$\frac{1}{h}=\left(\frac{3}{2\underset{\circ}{t}_e}\right)^2\left(\frac{1}{\underset{\circ}{E}_t}-\frac{1}{\underset{\circ}{E}}\right) \tag{9.1.25}$$

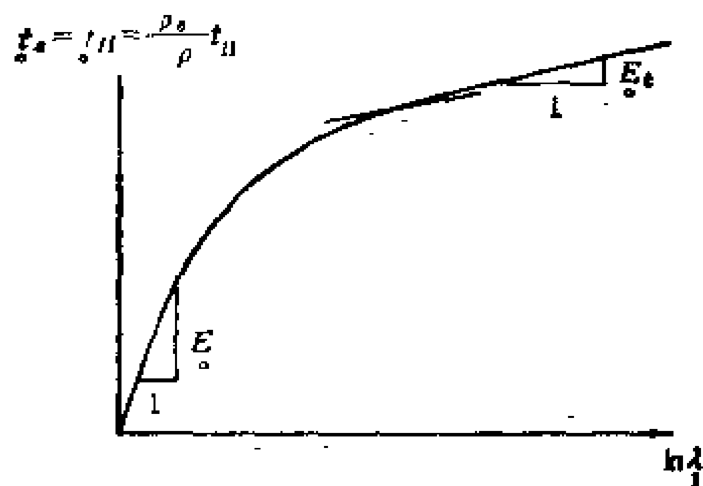


图 9.1

通常用单向拉伸 Cauchy 应力-对数应变图的切线模量 E_t 表示函数 h。为此，将(9.1.21)式代入(9.1.22)，在单向拉伸状态下得：

$$\underset{\circ}{t}_{11}=J t_{11}+\frac{1-2\nu}{\underset{\circ}{E}}\underset{\circ}{t}_{11}t_{11}$$

由此式解出

$$\underset{\circ}{t}_{11}=\frac{\frac{\rho_0}{\rho}t_{11}}{1-\frac{1-2\nu}{\underset{\circ}{E}}t_{11}}$$

代入(9.1.24)得

$$\frac{1}{E_t}=\frac{d(\ln\lambda_1)}{dt_{11}}=\frac{\left[\frac{1}{\underset{\cdot}{E}}+\frac{1}{h}\left(\frac{2}{3}t_{11}\right)^2\right]\frac{\rho_0}{\rho}}{1-(1-2\nu)\frac{t_{11}}{\underset{\cdot}{E}}}$$

由此式解出 $1/h$ 得

$$\frac{1}{h}=\left(\frac{3}{2\underset{\cdot}{t}_e}\right)^2\left\{\frac{\rho}{\rho_0}\left[1-(1-2\nu)\frac{t_e}{\underset{\cdot}{E}}\right]\frac{1}{E_t}-\frac{1}{\underset{\cdot}{E}}\right\}\quad(9.1.26)$$

为了全部用 Cauchy 应力（真应力)-对数应变单向拉伸曲线中的量表示材料函数 h，我们将(9.1.26)式中的 $\underset{\cdot}{E}$ 用 E 表示:

在单向拉伸试验的弹性阶段

$$\underset{\cdot}{E}=\frac{d\underset{\cdot}{t}_{11}}{d(\ln\lambda_1)}=\frac{d(Jt_{11})}{d(\ln\lambda_1)}=\frac{dJ}{d(\ln\lambda_1)}t_{11}+J\frac{dt_{11}}{d(\ln\lambda_1)}$$

$$=\frac{\dot{J}}{(\ln\lambda_1)^{\cdot}}t_{11}+JE\qquad(a)$$

由于 $\dot{J}=J\mathscr{J}_1(\mathbf{d})$，在单向拉伸的弹性阶段显然有:

$$\dot{J}=J(1-2\nu)d_{11}=J(1-2\nu)(\ln\lambda_1)^{\cdot}$$

即

$$\frac{\dot{J}}{(\ln\lambda_1)^{\cdot}}=J(1-2\nu)\qquad(b)$$

将(b)代入(a)并推广到一般应力状态，得

$$\underset{\cdot}{E}=J[(1-2\nu)t_e+E]\qquad(c)$$

将(c)式代入(9.1.26)，并注意 $\underset{\cdot}{t}_e=Jt_e$，得

$$\frac{1}{h}=\left(\frac{3}{2t_e}\right)^2\frac{1}{E_tJ^3}\left\{1-\frac{(1-2\nu)t_e+E_t}{(1-2\nu)t_e+E}\right\}\quad(9.1.26)'$$

其中 E_t 看作 t_e 的函数。

以上我们介绍了大变形情况 Prandtl-Reuss 本构方程的一种

比较合理方案。大变形情况的 Prandtl-Reuss 方程还有许多其它方案。例如，北川浩[3] 曾采用

$$\overset{\circ}{\mathbf{t}}/J = \dot{\mathbf{t}} + \mathscr{F}_1(\mathbf{d})\mathbf{t}$$

为客观应力率，建立了一个不同于上述的本构关系。

最后我们指出，张量形式的本构方程 (9.1.16a) 与 (9.1.18a) 可以沿任何的坐标系分解而得到其分量形式，(9.1.16b)与 (9.1.18b)各是它们沿随体坐标系 $\{X^A, t\}$ 分解的分量形式。这样，固定 X^A，变化 t，就能得到同一质点材料的变形率或应力率的历史。当然我们也可以沿 Euler 坐标系 $\{x^i\}$ 分解，得到 (9.1.16a)的分量形式：

$$d_{ij} = \frac{1}{\dot{E}}\left[\frac{1}{2}(1+\nu)(g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk}) - \nu g_{ij}g_{kl}\right]\dot{\tau}^{kl} + \frac{\alpha}{h} \dot{s}_{ij}\dot{s}_{kl}\dot{\tau}^{kl} = \dot{M}_{ijkl}\dot{\tau}^{kl} \tag{9.1.16d}$$

及 (9.1.18a) 的分量形式：

$$\dot{\tau}^{ij} = \frac{\dot{E}}{1+\nu}\left[d^{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} g^{ij}d_k^k\right] - \frac{\dot{E}}{1+\nu}\frac{\alpha}{q}\dot{s}^{ij}\dot{s}^{kl}d_{kl} = \dot{L}^{ijkl}d_{kl} \tag{9.1.18d}$$

但是对于一定的x^i，随着 t 的变化，(9.1.16d) 与 (9.1.18d) 并不代表同一个质点材料的变形率与应力率历史，因为在空间同一个位置 x^i，先后有不同的质点来占有这个位置。

§9.2 机动硬化的 J_2 流动理论

Tvergaard[4] 遵循前节中 Budiansky 与 Hutchinson 的思路，提出了一个有限变形情况下的机动硬化 J_2 流动理论。所谓机动硬化，是指在塑性变形过程中屈服面在应力空间中只移动而大小不

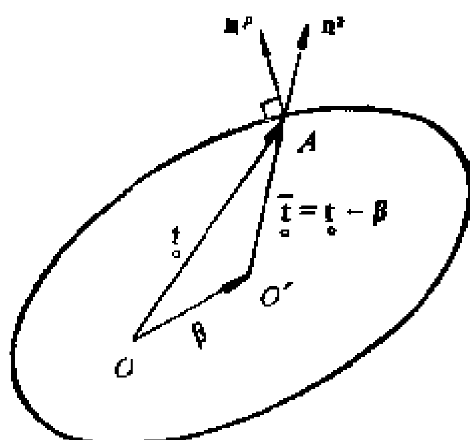


图 9.2

变。采用 Kirchhoff 应力的 Jaumann 导数 $\dot{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}$ 和变形率 $\mathbf{d}$ 来描述本构方程，同时引入背应力的概念。如图 9.2 所示意，O 代表应力空间中的原点，它表示未受力状态。O' 点为当前屈服面的中心，A 点代表所研究点的即时(当前)应力状态。记 OO' 为 $\boldsymbol{\beta}$，$O'A$ 为 $\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}$，而 OA 就是 Kirchhoff 应力 $\underset{\cdot}{\mathbf{t}}$，显然

$$\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}} = \underset{\cdot}{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\beta} \tag{9.2.1a}$$

式中 $\boldsymbol{\beta}$ 称为背应力，它表示在应力空间中屈服面的即时位置。在物理上它代表由于塑性变形在材料中引起的微观残余应力。$\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}$ 称为主动应力，用字母上面的一横"—"表示。(9.2.1a) 的分量形式为

$$\hat{\bar{\underset{\cdot}{t}}}^{AB} = \hat{\underset{\cdot}{t}}^{AB} - \hat{\beta}^{AB} \tag{9.2.1b}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \hat{\beta}^{AB}\hat{\mathbf{g}}_A\hat{\mathbf{g}}_B \tag{9.2.2}$$

主动 Kirchhoff 应力偏量记作 $\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{s}}}$：

$$\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{s}}} = \bar{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}} - \frac{1}{3}\mathscr{I}_1(\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}})\mathbf{I} \tag{9.2.3a}$$

其分量形式为

$$\hat{\bar{\underset{\cdot}{s}}}^{AB} = \hat{\bar{\underset{\cdot}{t}}}^{AB} - \frac{1}{3}\hat{g}^{AB}\hat{\bar{\underset{\cdot}{t}}}^{\cdot C}_{\cdot C} = (\hat{\underset{\cdot}{t}}^{AB} - \hat{\beta}^{AB}) - \frac{1}{3}\hat{g}^{AB}(\hat{\underset{\cdot}{t}}^{\cdot C}_{\cdot C} - \hat{\beta}^{\cdot C}_{\cdot C})$$

$$= \underset{\circ}{s}^{AB} - \left(\hat{\beta}^{AB} - \frac{1}{3}\hat{g}^{AB}\hat{\beta}^{C}_{\cdot C}\right) \tag{9.2.3b}$$

这时应将 Mises 屈服函数（9.1.15a）中的等效应力改为主动等效应力

$$J_2(\underset{\circ}{\bar{\mathbf{t}}}) = \frac{1}{3}\underset{\cdot}{\bar{t}}_e^2 = \frac{1}{2}\underset{\cdot}{\bar{\mathbf{s}}}:\underset{\circ}{\bar{\mathbf{s}}} = \text{const} = \frac{1}{3}\underset{\cdot}{t}_Y^2 \tag{9.2.4}$$

式中$\underset{\cdot}{\bar{t}}_e$为主动等效应力，$\underset{\cdot}{t}_Y$为材料初始屈服时的 Kirchhoff 等效应力。仿（9.1.15b）式，有

$$\dot{J}_2(\underset{\cdot}{\bar{\mathbf{t}}}) = \underset{\cdot}{\bar{\mathbf{s}}}:\underset{\cdot}{\dot{\bar{\mathbf{s}}}} = \underset{\cdot}{\bar{\mathbf{s}}}:\underset{\cdot}{\bar{\mathbf{s}}} = \underset{\cdot}{\bar{\mathbf{s}}}:\underset{\cdot}{\dot{\mathbf{t}}} = \hat{\bar{s}}_{AB}\hat{\dot{t}}^{AB} \tag{9.2.5}$$

仿(9.1.16)，可得本构方程

$$\mathbf{d} = \frac{1}{\underset{\circ}{E}}[(1+\nu)\underset{\cdot}{\dot{\mathbf{t}}} - \nu\mathbf{I}\mathscr{J}_1(\underset{\circ}{\dot{\mathbf{t}}})] + \frac{\alpha}{\bar{h}}\underset{\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{s}}\bar{\mathbf{s}}}:\underset{\cdot}{\dot{\mathbf{t}}} = \underset{\cdot}{\bar{\mathbf{M}}}:\underset{\cdot}{\dot{\mathbf{t}}} \tag{9.2.6a}$$

$$\begin{aligned}
\hat{d}_{AB} &= \frac{1}{\underset{\cdot}{E}}\left[\frac{1}{2}(1+\nu)(\hat{g}_{AC}\hat{g}_{BD} + \hat{g}_{AD}\hat{g}_{BC}) - \nu\hat{g}_{AB}\hat{g}_{CD}\right]\hat{\dot{t}}^{CD} \\
&\quad + \frac{\alpha}{\bar{h}}\hat{\bar{s}}_{AB}\hat{\bar{s}}_{CD}\hat{\dot{t}}^{CD} \\
&= \hat{\mathscr{M}}_{ABCD}\hat{\dot{t}}^{CD} + \frac{\alpha}{\bar{h}}\hat{\bar{s}}_{AB}\hat{\bar{s}}_{CD}\hat{\dot{t}}^{CD} \\
&= \hat{\bar{M}}_{ABCD}\hat{\dot{t}}^{CD}
\end{aligned} \tag{9.2.6b}$$

式中$\underset{\cdot}{\bar{\mathbf{M}}}$为具有三对称性的四阶弹塑性柔度张量，其分量为$\hat{\bar{M}}_{ABCD}$:

$$\begin{aligned}
\underset{\circ}{\bar{\mathbf{M}}} &= \underset{\cdot}{\mathscr{M}} + \frac{\alpha}{\bar{h}}\underset{\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{s}}\bar{\mathbf{s}}} \\
\hat{\bar{M}}_{ABCD} &= \hat{\mathscr{M}}_{ABCD} + \frac{\alpha}{\bar{h}}\hat{\bar{s}}_{AB}\hat{\bar{s}}_{CD}
\end{aligned} \tag{9.2.6c}$$

仿(9.1.17)，在(9.2.6)各式中α的取值为

$$\alpha = 1 \qquad \text{当 } J_2(\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}) = \frac{1}{3}\underset{\cdot}{t}_Y^2, \text{ 且 } \bar{\underset{\cdot}{\mathbf{s}}}:\overset{\circ}{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}} = \hat{\bar{\underset{\cdot}{s}}}_{AB}\hat{\overset{\circ}{\underset{\cdot}{t}}}{}^{AB} \geqslant 0$$

$$\alpha = 0 \qquad \text{当 } J_2(\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}) = \frac{1}{3}\underset{\cdot}{t}_Y^2, \text{ 且 } \bar{\underset{\cdot}{\mathbf{s}}}:\overset{\circ}{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}} = \hat{\bar{\underset{\cdot}{s}}}_{AB}\hat{\overset{\circ}{\underset{\cdot}{t}}}{}^{AB} < 0 \tag{9.2.7}$$

$$\text{或当 } J_2(\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}) < \frac{1}{3}\underset{\cdot}{t}_Y^2$$

(9.2.6)各式右端第二项的 $\bar{h}$ 区别于前节(§9.1)的 h，是机动硬化模型的材料函数。 这项表明塑性变形率 $\mathbf{d}^p$ 沿主动应力偏量 $\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{s}}}$ 的方向，也就是沿不断移动的屈服面的法向。塑性变形率 $\mathbf{d}^p$ 的大小仍正比于 Kirchhoff 应力的 Jaumann 导数 $\overset{\circ}{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}$ 在屈服面法向的投影。

(9.2.6)式之逆为

$$\overset{\circ}{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}} = \frac{\underset{\cdot}{E}}{1+\nu}\left[\mathbf{d} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathbf{I}\mathscr{I}_1(\mathbf{d})\right] - \frac{\underset{\cdot}{E}}{1+\nu}\frac{\alpha}{\bar{q}}\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{s}}}\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{s}}}:\mathbf{d}$$
$$= \bar{\underset{\cdot}{\mathbf{L}}}:\mathbf{d} \tag{9.2.8a}$$

$$\hat{\overset{\circ}{\underset{\cdot}{t}}}{}^{AB} = \frac{\underset{\cdot}{E}}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}(\hat{g}^{AC}\hat{g}^{BD} + \hat{g}^{AD}\hat{g}^{BC}) + \frac{\nu}{1-2\nu}\hat{g}^{AB}\hat{g}^{CD}\right]\hat{d}_{CD}$$
$$- \frac{\underset{\cdot}{E}}{1+\nu}\frac{\alpha}{\bar{q}}\hat{\bar{\underset{\cdot}{s}}}{}^{AB}\hat{\bar{\underset{\cdot}{s}}}{}^{CD}\hat{d}_{CD}$$
$$= \underset{\cdot}{\mathscr{L}}{}^{ABCD}\hat{d}_{CD} - \frac{\underset{\cdot}{E}}{1+\nu}\frac{\alpha}{\bar{q}}\hat{\bar{\underset{\cdot}{s}}}{}^{AB}\hat{\bar{\underset{\cdot}{s}}}{}^{CD}\hat{d}_{CD}$$
$$= \hat{\bar{\underset{\cdot}{L}}}{}^{ABCD}\hat{d}_{CD} \tag{9.2.8b}$$

式中 $\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{L}}}$ 为具有三对称性的四阶弹塑性刚度张量，其分量为 $\hat{\bar{\underset{\cdot}{L}}}{}^{ABCD}$：

$$\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{L}}} = \underset{\cdot}{\mathscr{L}} - \frac{\underset{\cdot}{E}}{1+\nu}\frac{\alpha}{\bar{q}}\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{s}}}\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{s}}}$$

$$\hat{L}^{ABCD} = \hat{\mathscr{L}}^{ABCD} - \frac{E}{1+\nu}\frac{\alpha}{\bar{q}}\hat{s}^{AB}\hat{s}^{CD} \tag{9.2.8c}$$

仿(9.1.20),(9.2.8)各式中的材料函数 $\bar{q}$ 如下:

$$\bar{q} = (1+\nu)\frac{\bar{h}}{E} + 2J_2(\bar{\mathbf{t}}) = (1+\nu)\frac{\bar{h}}{E} + \frac{2}{3}t_Y^2 \tag{9.2.9}$$

(9.2.8)各式中的 α 取值如下:

$$\alpha = 1 \qquad \text{当}\ J_2(\bar{\mathbf{t}}) = \frac{1}{3}t_Y^2,\ \text{且}\ \bar{\mathbf{s}}:\mathbf{d} = \hat{s}^{AB}d_{AB} > 0$$

$$\alpha = 0 \qquad \text{当}\ J_2(\bar{\mathbf{t}}) = \frac{1}{3}t_Y^2,\ \text{且}\ \bar{\mathbf{s}}:\mathbf{d} = \hat{s}^{AB}d_{AB} \leqslant 0$$

$$\text{或当}\ J_2(\bar{\mathbf{t}}) < \frac{1}{3}t_Y^2 \tag{9.2.10}$$

$\bar{h}$ 为 Kirchhoff 应力的函数，$\bar{h} = \bar{h}(J_2(\mathbf{t}))$，由单向拉伸试验定出。仿(9.1.25)可得

$$\frac{1}{\bar{h}} = \left(\frac{3}{2t_Y}\right)^2\left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E}\right) \tag{9.2.11}$$

下面讨论如何建立背应力 $\boldsymbol{\beta}$ 的演化方程。对于机动硬化模型,屈服面只移动而不膨胀,故由(9.2.4)式,有

$$\dot{J}_2(\bar{\mathbf{t}}) = 0 \tag{9.2.12}$$

(9.2.12) 式就是所谓一致性条件。它表示在加载条件下应力空间中的应力点 A 始终在屈服面上 (见图 9.2)。由(9.2.5)式，一致性条件(9.2.12)式又可写为:

$$\bar{\mathbf{s}}:\dot{\bar{\mathbf{t}}} = \bar{\mathbf{s}}:(\dot{\mathbf{t}} - \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \hat{s}_{AB}(\hat{\dot{t}}^{AB} - \hat{\dot{\beta}}^{AB}) = 0 \tag{9.2.13}$$

为了得到 $\boldsymbol{\beta}$ 的演化方程,必须对屈服面中心 O' 点朝什么方向移动作出假设。 Prager[5] 建议采用 O' 点沿 A 点处屈服面的法向 (即主动应力偏量的方向)移动的假设,而 Ziegler[6] 则提出 O' 点沿主

动应力张量 $\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}$ 方向移动的方案。图 9.2 中用 $\mathbf{n}^p$ 和 $\mathbf{n}^z$ 分别表示按 Prager 和 Ziegler 的建议屈服面中心 O' 点的瞬时移动方向。采用 Ziegler 的方案则有

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\mu}(\underset{\cdot}{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\beta}) = \dot{\mu}\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}, \quad \dot{\mu} \geqslant 0 \tag{9.2.14}$$

这里 $\dot{\mu} \geqslant 0$ 表示沿 $\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}$ 的方向移动。将(9.2.14)代入(9.2.13)，可求出

$$\dot{\mu} = \frac{\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{s}}} : \dot{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}}{\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{s}}} : \bar{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}} \tag{9.2.15}$$

至此我们介绍了大变形情况下机动硬化 J_2 流动理论的一个方案。对于同一种材料(材料的单向拉伸曲线一定)，同一个变形历史，按 § 9.1 第二小节(各向同性硬化)与 § 9.2 (机动硬化)这两种本构关系定出的函数 h 与 $\bar{h}$ 不同，算出的应力也不同。但在比例加载条件下，利用(9.1.16)，(9.2.6)及图 9.3 可以证明它们将给出相同的结果。比例加载历史对应于应力空间中过原点的一条射线，其数学表述为

$$\underset{\cdot}{\mathbf{t}} = \lambda \underset{\cdot}{\mathbf{t}}^{\circ}, \qquad \underset{\cdot}{\hat{t}}^{AB} = \lambda \underset{\cdot}{\hat{t}}^{\circ AB} \tag{9.2.16}$$

式中 $\underset{\cdot}{\mathbf{t}}^{\circ}$ 为常张量，λ 为随加载过程单调递增的载荷因子。初始屈服时 λ 的值 λ_Y 可确定如下：

将(9.2.4)式用于初始屈服。这时 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$，$\bar{\underset{\cdot}{\mathbf{s}}} = \underset{\cdot}{\mathbf{s}}$，(9.2.4) 变成

$$\frac{3}{2} \underset{\cdot}{\hat{s}}_{AB} \underset{\cdot}{\hat{s}}^{AB} = \underset{\cdot}{\tau}_Y^2 \tag{9.2.17}$$

引入 $\underset{\cdot}{\mathbf{t}}^{\circ}$ 的偏量，记作 $\underset{\cdot}{\mathbf{s}}^{\circ}$，则

$$\underset{\cdot}{\mathbf{s}}^{\circ} = \underset{\cdot}{\mathbf{t}}^{\circ} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \mathscr{I}_1(\underset{\cdot}{\mathbf{t}}^{\circ})$$

$$\underset{\cdot}{\hat{s}}^{\circ AB} = \underset{\cdot}{\hat{t}}^{\circ AB} - \frac{1}{3} \hat{g}^{AB} \underset{\cdot}{\hat{t}}^{\circ C}{}_{\cdot C} \tag{9.2.18a}$$

$\underset{\circ}{\mathbf{t}}^{\circ}$ 的等效应力为

$$\underset{\circ}{t}_e^{\circ} = \left(\frac{3}{2} \underset{\circ}{s}^{\circ}{}_{AB} \underset{\circ}{s}^{\circ AB} \right)^{1/2} \qquad (9.2.18b)$$

显然

$$\underset{\circ}{\mathbf{s}} = \lambda \underset{\circ}{\mathbf{s}}^{\circ}, \quad \underset{\circ}{s}_{AB} = \lambda \underset{\circ}{s}^{\circ}_{AB} \qquad (9.2.18c)$$

将 (9.2.18c) 代入(9.2.17)，再利用(9.2.18b)，得到

$$\lambda_Y = \underset{\circ}{t}_Y / \underset{\circ}{t}_e^{\circ} \qquad (9.2.19)$$

当 $\lambda > \lambda_Y$ 时，应力空间中各向同性硬化 ($\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$) 与机动硬化 ($\boldsymbol{\beta} = (\lambda - \lambda_Y)\underset{\circ}{\mathbf{t}}^{\circ}$) 情况示于图 9.3。

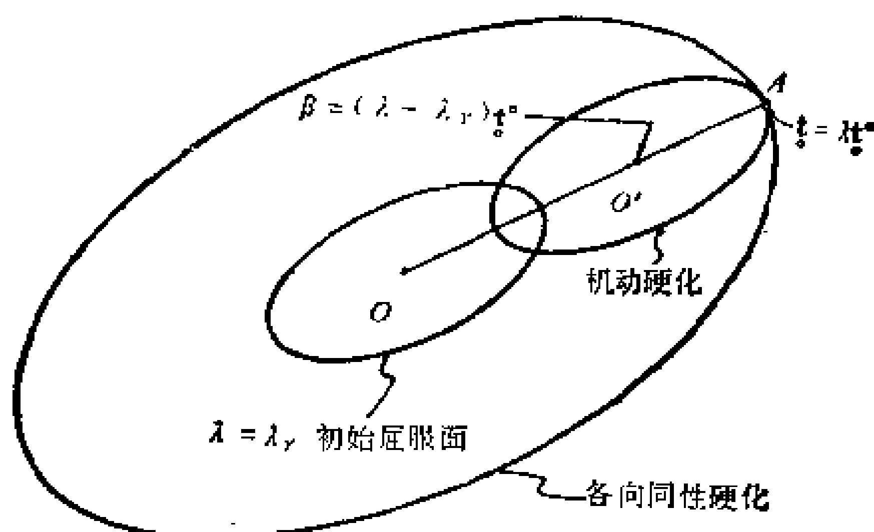


图 9.3

以上 § 9.1 与 § 9.2 的本构关系，即无论各向同性硬化 J_2 流动理论或机动硬化 J_2 流动理论都属于经典的率无关塑性规律范畴，本构关系中均不含自然时间。它们可概括为下一节中的一般形式。

§ 9.3 经典的塑性一般规律

如已约定的，本节仍不考虑时间和温度效应。Hill 在文献

[7—10] 中所提出的有限变形情况的一般本构规律表示成为变形率张量与任意的客观应力率张量之间的一次齐次关系式。这些关系式可写成以下的形式:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p = \left[\underset{\cdot}{\mathscr{M}} + \frac{\alpha}{h}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}\right] : \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}} = \underset{\cdot}{\mathbf{M}} : \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}} \quad (9.3.1a)$$

$$\hat{d}_{AB} = \hat{d}^e_{AB} + \hat{d}^p_{AB} = \left[\underset{\cdot}{\hat{\mathscr{M}}}_{ABCD} + \frac{\alpha}{h}\hat{\mu}_{AB}\hat{\mu}_{CD}\right]\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\hat{t}}}{}^{CD} = \underset{\cdot}{\hat{M}}_{ABCD}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\hat{t}}}{}^{CD}$$

$$(9.3.1b)$$

式中

$$\underset{\cdot}{\mathbf{M}} = \underset{\cdot}{\mathscr{M}} + \frac{\alpha}{h}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}$$

$$\underset{\cdot}{\hat{M}}_{ABCD} = \underset{\cdot}{\hat{\mathscr{M}}}_{ABCD} + \frac{\alpha}{h}\hat{\mu}_{AB}\hat{\mu}_{CD} \quad (9.3.1c)$$

$\underset{\cdot}{\mathscr{M}}$ 称为瞬时弹性柔度张量，$\underset{\cdot}{\mathbf{M}}$ 称为瞬时弹塑性柔度张量，它们都与即时的应力有关。$\boldsymbol{\mu}$ 沿屈服面的外法线方向。(9.3.1b) 的塑性项的形式表明：塑性变形率 $\mathbf{d}^p$ 沿屈服面的法向，且只有应力率张量沿屈服面外法线方向的分量引起塑性变形。(9.3.1)各式中的 α 取值为

$$\begin{aligned} &\alpha = 1 \qquad \text{当 } \underset{\cdot}{\mathbf{t}} \text{ 在屈服面上，且 } \boldsymbol{\mu} : \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}} \geqslant 0 \\ &\alpha = 0 \qquad \text{当 } \underset{\cdot}{\mathbf{t}} \text{ 在屈服面上，且 } \boldsymbol{\mu} : \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}} < 0 \\ &\qquad\qquad \text{或当 } \underset{\cdot}{\mathbf{t}} \text{ 在屈服面内} \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

仍假设无塑性体积变形，故 $\boldsymbol{\mu}$ 为偏量：

$$\mathscr{I}_1(\boldsymbol{\mu}) = 0$$

h 为硬化率的度量，一般依赖于变形历史。

现在来求(9.3.1a,b)式之逆。由(9.3.1b)，迁项得到

$$\underset{\cdot}{\hat{\mathscr{M}}}_{ABCD}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\hat{t}}}{}^{CD} = \hat{d}_{AB} - \frac{\alpha}{h}\hat{\mu}_{AB}\hat{\mu}_{CD}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\hat{t}}}{}^{CD} \quad (9.3.1)'$$

$\underset{\cdot}{\mathscr{M}}$ 与其逆 $\underset{\cdot}{\mathscr{L}}$ 的分量之间应满足

$$\underset{\cdot}{\hat{\mathscr{L}}}^{RSAB}\underset{\cdot}{\hat{\mathscr{M}}}_{ABCD} = \delta_C^R\delta_D^S$$

以 $\underset{\cdot}{\hat{\mathscr{L}}}^{RSAB}$ 乘(9.3.1)′,得

$$\underset{\cdot}{\hat{t}}^{RS} = \underset{\cdot}{\hat{\mathscr{L}}}^{RSAB}\left[\hat{d}_{AB} - \frac{\alpha}{h}\hat{\mu}_{AB}\hat{\mu}_{CD}\underset{\cdot}{\hat{t}}^{CD}\right]$$

或写成

$$\underset{\cdot}{\hat{t}}^{AB} = \underset{\cdot}{\hat{\mathscr{L}}}^{ABCD}\left[\hat{d}_{CD} - \frac{\alpha}{h}\hat{\mu}_{CD}\hat{\mu}_{MN}\underset{\cdot}{\hat{t}}^{MN}\right] \tag{9.3.3}$$

记

$$\underset{\cdot}{\hat{\mathscr{L}}}^{ABCD}\hat{\mu}_{CD} = \hat{\lambda}^{AB} \tag{9.3.4}$$

并利用等式(此等式将在后面证明):

$$\hat{\mu}_{MN}\underset{\cdot}{\hat{t}}^{MN} = \frac{h}{g}\hat{\lambda}^{CD}\hat{d}_{CD} \tag{9.3.5}$$

式中

$$g = h + \hat{\mu}_{RS}\hat{\lambda}^{RS} \tag{9.3.6}$$

则(9.3.3)式成为:

$$\underset{\cdot}{\hat{t}}^{AB} = \left[\underset{\cdot}{\hat{\mathscr{L}}}^{ABCD} - \frac{\alpha}{g}\hat{\lambda}^{AB}\hat{\lambda}^{CD}\right]\hat{d}_{CD} = \underset{\cdot}{\hat{L}}^{ABCD}\hat{d}_{CD} \tag{9.3.7a}$$

$$\underset{\cdot}{\mathbf{t}} = \left[\underset{\cdot}{\mathscr{L}} - \frac{\alpha}{g}\boldsymbol{\lambda\lambda}\right]:\mathbf{d} = \underset{\cdot}{\mathbf{L}}:\mathbf{d} \tag{9.3.7b}$$

式中

$$\underset{\cdot}{\mathbf{L}} = \underset{\cdot}{\mathscr{L}} - \frac{\alpha}{g}\boldsymbol{\lambda\lambda}$$

$$\underset{\cdot}{\hat{L}}^{ABCD} = \underset{\cdot}{\hat{\mathscr{L}}}^{ABCD} - \frac{\alpha}{g}\hat{\lambda}^{AB}\hat{\lambda}^{CD} \tag{9.3.7c}$$

$\underset{\cdot}{\mathscr{L}}$ 与 $\underset{\cdot}{\mathbf{L}}$ 分别称为瞬时弹性刚度张量与瞬时弹塑性刚度张量，它们均具有三对称性。(9.3.7)各式中的 α 取值为

$$\alpha = 1 \qquad \text{当 } \underset{\cdot}{\mathbf{t}} \text{ 在屈服面上，且 } \boldsymbol{\lambda}:\mathbf{d} = \hat{\lambda}^{AB}\hat{d}_{AB} > 0$$

$$\alpha = 0 \qquad \text{当 } \underset{\cdot}{\mathbf{t}} \text{ 在屈服面上，且 } \boldsymbol{\lambda}:\mathbf{d} = \hat{\lambda}^{AB}\hat{d}_{AB} \leqslant 0 \tag{9.3.8}$$

$$\text{或当 } \underset{\cdot}{\mathbf{t}} \text{ 在屈服面内}$$

现在来证明等式 (9.3.5)：(9.3.3)式两端乘以 $\hat{\mu}_{AB}$，并注意(9.3.4)式，得到(令 $\alpha = 1$)

$$\hat{\mu}_{AB}\underset{\cdot}{\hat{t}}^{AB} = \underset{\cdot}{\hat{\mathscr{L}}}^{ABCD}\hat{\mu}_{AB}\left[\hat{d}_{CD} - \frac{1}{h}\hat{\mu}_{CD}\hat{\mu}_{MN}\underset{\cdot}{\hat{t}}^{MN}\right]$$

$$= \hat{\lambda}^{CD}\hat{d}_{CD} - \frac{1}{h}\hat{\lambda}^{CD}\hat{\mu}_{CD}\hat{\mu}_{MN}\underset{\cdot}{\hat{t}}^{MN}$$

故利用(9.3.6)，

$$\hat{\mu}_{MN}\underset{\cdot}{\hat{t}}^{MN} = \frac{\hat{\lambda}^{CD}\hat{d}_{CD}}{1 + \frac{1}{h}\hat{\lambda}^{RS}\hat{\mu}_{RS}} = \frac{h}{h + \hat{\lambda}^{RS}\hat{\mu}_{RS}}\hat{\lambda}^{CD}\hat{d}_{CD} = \frac{h}{g}\hat{\lambda}^{CD}\hat{d}_{CD}$$

故(9.3.5)式得证。

需要指出，$\underset{\cdot}{\mathbf{L}}$ 和 $\underset{\cdot}{\mathbf{M}}$ 的三对称性对于建立与边值问题对应的变分原理是非常重要的。正如弹性力学中一样：如果应力与应变之间的弹性本构关系中刚度与柔度张量不具有三对称性，则不可能建立最小势能原理与最小余能原理。关于这一问题的论述可见[7,8,11,12]。

下面对服从经典塑性律(即(9.3.1)与(9.3.7))的材料建立率势函数 W 和率余势函数 W^c：

$$W = \frac{1}{2}\mathbf{d}:\underset{\cdot}{\mathbf{L}}:\mathbf{d} = \frac{1}{2}\underset{\cdot}{\hat{L}}^{ABCD}\hat{d}_{AB}\hat{d}_{CD}$$

$$W^c = \frac{1}{2}\underset{\cdot}{\dot{\mathbf{t}}}:\underset{\cdot}{\mathbf{M}}:\underset{\cdot}{\dot{\mathbf{t}}} = \frac{1}{2}\underset{\cdot}{\hat{M}}_{ABCD}\underset{\cdot}{\hat{t}}^{AB}\underset{\cdot}{\hat{t}}^{CD} \tag{9.3.9}$$

利用(9.3.9)可将本构方程(9.3.7)和(9.3.1)分别写为：

$$\underset{\cdot}{\dot{\mathbf{t}}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}}, \quad \underset{\cdot}{\hat{t}}^{AB} = \frac{\partial W}{\partial \hat{d}_{AB}}$$

$$\mathbf{d} = \frac{\partial W^c}{\partial \overset{\circ}{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}}, \quad \hat{d}_{AB} = \frac{\partial W^c}{\partial \hat{\overset{\circ}{\underset{\cdot}{t}}}{}^{AB}} \tag{9.3.10}$$

利用(9.3.10)就可以建立相应的“率问题”的变分原理。

Hill 在 [9] 中讨论了客观应力率的不同选择。我们先来求 Cauchy 应力 $\mathbf{t}$ 与 Kirchhoff 应力 $\underset{\cdot}{\mathbf{t}}$ 的 Jaumann 导数之间的关系。利用 Jaumann 导数的定义(5.2.41)式及(9.1.22)，可得

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}} &= \dot{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}} - \mathbf{w}\cdot\underset{\cdot}{\mathbf{t}} + \underset{\cdot}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{w} = (J\dot{\mathbf{t}} + \underset{\cdot}{\mathbf{t}}\mathscr{I}_1(\mathbf{d})) - \mathbf{w}\cdot J\mathbf{t} + J\mathbf{t}\cdot\mathbf{w} \\
&= J(\dot{\mathbf{t}} - \mathbf{w}\cdot\mathbf{t} + \mathbf{t}\cdot\mathbf{w}) + \underset{\cdot}{\mathbf{t}}\mathscr{I}_1(\mathbf{d}) \\
&= J\overset{\circ}{\mathbf{t}} + \underset{\cdot}{\mathbf{t}}\mathscr{I}_1(\mathbf{d})
\end{aligned}$$

故

$$\overset{\circ}{\mathbf{t}} = \frac{1}{J}(\overset{\circ}{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}} - \underset{\cdot}{\mathbf{t}}\mathscr{I}_1(\mathbf{d})) \tag{9.3.11}$$

将(9.3.7*b*)代入(9.3.11)，得到

$$\overset{\circ}{\mathbf{t}} = \frac{1}{J}(\underset{\cdot}{\mathbf{L}}:\mathbf{d} - \underset{\cdot}{\mathbf{t}}\mathbf{I}:\mathbf{d}) = \mathbf{L}:\mathbf{d}$$

式中

$$\mathbf{L} = \frac{\rho}{\rho_0}(\underset{\cdot}{\mathbf{L}} - \underset{\cdot}{\mathbf{t}}\mathbf{I})$$

$$\hat{L}^{ABCD} = \frac{\rho}{\rho_0}(\underset{\cdot}{L}^{ABCD} - \underset{\cdot}{\hat{t}}{}^{AB}\hat{g}^{CD})$$

显然 $\hat{L}^{ABCD}$ 不满足三对称性中的第三种，即 $\hat{L}_{ABCD} \neq \hat{L}_{CDAB}$，也就是说 Cauchy 应力的 Jaumann 导数 $\overset{\circ}{\mathbf{t}}$ 与变形率 $\mathbf{d}$ 之间本构关系中的柔度张量及刚度张量不具有三对称性。因此若采用 Cauchy 应力的 Jaumann 导数作为客观应力率，则无法找到满足象(9.3.10)那样关系式的率势与率余势函数，因而也不能建立相应的变分原理。究其原因，在于(4.8.15)式变形功率 $w = \underset{\cdot}{\mathbf{t}}:\mathbf{d}$，$\underset{\cdot}{\mathbf{t}}$ 与

$\mathbf{d}$ 构成一对广义力与广义速率。

§ 9.1 与 § 9.2 均为本节的特例，§ 9.1 相当于 $\boldsymbol{\mu} = \dot{\mathbf{s}}$ 而 § 9.2 相当于 $\boldsymbol{\mu} = \dot{\bar{\mathbf{s}}}$。

§ 9.4 非经典塑性本构关系

研究非经典塑性本构理论的必要性已在本章最开头就论及。此外，变形局部化（颈缩）问题与稳定问题的研究表明 J_2 流动理论反而不如 J_2 形变理论更符合于试验结果。 这就推动了人们去研究非经典的塑性本构关系。

一、低弹性 J_2 形变理论

Stören 与 Rice[13], Needleman 与 Tvergaard[14] 及 Hutchinson 与 Neale[15] 提出了有限变形情况下的各向同性 J_2 形变理论的方案。 Stören 与 Rice 讨论的是刚塑性材料，而 Needleman 与 Tvergaard 则补充考虑了弹性效应。它们的变形律都属于低弹性类型，而 Hutchinson 与 Neale 的方案则为超弹性类型。 在某些条件下低弹性方案与超弹性方案给出相同的结果（见下面的讨论）。

低弹性是指客观应力率为变形率的线性函数，但即时应力状态可以作为参数出现在函数中（线性函数的系数可以依赖于即时应力状态）。 Budiansky[16] 和 Ильюшин[17] 讨论了小变形情况下的 J_2 形变理论。下面介绍 Budiansky 的工作，他把本构方程表示成率形式。

在小变形情况下，无需区分应力与应变的种类，以 ε_{ij} 表示应变，σ_{ij} 表示应力，且只限于采用笛卡儿坐标。 将小应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$（分量 ε_{ij}）分为弹性与塑性两部分：

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p}$$

$$\varepsilon_{ij}^{e}=\frac{1}{3}\delta_{ij}\mathscr{J}_{1}(\varepsilon)+\frac{1}{2G}\sigma'_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij}^{p}=c\sigma'_{ij} \tag{9.4.1a}$$

式中 σ'_{ij} 为应力偏量。

利用单向拉伸试验确定 (9.4.1a) 中的系数 c。在单向拉伸情况下，$\sigma_{11}=\sigma$，$\sigma'_{11}=2\sigma/3$，$\varepsilon_{11}=\varepsilon$，(9.4.1$a$) 给出

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}+c\frac{2}{3}\sigma$$

故

$$c=\frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}-\frac{1}{E}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s}-\frac{1}{E}\right) \tag{9.4.1b}$$

式中 E_s 为单向拉伸曲线的割线模量，如图 9.4 所示，E_s 是 σ 的函数。将(9.4.1b)代入(9.4.1a)，得到塑性应变

$$\varepsilon_{ij}^{p}=c\sigma'_{ij}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s}-\frac{1}{E}\right)\sigma'_{ij} \tag{9.4.1c}$$

如本节开始所说，形变理论用于研究某些问题时能给出比增量理论更合理的结果。这就促使人们想到，如果把形变理论的变形律对时间求导数将得到什么样的结果？为了得到这种微分形式的形变理论，首先利用(9.4.1b)式计算 $\dot{c}$：

$$\dot{c}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s}\right)^{\cdot}=\frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^{\cdot}=\frac{3}{2}\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\sigma}}-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\left(\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E_s}\right)$$

式中 E_t 为切线模量 (图 9.4)。对于一般应力状态，应将上式中的 σ 改为等效应力 $\sigma_e=(3\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}/2)^{1/2}$，这样

$$\dot{c}=\frac{3}{2}\frac{\dot{\sigma}_e}{\sigma_e}\left(\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E_s}\right) \tag{9.4.2}$$

为了求塑性应变率，将(9.4.1c)式对时间 t 求导：

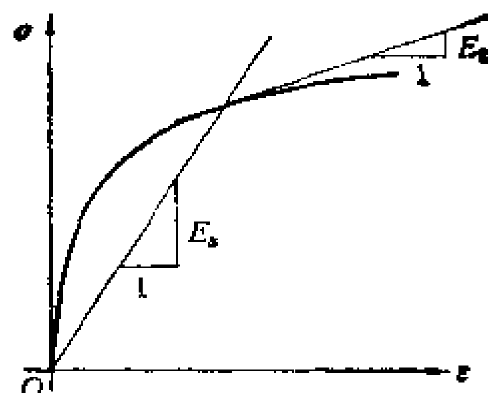


图 9.4

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = c\dot{\sigma}'_{ij} + \dot{c}\sigma'_{ij}$$

将 (9.4.1b) 与(9.4.2)代入上式，得

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E}\right)\dot{\sigma}'_{ij} + \frac{3}{2}\frac{\dot{\sigma}_e}{\sigma_e}\left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_s}\right)\sigma'_{ij} \qquad (9.4.3)$$

以上是小变形情况下的 J_2 形变理论。

Needleman 等[14]将 (9.4.3) 式推广到大变形情况。采用 Kirchhoff 应力的 Jaumann 导数 $\overset{\nabla}{\mathbf{t}}$ 和变形率 $\mathbf{d}$，(9.4.3) 式可写成：

$$\mathbf{d}^{p} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E}\right)\overset{\nabla}{\mathbf{s}} + \frac{3}{2}\frac{\dot{t}_e}{t_e}\left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_s}\right)\mathbf{s}$$

$$d_{AB}^{p} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E}\right)\hat{s}_{AB} + \frac{3}{2}\frac{\dot{t}_e}{t_e}\left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_s}\right)s_{AB}$$

(9.4.4)

式中 $\overset{\nabla}{\mathbf{s}}$ 为 Kirchhoff 应力偏量的 Jaumann 导数，t_e 为等效 Kirchhoff 应力，E_s 与 E_t 分别表示单向拉伸时 Kirchhoff 应力-对数应变曲线的割线模量和切线模量，E_s 与 E_t 均为 t_e 的函数。(9.4.4) 式就是 Needleman 等[14]所提出的本构关系。

下面将(9.4.4)式中的 $\dot{\mathbf{s}}$ 和 $\dot{t}_e$ 用 $\dot{\mathbf{t}}$ 表示。由应力偏量的定义:

$$\mathbf{s}=\mathbf{t}-\frac{1}{3}\mathbf{I}\mathscr{J}_1(\mathbf{t})$$

对上式两端取 Jaumann 导数,得

$$\dot{\mathbf{s}}=\dot{\mathbf{t}}-\frac{1}{3}\mathbf{I}\dot{\mathscr{J}}_1(\mathbf{t})$$

易证

$$\dot{\mathscr{J}}_1(\mathbf{t})=\mathscr{J}_1(\dot{\mathbf{t}})=\mathscr{J}_1(\dot{\mathbf{t}})$$

故

$$\dot{\mathbf{s}}=\dot{\mathbf{t}}-\frac{1}{3}\mathbf{I}\mathscr{J}_1(\dot{\mathbf{t}}) \tag{9.4.5a}$$

$$\hat{s}_{AB}=\hat{t}_{AB}-\frac{1}{3}\hat{g}_{AB}\hat{t}^{C}_{\cdot C}=\Big[\frac{1}{2}(\hat{g}_{AC}\hat{g}_{BD}+\hat{g}_{AD}\hat{g}_{BC})-\frac{1}{3}\hat{g}_{AB}\hat{g}_{CD}\Big]\hat{t}^{CD} \tag{9.4.5b}$$

此外,由 $J_2(\mathbf{t})=t_e^2/3$ 对时间求导,并利用(9.1.15b)得

$$\dot{J}_2(\mathbf{t})=\frac{2}{3}t_e\dot{t}_e=\hat{s}_{CD}\hat{t}^{CD}=\mathbf{s}:\dot{\mathbf{t}}$$

因此

$$\dot{t}_e=\frac{3}{2t_e}\hat{s}_{CD}\hat{t}^{CD}=\frac{3}{2t_e}\mathbf{s}:\dot{\mathbf{t}} \tag{9.4.6}$$

将(9.4.5)与(9.4.6)代入(9.4.4)并加上弹性变形率(9.1.13a)式,得到

$$\begin{aligned}\mathbf{d}&=\mathbf{d}^e+\mathbf{d}^p\\&=\frac{1}{E}[(1+\nu)\dot{\mathbf{t}}-\nu\mathbf{I}\mathscr{J}_1(\dot{\mathbf{t}})]\\&\quad+\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{E_s}-\frac{1}{E}\Big)\Big[\dot{\mathbf{t}}-\frac{1}{3}\mathbf{I}\mathscr{J}_1(\dot{\mathbf{t}})\Big]\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{3}{2t_e}\right)^2\left(\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E_s}\right)\mathbf{s}\mathbf{s}:\overset{\circ}{\mathbf{t}} \qquad (9.4.7a)$$

$$\begin{aligned}\hat{d}_{AB} &= \hat{d}^e_{AB}+\hat{d}^p_{AB}\\ &= \frac{1}{E}\left[\frac{1+\nu}{2}(\hat{g}_{AC}\hat{g}_{BD}+\hat{g}_{AD}\hat{g}_{BC})-\nu\hat{g}_{AB}\hat{g}_{CD}\right]\hat{\overset{\circ}{t}}{}^{CD}\\ &\quad+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s}-\frac{1}{E}\right)\left[\frac{1}{2}(\hat{g}_{AC}\hat{g}_{BD}+\hat{g}_{AD}\hat{g}_{BC})-\frac{1}{3}\hat{g}_{AB}\hat{g}_{CD}\right]\hat{\overset{\circ}{t}}{}^{CD}\\ &\quad+\left(\frac{3}{2t_e}\right)^2\left(\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E_s}\right)\hat{s}_{AB}\hat{s}_{CD}\hat{\overset{\circ}{t}}{}^{CD} \qquad (9.4.7b)\end{aligned}$$

(9.4.7a,b)式可整理为以下形式

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \frac{1}{E_s}[(1+\nu_s)\overset{\circ}{\mathbf{t}}-\nu_s\mathbf{I}\mathscr{J}_1(\overset{\circ}{\mathbf{t}})]+\frac{1}{h_s}\mathbf{s}\mathbf{s}:\overset{\circ}{\mathbf{t}}\\ &= \mathbf{M}:\overset{\circ}{\mathbf{t}} \qquad (9.4.7c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{d}_{AB} &= \left\{\frac{1}{E_s}\left[\frac{1+\nu_s}{2}(\hat{g}_{AC}\hat{g}_{BD}+\hat{g}_{AD}\hat{g}_{BC})-\nu_s\hat{g}_{AB}\hat{g}_{CD}\right]\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{h_s}\hat{s}_{AB}\hat{s}_{CD}\right\}\hat{\overset{\circ}{t}}{}^{CD}=\hat{M}_{ABCD}\hat{\overset{\circ}{t}}{}^{CD} \qquad (9.4.7d)\end{aligned}$$

式中 ν_s 与 h_s 由以下两式定义:

$$\frac{\nu_s}{E_s}=\frac{\nu}{E}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_s}-\frac{1}{E}\right),\ 即\ \frac{1-2\nu_s}{E_s}=\frac{1-2\nu}{E}$$

$$\frac{1}{h_s}=\left(\frac{3}{2t_e}\right)^2\left(\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E_s}\right) \qquad (9.4.8)$$

(9.4.7c, d) 式与 § 9.1 中所介绍的大变形情况下 J_2 流动理论的本构方程(9.1.16a,b)在形式上完全相似,只是将其中的 E, ν 与 h 分别换为 E_s, ν_s 与 h_s。(9.4.7a,b) 或 (9.4.7c,d) 就是有限变形情况下微分形式的 J_2 形变理论。但需注意(9.4.7c,d)中 $\mathbf{d}$ 分为两部分之和,但已经不是按弹性变形率与塑性变形率划分。第一部分

既包含弹性变形率也包含一部分塑性变形率。作为(9.4.7c,d)的两个特例:

(1) 在形式上,若令 $\underset{\cdot}{E}_t = \underset{\cdot}{E}$,则由 $(9.4.8)_1$, $\nu_s = \nu$,比较 $(9.4.8)_2$ 与(9.1.25),$h_s = h$。这时(9.4.7c,d)就变成经典的大变形情况的 Prandtl-Reuss 方程(9.1.16)。

(2) 在比例加载条件下,(9.4.7c,d)式给出的变形率与按经典的(9.1.16)式给出的结果一样。但注意在非比例加载条件下,两者给出的结果则很不相同。

(9.4.7)式之逆为

$$\underset{\cdot}{\mathbf{t}} = \frac{\underset{\cdot}{E}_t}{1+\nu_s}\left[\mathbf{d} + \frac{\nu_s}{1-2\nu_s}\mathbf{I}\mathscr{J}_1(\mathbf{d}) - \frac{1}{q_s}\underset{\cdot\cdot}{\mathbf{ss}}:\mathbf{d}\right] = \underset{\cdot}{\mathbf{L}}:\mathbf{d} \tag{9.4.9a}$$

$$\underset{\cdot}{\hat{t}}^{AB} = \frac{\underset{\cdot}{E}_s}{1+\nu_s}\left[\frac{1}{2}(g^{AC}g^{BD} + g^{AD}g^{BC}) + \frac{\nu_s}{1-2\nu_s}g^{AB}g^{CD} - \frac{1}{q_s}\underset{\cdot}{s}^{AB}\underset{\cdot}{s}^{CD}\right]d_{CD} = \underset{\cdot}{L}^{ABCD}d_{CD} \tag{9.4.9b}$$

仿(9.1.20)式,上式中的 q_s 可表示为

$$q_s = \frac{(1+\nu_s)h_s}{\underset{\cdot}{E}_s} + 2J_2(\underset{\cdot}{\mathbf{t}}) \tag{9.4.10}$$

最后指出几点:

(1) 公式(9.4.7)或(9.4.9)属于低弹性本构关系,即对于任意的应力历史不能通过本构关系对时间积分而得到应变和即时应力的关系,也就是说应变一般依赖于加载路径。因此,应力和应变不能从应变能和余应变能函数导出。但在两种特殊情况下,上述本构律仍保持路径无关性:

(i) 小变形;

(ii) 变形主轴相对于材料是固定的(例如轴对称问题)。

在以上两种情况下(9.4.7)或(9.4.9)可积分为应力与应变之间有限形式的关系，即变为超弹性。

(2) 注意本节 J_2 形变理论 (9.4.4) 式塑性变形率 $\mathbf{d}^p$ 分成两项，其中第一项平行于 $\dot{\mathbf{s}}$，只有第二项才平行于 $\mathbf{s}$，即与屈服面正交。因此本节给出的本构关系不服从正交法则，它与经典的 J_2 流动理论有根本的区别。本节 J_2 形变理论本构方程的微分形式虽然符合于 PMI，但是它的推导过程是将被认为在理论上有重大缺点的小变形 J_2 形变理论本构方程对时间求导的结果推广到大变形情况。这个推导过程是没有充分道理的，但是结果却启示人们想到：在变形局部化问题或稳定问题中要得到与实验比较相符的结果，必须采用不遵循正交法则的本构关系。

(3) 由于 (9.4.7c,d) 的弹塑性柔度张量 $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$ 与 (9.4.9a,b) 的弹塑性刚度张量 $\underset{\sim}{\mathbf{L}}$ 均具有三对称性，所以采用这种本构方程可以建立率边值问题相应的变分原理。

过去人们存在一种误解，即认为形变理论对于任何非比例加载历史都是不能使用的。但实际情况并不完全是这样。最早提出重新评价形变理论的是 Budiansky[16] 与 Hutchinson[28]。按经典的流动理论推广到有角点的屈服面情况，所得到的结果同从形变理论求导的结果有类似之处。Sanders[19] 对屈服面出现角点曾提出一种解释：应力空间中每一平面代表一种晶体滑移机制，平面的包络面构成屈服面。当应力点在应力空间中随着塑性加载而移动时，被碰到的那些平面都跟着移动，未碰到的不动。这样，后继屈服面就出现了角点。更引人注目的是 Stören 与 Rice[23] 利用有角点的屈服面对本构方程(9.4.4)所作的解释，下面还将论述。

一般都承认材料的初始屈服面是光滑的。但经过硬化以后屈服面是否仍然光滑？是否存在角点？围绕这个问题已经进行了许多试验和理论研究。由于对屈服现象所对应的约定塑性变形没有

确切的定义，给屈服面的试验确定带来困难。在理论工作方面，力学工作者建立了许多模型，其中以晶体塑性变形的物理理论为基础得到的研究结果(例如 Hill[20], Hutchinson[21])，后继屈服面均有角点。

以薄壁筒先拉后扭为例(图 9.5(a))。各向同性硬化 Mises 屈服条件给出的光滑屈服面如图 9.5(b) 所示。屈服条件为 $\sigma^2+3\tau^2=\sigma_Y^2$。应力点由 O 到 A 表示先受拉伸进入屈服，再受扭转则应力点沿光滑屈服面的切线方向移动。按经典流动理论，这时只产生瞬时弹性变形，即 $\Delta\tau/\Delta\gamma=G$ ($\Delta\tau$ 为剪应力增量，$\Delta\gamma$ 为剪切角增量)。但按形变理论算出的 $\Delta\tau/\Delta\gamma<G$。因此我们说，流动理论的本构关系过“硬”，而形变理论的本构关系过“软”。 Hutchinson[21] 用屈服面带角点的多晶塑性流动理论算出的结果也说明 $\Delta\tau/\Delta\gamma<G$，更接近于形变理论的结果，试验也证明的确 $\Delta\tau/\Delta\gamma<G$。

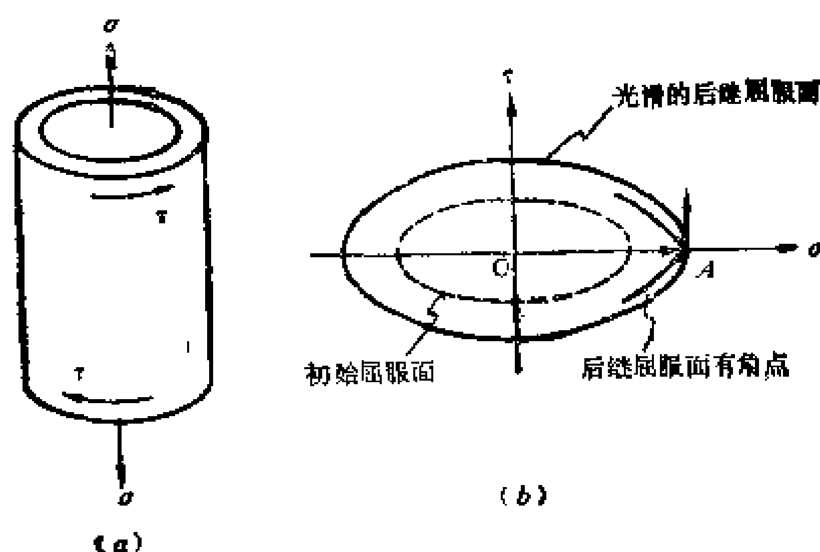


图 9.5

下面介绍 Stören 与 Rice[23] 对本构方程(9.4.4)的解释：设 $\mathbf{m}$ 为光滑屈服面上应力点处的规范化法向“矢量”，即

$$\mathbf{m}:\mathbf{m}=\hat{m}_{AB}\hat{m}^{AB}=1$$

采用各向同性硬化 Mises 屈服条件，则屈服面法线方向平行于 Kirchhoff 应力偏量 $\mathbf{s}$，因此 $\mathbf{m}$ 就是 $\mathbf{s}$ 规范化的结果。利用上式及(9.1.15a)，可得

$$\mathbf{m}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{t_e}\mathbf{s},\quad \mathbf{s}=\sqrt{\frac{2}{3}}t_e\mathbf{m} \tag{9.4.11}$$

将 Kirchhoff 应力偏量的 Jaumann 导数 $\dot{\mathbf{s}}$ 分解为屈服面的法向与切向分量，并分别记作 $(\dot{\mathbf{s}})_\perp$ 与 $(\dot{\mathbf{s}})_{/\!/}$，如图 9.6($a$) 所示。利用(9.4.11)式，

$$(\dot{\mathbf{s}})_\perp=(\dot{\mathbf{s}}:\mathbf{m})\,\mathbf{m}=\frac{3}{2}\frac{1}{t_e^2}(\dot{\mathbf{s}}:\mathbf{s})\,\mathbf{s} \tag{9.4.12a}$$

再利用(9.1.15b)与(9.4.6)式，可将上式写作

$$(\dot{\mathbf{s}})_\perp=\frac{3}{2}\frac{1}{t_e^2}(\dot{\mathbf{t}}:\mathbf{s})\,\mathbf{s}=\frac{\dot{t}_e}{t_e}\mathbf{s} \tag{9.4.12b}$$

故

$$(\dot{\mathbf{s}})_{/\!/}=\dot{\mathbf{s}}-(\dot{\mathbf{s}}:\mathbf{m})\mathbf{m} \tag{9.4.12c}$$

设 $(\dot{\mathbf{s}})_\perp$ 与 $(\dot{\mathbf{s}})_{/\!/}$ 引起的塑性变形率分别为 $(\mathbf{d}^p)_\perp$ 与 $(\mathbf{d}^p)_{/\!/}$，见图 9.6(a)；并假定这两部分可叠加：

$$\mathbf{d}^p=(\mathbf{d}^p)_\perp+(\mathbf{d}^p)_{/\!/}$$

设这两部分塑性变形率分别为(利用(9.4.12a)与(9.4.12c))：

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}^p)_\perp&=\frac{1}{h}(\dot{\mathbf{s}})_\perp=\frac{1}{h}(\dot{\mathbf{s}}:\mathbf{m})\mathbf{m}\\(\mathbf{d}^p)_{/\!/}&=\frac{1}{h_1}(\dot{\mathbf{s}})_{/\!/}=\frac{1}{h_1}[\dot{\mathbf{s}}-(\dot{\mathbf{s}}:\mathbf{m})\mathbf{m}]\end{aligned} \tag{9.4.13}$$

式中 h 与 h_1 各为沿屈服面法向与切向的塑性硬化率，它们都是 t_e 的材料函数。由于有 $(\mathbf{d}^p)_{/\!/}$ 的存在，塑性变形率已经不是沿着屈服面的法线方向了。将(9.4.13)的两式相加，得到

$$\mathbf{d}^p = \frac{1}{h_1}\overset{\circ}{\mathbf{s}} + \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1}\right)(\overset{\circ}{\mathbf{s}} : \mathbf{m})\mathbf{m}$$

由于 $\mathbf{m}$ 是一偏量，所以塑性变形体积不变。利用(9.4.12b)，上式可写作

$$\mathbf{d}^p = \frac{1}{h_1}\overset{\circ}{\mathbf{s}} + \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1}\right)\frac{\dot{t}_e}{t_e}\mathbf{s} \qquad (9.4.14a)$$

$$d^p_{AB} = \frac{1}{h_1}\hat{\overset{\circ}{s}}_{AB} + \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1}\right)\frac{\dot{t}_e}{t_e} s_{AB} \qquad (9.4.14b)$$

将上式同 Stören 与 Rice[13] 及 Needleman 等[14] 的 J_2 形变理论本构方程(9.4.4)比较，可知(9.4.4)式相当于此处的 h_1 与 h 按以下公式取值：

$$\frac{1}{h_1} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E}\right), \quad \frac{1}{h} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E}\right) \qquad (9.4.15)$$

因此，J_2 形变理论相当于一种 J_2 流动理论，其中应力率沿屈服面

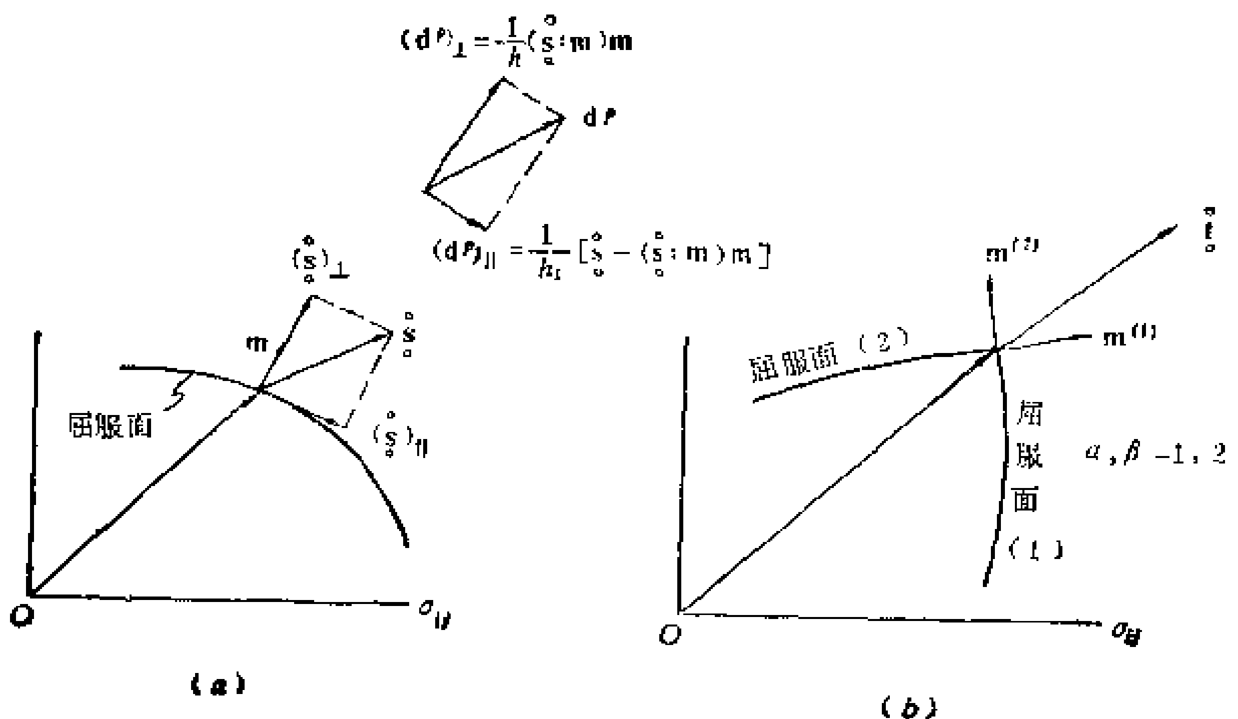


图 9.6

的法向分量和切向分量都引起塑性变形率。

若屈服面有角点，则在角点处的法线不唯一。对这种情况 Koiter[22] 把角点看作许多光滑屈服面的交点，并指出

$$\mathbf{d}^p = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{h_{\alpha\beta}} (\overset{\nabla}{\mathbf{s}} : \mathbf{m}^{(\beta)}) \mathbf{m}^{(\alpha)} \tag{9.4.16}$$

式中，由于 $\mathbf{m}$ 为一偏量，

$$\overset{\nabla}{\mathbf{s}} : \mathbf{m}^{(\beta)} = \overset{\nabla}{\mathbf{t}} : \mathbf{m}^{(\beta)} > 0$$

(9.4.16) 式中的 $h_{\alpha\beta}$ 表示由于法线为 $\mathbf{m}^{(\beta)}$ 方向的屈服面被激活而引起的在 $\mathbf{m}^{(\alpha)}$方向的塑性硬化率。当只有一个屈服面时，(9.4.16)式就导致正交法则。在二维情况下角点的表示如图 9.6(b)。塑性变形率 $\mathbf{d}^p$ 的方向可以沿着 $\mathbf{m}^{(1)}$ 与 $\mathbf{m}^{(2)}$ 之间的任意方向。(9.4.16)式是高度非线性的方程，而且不清楚在塑性变形过程中如何确定 $h_{\alpha\beta}$，试验量测困难，所得结果尚存在争议[23]。因此，(9.4.16)式目前用处还不大。Hutchinson[21] 采用多晶体的多滑移系模型，在小变形情况下对某一应变路径进行的计算表明，塑性硬化率很接近于按 J_2 形变理论所得的值(见(9.4.4))。因此 Stören 与 Rice[13] 曾作以下的猜想：当塑性变形过程与比例加载的偏离不大，因而相交于角点的所有屈服面都被激活时，J_2 形变理论的微分形式(率形式)可以用作有角点的简化模型。

二、超弹性 J_2 形变理论

Hutchinson 与 Neale[15] 提出了一个在大变形情况下与路径无关的形变理论。这个形变理论实质上是非线性弹性关系，并假设材料为各向同性和不可压缩。Neale[24] 把这一理论推广到可压缩材料。本节介绍 Neale 的大变形情况可压缩材料形变理论，但作了一些必要的补充。

对于各向同性非线性弹性固体，Cauchy 应力 $\mathbf{t}$(或 Kirchhoff

应力$\underset{\cdot}{\mathbf{t}}$)的主方向必沿着 Euler 标架的方向，即$\{\underset{1}{\mathbf{n}},\underset{2}{\mathbf{n}},\underset{3}{\mathbf{n}}\}$。材料的变形状态可以用相对于某一参考构形的左伸长张量$\mathbf{V}$(见(2.6.16)式)也就是 Euler 标架$\{\underset{1}{\mathbf{n}},\underset{2}{\mathbf{n}},\underset{3}{\mathbf{n}}\}$与主伸长比$\{\underset{1}{\lambda},\underset{2}{\lambda},\underset{3}{\lambda}\}$来描述。因此，本构关系取决于 Kirchhoff 应力的主分量 $\underset{\cdot}{t}_{(i)}(i=1,2,3)$ 依赖于主伸长比 $\underset{i}{\lambda}(i=1,2,3)$ 的关系式。

取对数应变张量$\mathbf{H}$(即 Seth 应变度量 $\mathbf{E}^{(0)}$，见(2.9.38)式)为应变的度量：

$$\mathbf{H}=\mathbf{E}^{(0)}=\ln\mathbf{U}=\sum_{\gamma}(\ln\underset{\gamma}{\lambda})\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}=\sum_{\gamma}\underset{\gamma}{H}\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}\underset{\Gamma}{\mathbf{N}},\quad(\gamma=\Gamma)\tag{9.4.17}$$

式中$\underset{\gamma}{H}=\ln\underset{\gamma}{\lambda}$。将$\mathbf{H}$从 Lagrange 标架旋转到 Euler 标架，则得到 Euler 标架中的对数应变张量：

$$\mathbf{h}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{R}^{*}=\ln\mathbf{V}=\sum_{\gamma}(\ln\underset{\gamma}{\lambda})\underset{\gamma}{\mathbf{n}}\underset{\gamma}{\mathbf{n}}=\sum_{\gamma}\underset{\gamma}{h}\underset{\gamma}{\mathbf{n}}\underset{\gamma}{\mathbf{n}}\tag{9.4.18}$$

式中

$$\underset{\gamma}{h}=\underset{\gamma}{H}=\ln\underset{\gamma}{\lambda}$$

利用(3.4.41)式，可得

$$\frac{d\underset{\gamma}{H}}{dt}=\frac{d\underset{\gamma}{h}}{dt}=\frac{1}{\underset{\gamma}{\lambda}}\frac{d\underset{\gamma}{\lambda}}{dt}=d_{(\gamma\gamma)}\quad\text{(不对指标取和)}\tag{9.4.19}$$

故对数应变主分量的导数等于变形率$\mathbf{d}$在 Euler 标架中的对角线分量。对于不可压缩变形，

$$\underset{1}{\lambda}\underset{2}{\lambda}\underset{3}{\lambda}=1$$

故

$$\ln\underset{1}{\lambda}+\ln\underset{2}{\lambda}+\ln\underset{3}{\lambda}=0$$

Hill[25,26] 论证了在建立弹性及弹塑性固体的本构不等式时采用对

数应变的优点。上文提到，Kirchhoff 应力 $\mathbf{t}$ 的主方向沿 Euler 标架，故其在 Euler 标架中的分解式（见(4.8.34)式）只有对角线项：

$$\mathbf{t} = \sum_i t_{(i)} \underset{i}{\mathbf{n}}\underset{i}{\mathbf{n}} \tag{9.4.20}$$

类似于小变形情况的 J_2 形变理论（见[16]，[17]），可以写出大变形情况下以对数应变主分量 $\underset{r}{h}$ 与 Kirchhoff 应力主分量 $t_{(r)}$ 表示的关系。假定对数应变主分量 $\underset{r}{h}$ 可以分解为弹性部分（参考(9.1.13)式）与塑性部分（参考(9.4.1c)式）之和：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{h} = \mathbf{h}^e + \mathbf{h}^p \\
&\mathbf{h}^e = \frac{1+\nu}{E}\mathbf{t} - \frac{\nu}{E}\mathbf{I}\mathscr{J}_1(\mathbf{t}) \\
&\mathbf{h}^p = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E}\right)\mathbf{s}
\end{aligned} \tag{9.4.21a}$$

$$\begin{aligned}
&\underset{i}{h} = \underset{i}{h^e} + \underset{i}{h^p} \\
&\underset{i}{h^e} = \frac{1+\nu}{E} t_{(i)} - \frac{\nu}{E} t_{(kk)} \\
&\underset{i}{h^p} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E}\right) s_{(i)}
\end{aligned} \tag{9.4.21b}$$

式中 $\mathbf{s}$ 为 $\mathbf{t}$ 的偏量，见(9.1.11)式，

$$t_{(kk)} = t_{(1)} + t_{(2)} + t_{(3)}, \quad s_{(i)} = t_{(i)} - \frac{1}{3} t_{(kk)}$$

(9.4.21a)也可以通过 Lagrange 标架的对数应变张量 $\mathbf{H}$ 表示：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{H} = \mathbf{H}^e + \mathbf{H}^p \\
&\mathbf{H}^e = \frac{1+\nu}{E}\mathbf{t}^{\mathrm{Lag}} - \frac{\gamma}{E}\mathbf{I}\mathscr{J}_1(\mathbf{t}^{\mathrm{Lag}}) \\
&\mathbf{H}^p = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E}\right)\mathbf{s}^{\mathrm{Lag}}
\end{aligned} \tag{9.4.21c}$$

式中 $\underset{\cdot}{\mathbf{t}}^{\mathrm{Lag}}$ 为 Largrange 标架 Kirchhoff 应力（见（4.8.51）式右端),即把 Kirchhoff 应力 $\underset{\cdot}{\mathbf{t}}$ 从 Euler 标架旋转到 Lagrange 标架的结果。利用(9.4.20)式,得到

$$\underset{\cdot}{\mathbf{t}}^{\mathrm{Lag}}=\mathbf{R}^{*}\cdot\underset{\cdot}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{R}=\sum_{i}\underset{\cdot}{t}_{(i)}\underset{I}{\mathbf{N}}\underset{I}{\mathbf{N}}\quad(i=I)\tag{9.4.22}$$

$\underset{\cdot}{\mathbf{s}}^{\mathrm{Lag}}$ 为 $\underset{\cdot}{\mathbf{t}}^{\mathrm{Lag}}$ 的偏量：

$$\underset{\cdot}{\mathbf{s}}^{\mathrm{Lag}}=\mathbf{R}^{*}\cdot\underset{\cdot}{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{R}=\underset{\cdot}{\mathbf{t}}^{\mathrm{Lag}}-\frac{1}{3}\mathbf{I}\mathscr{I}_{1}(\underset{\cdot}{\mathbf{t}}^{\mathrm{Lag}})\tag{9.4.23}$$

(9.4.21c) 在 Lagrange 标架中的分量形式同 (9.4.21b)。(9.4.21a,b)式也可写为以下形式：

$$\mathbf{h}=\frac{1+\nu_{s}}{\underset{\cdot}{E}_{s}}\underset{\cdot}{\mathbf{t}}-\frac{\nu_{s}}{\underset{\cdot}{E}_{s}}\mathbf{I}\mathscr{I}_{1}(\underset{\cdot}{\mathbf{t}})\tag{9.4.24a}$$

$$\underset{i}{h}=\frac{1+\nu_{s}}{\underset{\cdot}{E}_{s}}\underset{\cdot}{t}_{(i)}-\frac{\nu_{s}}{\underset{\cdot}{E}_{s}}\underset{\cdot}{t}_{(kk)}\tag{9.4.24b}$$

式中 $\underset{\cdot}{E}_{s}$ 的含义同前(9.4.4)式中的 $\underset{\cdot}{E}_{s}$，ν_{s} 同前(9.4.8)式。

(9.4.24)式之逆为

$$\underset{\cdot}{\mathbf{t}}=\frac{\underset{\cdot}{E}_{s}}{1+\nu_{s}}\left[\mathbf{h}+\frac{\nu_{s}}{1-2\nu_{s}}\mathbf{I}\mathscr{I}_{1}(\mathbf{h})\right]$$

$$\underset{\cdot}{t}_{(i)}=\frac{\underset{\cdot}{E}_{s}}{1+\nu_{s}}\left[\underset{i}{h}+\frac{\nu_{s}}{1-2\nu_{s}}h_{(kk)}\right]\tag{9.4.25}$$

式中

$$h_{(kk)}=\underset{1}{h}+\underset{2}{h}+\underset{3}{h}$$

引进等效应力 $\underset{\cdot}{t}_{e}$ 与等效应变 h_{e}：

$$\underset{\cdot}{t}_{e}=\left(\frac{3}{2}\underset{\cdot}{s}_{(i)}\underset{\cdot}{s}_{(i)}\right)^{1/2},\quad h_{e}=\frac{1}{1+\nu_{s}}\left(\frac{3}{2}\underset{i}{h'}\underset{i}{h'}\right)^{1/2}\text{(对 } i \text{ 取和)}\tag{9.4.26}$$

式中

$$\underset{i}{h}' = \underset{i}{h} - \frac{1}{3}\mathscr{J}_1(\mathbf{h})$$

表示对数应变偏量的分量。在单向拉伸情况下，$\underset{\cdot}{t}_e$ 就是单向(拉伸方向) Kirchhoff 应力，h_e 就是单向对数应变。割线模量 $\underset{\cdot}{E}_s = \underset{\cdot}{t}_e/h_e$。在(9.4.24)与(9.4.25)式中 $\underset{\cdot}{E}_s$ 与 ν_s 均理解为 $\underset{\cdot}{t}_e$ (或 h_e) 的函数。利用类似于[17]中的推导可以证明：存在应变能函数 $W(\underset{i}{h})$ 与应变余能函数 $W^c(\underset{\cdot}{t}_{(i)})$ 使

$$\frac{\partial W}{\partial \underset{i}{h}} = \underset{\cdot}{t}_{(i)}, \quad \frac{\partial W^c}{\partial \underset{\cdot}{t}_{(i)}} = \underset{i}{h} \tag{9.4.27}$$

上述理论与 Ильюшин[17] 理论除了大变形与小变形的差别外，在标号上的对照见下表：

此 处 标 号	Ильюшин[32] 标号
$\underset{\cdot}{t}_e$	σ_i
$(1+\nu_s)h_e$	$\frac{3}{2}e_i$
$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\underset{\cdot}{E}_s} - \frac{1}{\underset{\circ}{E}}\right)$	$\frac{3}{2}\frac{e_i}{\sigma_i} - \frac{1}{2G}$
$\frac{1}{\underset{\circ}{E}}$	$\frac{e_i}{\sigma_i} + \frac{1}{E} - \frac{1}{3G} = \frac{e_i}{\sigma_i} + \frac{1}{9K}$

将(9.4.21b)式对时间 t 求导，得到

$$\frac{d\underset{i}{h}}{dt} = \frac{1+\nu}{\underset{\cdot}{E}}\frac{d\underset{\cdot}{t}_{(i)}}{dt} - \frac{\nu}{\underset{\cdot}{E}}\frac{d\underset{\cdot}{t}_{(kk)}}{dt} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\underset{\cdot}{E}_s} - \frac{1}{\underset{\circ}{E}}\right)\frac{d\underset{\cdot}{s}_{(i)}}{dt} + \frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\underset{\cdot}{E}_s}\right)\underset{\circ}{s}_{(i)}$$

其中最末项中 $1/\underset{\cdot}{E}_s$ 的导数可用类似于(9.4.2)的推导过程得到(利用(9.1.15a)与(9.4.8)$_2$)：

$$\frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{E_s}\right)=\frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{h_e}{t_e}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E_s}\right)\frac{1}{t_e}\frac{dt_e}{dt}$$

$$=\frac{1}{h_s}s_{(k)}\frac{dt_{(k)}}{dt}$$

将此结果代入上式，并整理后得到

$$\frac{dh_i}{dt}=\frac{1}{E_s}\left[(1+\nu_s)\frac{dt_{(i)}}{dt}-\nu_s\frac{d}{dt}t_{(kk)}\right]$$

$$+\frac{1}{h_s}s_{(i)}s_{(k)}\frac{dt_{(k)}}{dt}\ (\text{对 } k \text{ 取和}) \qquad (9.4.28)$$

式中 h_s 同(9.4.8)$_2$式。容易求得(9.4.28)式之逆为：

$$\frac{dt_{(i)}}{dt}=\frac{E_s}{1+\nu_s}\left[\frac{dh_i}{dt}+\frac{\nu_s}{1-2\nu_s}d_{(kk)}-\frac{1}{q_s}s_{(i)}s_{(k)}\frac{dh_k}{dt}\right]$$

$$(\text{对 } k \text{ 取和}) \qquad (9.4.29)$$

式中 dh_i/dt 见(9.4.19)式，$d_{(kk)}=\mathscr{J}_1(\mathbf{d})$，$q_s$ 同(9.4.10)式，即

$$q_s=\frac{(1+\nu_s)h_s}{E_s}+\frac{3}{2}t_e^2 \qquad (9.4.10)'$$

注意到 $s_{(kl)}$ 只有对角线分量，即 $s_{(kl)}=0$，当 $k\neq l$，可证(9.4.29)式右端末项(利用(9.4.19))

$$s_{(k)}\frac{dh_k}{dt}=s_{(kl)}d_{(kl)}=\mathbf{s}:\mathbf{d} \qquad (9.4.30)$$

注意(9.4.28)与(9.4.29)式中的 dh_i/dt 表示对数应变分量 h_i 的导数，它既非对数应变张量 $\dot{\mathbf{H}}$ 的分量，也非 $\dot{\mathbf{h}}$ 的分量。这是因为 $\mathbf{H}$ 的分解式(9.4.17)中的基矢量 $\mathbf{N}$ 与 $\mathbf{h}$ 的分解式 (9.4.18) 中的基矢量 $\mathbf{n}$ 均随时间 t 而变化。同理，$dt_{(i)}/dt$ 表示 Kirchhoff 应力主分量 $t_{(i)}$ 的导数，它既非 Kirchhoff 应力导数 $\dot{\mathbf{t}}$ 的分量，也非

Lagrange 标架 Kirchhoff 应力导数 $\dot{\mathbf{t}}^{\mathrm{Lag}}$ 的分量，因为 $\dot{\mathbf{t}}$ 的分解式(9.4.20)与 $\mathbf{t}^{\mathrm{Lag}}$ 的分解式(9.4.22)都涉及变矢量 $\underset{\gamma}{\mathbf{n}}$ 与 $\underset{\Gamma}{\mathbf{N}}$。

作为 Kirchhoff 应力 $\mathbf{t}$ 的客观导数，Neale[24] 采用 (5.2.54) 与(5.2.55)式所定义的广义 Jaumann 导数①：

$$\overset{\triangle}{\mathbf{t}} = \mathbf{R}\cdot(\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{R})^{\cdot}\cdot\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{t}}^{\mathrm{Lag}}\cdot\mathbf{R}^*$$
$$= \dot{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{t} + \mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\Omega} \tag{9.4.31}$$

为求 $\dot{\mathbf{t}}^{\mathrm{Lag}}$，可将(9.4.22)式求导，取(3.3.47)式的 $\mathbf{S}$ 为 $\mathbf{t}^{\mathrm{Lag}}$，$\underset{i}{\mathbf{e}}$ 为 $\underset{I}{\mathbf{N}}$，$(i=I)$，$\underset{i}{s}$ 为 $t_{(i)}$，由(3.3.57a)得到

$$\dot{\mathbf{t}}^{\mathrm{Lag}} = \sum_{i,j} \overset{\triangle}{t}_{(ij)} \underset{I}{\mathbf{N}}\underset{J}{\mathbf{N}} \tag{9.4.32a}$$

式中

$$\overset{\triangle}{t}_{(ij)} = \frac{dt_{(i)}}{dt}\delta_{ij} + (t_{(j)} - t_{(i)})\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(I,J)} \quad (\text{不对指标取和}) \tag{9.4.33}$$

将(9.4.32a)代入(9.4.31)，得

$$\overset{\triangle}{\mathbf{t}} = \sum_{i,j} \overset{\triangle}{t}_{(ij)} \underset{i}{\mathbf{n}}\underset{j}{\mathbf{n}} \tag{9.4.32b}$$

(9.4.33)式中的 $\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(I,J)}$ 为 Lagrange 旋率 $\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Lag}}$ 的分量(见 (3.3.63a)式)：

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Lag}} = \sum_{I,J} \Omega^{\mathrm{Lag}}_{(I,J)} \underset{I}{\mathbf{N}}\underset{J}{\mathbf{N}} \tag{9.4.34}$$

将(3.4.42)式的 $\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(I,J)}$ 代入(9.4.33)，得到(不对指标取和)：

$$\overset{\triangle}{t}_{(ii)} = \frac{dt_{(i)}}{dt}，\quad 当\ i = j$$

① 附带指出，若取即时构形为参考构形，则由(3.3.46c)式，(5.2.54)式定义的广义 Jaumann 导数与(5.2.41)式定义的 Jaumann 导数相等。

$$\hat{\underset{\cdot}{t}}_{(ij)} = \frac{2\underset{i}{\lambda}\underset{j}{\lambda}}{\underset{j}{\lambda}^2 - \underset{i}{\lambda}^2}(\underset{\cdot}{t}_{(j)} - \underset{\cdot}{t}_{(i)})d_{(ij)}, \text{ 当 } i \neq j \qquad (9.4.35)$$

由(9.4.25)式，

$$\underset{\cdot}{t}_{(j)} - \underset{\cdot}{t}_{(i)} = \frac{\underset{\cdot}{E}_s}{1+\nu_s}(\underset{j}{h} - \underset{i}{h})$$

将上式代入$(9.4.35)_2$，然后将(9.4.35)代入(9.4.32*b*)，得

$$\hat{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}} = \sum_i \frac{d\underset{\cdot}{t}_{(i)}}{dt}\underset{i}{\mathbf{n}}\underset{i}{\mathbf{n}} + \frac{\underset{\cdot}{E}_s}{1+\nu_s}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \frac{2\underset{i}{\lambda}\underset{j}{\lambda}}{\underset{j}{\lambda}^2 - \underset{i}{\lambda}^2}(\underset{j}{h} - \underset{i}{h})d_{(ij)}\underset{i}{\mathbf{n}}\underset{j}{\mathbf{n}} \qquad (9.4.36)$$

利用 $\underset{i}{h} = \ln\underset{i}{\lambda}, \underset{i}{\lambda} = \exp(\underset{i}{h})$，上式右端第二项的系数可表示为

$$\frac{2\underset{i}{\lambda}\underset{j}{\lambda}}{\underset{j}{\lambda}^2 - \underset{i}{\lambda}^2}(\underset{j}{h} - \underset{i}{h}) = (\underset{j}{h} - \underset{i}{h})[\sinh(\underset{j}{h} - \underset{i}{h})]^{-1} \qquad (9.4.37)$$

利用(9.4.29)，并注意到(9.4.19)和(9.4.30)，可将(9.4.36)右端第一项表示为

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{d\underset{\cdot}{t}_{(i)}}{dt}\underset{i}{\mathbf{n}}\underset{i}{\mathbf{n}} &= \frac{\underset{\cdot}{E}_s}{1+\nu_s}\sum_i \Big[d_{(ii)} + \frac{\nu_s}{1-2\nu_s}\mathscr{J}_1(\mathbf{d}) \\ &\quad - \frac{1}{q_s}\underset{\cdot}{s}_{(i)}\underset{\cdot}{s}_{(kl)}d_{(kl)}\Big]\underset{i}{\mathbf{n}}\underset{i}{\mathbf{n}} \\ &= \frac{\underset{\cdot}{E}_s}{1+\nu_s}\Big[\mathbf{d} + \frac{\nu_s}{1-2\nu_s}\mathbf{I}\mathscr{J}_1(\mathbf{d}) - \frac{1}{q_s}\underset{\cdot}{\mathbf{s}}\underset{\cdot}{\mathbf{s}}:\mathbf{d}\Big] \\ &\quad - \frac{\underset{\cdot}{E}_s}{1+\nu_s}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} d_{(ij)}\underset{i}{\mathbf{n}}\underset{j}{\mathbf{n}}\end{aligned} \qquad (9.4.38)$$

将(9.4.37)与(9.4.38)代入(9.4.36)，得到

$$\hat{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}} = \frac{\underset{\cdot}{E}_s}{1+\nu_s}\Big[\mathbf{d} + \frac{\nu_s}{1-2\nu_s}\mathbf{I}\mathscr{J}_1(\mathbf{d}) - \frac{1}{q_s}\underset{\cdot}{\mathbf{s}}\underset{\cdot}{\mathbf{s}}:\mathbf{d}\Big]$$

$$+\frac{E_s}{1+\nu_s}\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}}[(\underset{j}{h}-\underset{i}{h})\operatorname{csch}(\underset{j}{h}-\underset{i}{h})-1]d_{(ij)}\underset{i}{\mathbf{n}}\underset{j}{\mathbf{n}}$$

(9.4.39)

令 $\mathbf{Q}$ 为具有三对称性的四阶张量，且其非零分量只有"剪切项"，例如：

$$Q_{(1212)}=\frac{1}{2}[(\underset{1}{h}-\underset{2}{h})\operatorname{csch}(\underset{1}{h}-\underset{2}{h})-1]$$

$$Q_{(1313)}=\frac{1}{2}[(\underset{1}{h}-\underset{3}{h})\operatorname{csch}(\underset{1}{h}-\underset{3}{h})-1] \qquad (9.4.40)$$

$$Q_{(2323)}=\frac{1}{2}[(\underset{2}{h}-\underset{3}{h})\operatorname{csch}(\underset{2}{h}-\underset{3}{h})-1]$$

则(9.4.39)可写作

$$\hat{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}=\frac{E_s}{1+\nu_s}\left[\mathbf{d}+\frac{\nu_s}{1-2\nu_s}\mathbf{I}\mathscr{I}_1(\mathbf{d})-\frac{1}{q_s}\underset{\cdot\cdot}{\mathbf{ss}}:\mathbf{d}+\mathbf{Q}:\mathbf{d}\right]$$

$$\hat{\underset{\cdot}{t}}_{(ij)}=\frac{E_s}{1+\nu_s}\left[\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+\frac{\nu_s}{1-2\nu_s}\delta_{ij}\delta_{kl}-\frac{1}{q_s}\underset{\cdot}{s}_{(ij)}\underset{\cdot}{s}_{(kl)}+Q_{(ijkl)}\right]d_{(kl)} \qquad (9.4.41)$$

(9.4.41)式是 Kirchhoff 应力 $\underset{\cdot}{\mathbf{t}}$ 的广义 Jaumann 导数 $\hat{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}$ 与变形率 $\mathbf{d}$ 间的关系。现在补充推导按(5.2.41)式定义的 Kirchhoff 应力 $\underset{\cdot}{\mathbf{t}}$ 的 Jaumann 导数 $\overset{\circ}{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}$，即

$$\overset{\circ}{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}=\dot{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}-\mathbf{w}\cdot\underset{\cdot}{\mathbf{t}}+\underset{\cdot}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{w} \qquad (9.4.31)'$$

与变形率 $\mathbf{d}$ 间的关系。将(9.4.31)'的 $\overset{\circ}{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}$ 与前(9.4.31)的 $\hat{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}$ 相减，得到它们的差：

$$\overset{\circ}{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}-\hat{\underset{\cdot}{\mathbf{t}}}=-(\mathbf{w}-\boldsymbol{\Omega})\cdot\underset{\cdot}{\mathbf{t}}+\underset{\cdot}{\mathbf{t}}\cdot(\mathbf{w}-\boldsymbol{\Omega})$$

利用(3.4.75)与(9.4.20)式，上式可写作

$$\underset{\circ}{\dot{\mathbf{t}}}-\underset{\circ}{\hat{\mathbf{t}}}=\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}}(\underset{\circ}{t}_{(j)}-\underset{\circ}{t}_{(i)})\frac{\underset{i}{\lambda}-\underset{j}{\lambda}}{\underset{i}{\lambda}+\underset{j}{\lambda}}d_{(ij)}\underset{i}{\mathbf{n}}\underset{j}{\mathbf{n}}$$

将(9.4.41)式的代入，可得

$$\underset{\circ}{\dot{\mathbf{t}}}=\frac{E_s}{1+\nu_s}\left[\mathbf{d}+\frac{\nu_s}{1-2\nu_s}\mathbf{I}\mathscr{J}_1(\mathbf{d})-\frac{1}{q_s}\underset{\circ}{\mathbf{s}}\underset{\circ}{\mathbf{s}}:\mathbf{d}+\mathbf{Q}:\mathbf{d}\right]$$

$$\underset{\circ}{\dot{t}}_{(ij)}=\frac{E_s}{1+\nu_s}\left[\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+\frac{\nu_s}{1-2\nu_s}\delta_{ij}\delta_{kl}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{q_s}\underset{\circ}{s}_{(ij)}\underset{\circ}{s}_{(kl)}+Q_{(ijkl)}\right]d_{(kl)} \qquad (9.4.41)'$$

式中

$$Q_{(1212)}=\frac{1}{2}[(\underset{1}{h}-\underset{2}{h})\coth(\underset{1}{h}-\underset{2}{h})-1]$$

$$Q_{(1313)}=\frac{1}{2}[(\underset{1}{h}-\underset{3}{h})\coth(\underset{1}{h}-\underset{3}{h})-1] \qquad (9.4.40)'$$

$$Q_{(2323)}=\frac{1}{2}[(\underset{2}{h}-\underset{3}{h})\coth(\underset{2}{h}-\underset{3}{h})-1]$$

注意(9.4.41)′ $\underset{\circ}{\dot{\mathbf{t}}}$ 与(9.4.41) $\underset{\circ}{\hat{\mathbf{t}}}$ 之差别只在于 **Q** 的分量表达式 (9.4.40)′ 与 (9.4.40) 不同。(9.4.40) 式中 **Q** 的各分量恒为负值，而 (9.4.40)′ 式中各分量则恒为正值。

将上述超弹性 J_2 形变理论的(9.4.41)′式与低弹性 J_2 形变理论的(9.4.9)式进行比较，可见(9.4.41)′中多出含 **Q** 的项。正是由于这些多出的项使得本构方程 (9.4.41)′ 可以对时间进行积分而得到应力与应变间的有限关系式 (9.4.24)。但是在以下两种情况 (9.4.41)′与(9.4.9)两种本构关系的差别(即含 **Q** 的项)消失：

(1) 小变形情况。此时(9.4.40)′ 式 Q 的分量值为高次小量。

(2) 应变主轴相对于材料不旋转。这时 (9.4.41)′ 式中的

$Q_{(ijkl)}d_{(kl)}$ 为零。

但是在大变形情况且应变主轴相对于材料发生旋转时，两种本构关系将有差别。按超弹性 J_2 形变理论(9.4.41)′式给出的瞬时剪切刚度更大，因为(9.4.40)′中 **Q** 各分量为正值。

三、J_2 角点理论

Christofferson 和 Hutchinson[27] 提出了一种后继屈服面具有角点的塑性理论，即 J_2 角点理论。他们设屈服面为一锥面，且具有一对称轴如图 9.7 所示。角点(即当前应力点)附近的区域被分为三部分。应力率 $\dot{\mathbf{t}}$ 与轴的夹角用 θ 表示。θ 可作为偏离比例加载程度的度量。当 $\theta \leqslant \theta_0$ 时称为全加载，这时的塑性变形率 $\mathbf{d}^p$ 被取为与形变理论给出的结果一样。若 $\theta \geqslant \theta_c$ 则为弹性卸载。对于 $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_c$ 的过渡区，[27]给出的本构关系保证计算出的塑性变形率在 $\theta = \theta_0$ 与 θ_c 两处连续。对于这个引起人们兴趣的唯象的本构模型，从物理上可以这样理解：角点代表对应于许多滑移机制的屈服面的交点。不同方向的应力率可能使其中全部或一部分滑移机制起作用，也可能所有的滑移机制都不开动，分别对应于全加载、过渡区或弹性卸载的情况。在图9.5给出的例子

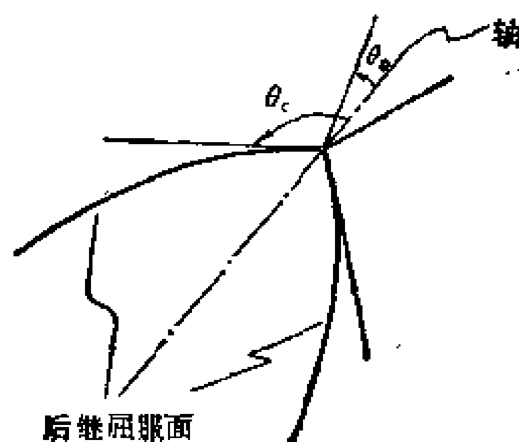


图 9.7

中，扭转时的应力率方向正处于过渡区。对于接近比例加载的情况，用 J_2 角点理论得到的结果与 J_2 形变理论一致。前述的低弹性与超弹性 J_2 形变理论均为 J_2 角点理论的特例。

四、压力敏感屈服及塑性膨胀模型

在含裂隙的岩石材料和颗粒状材料(如土壤)中，静水压力对屈服条件有影响，并且塑性变形往往伴随着体积变化。以岩土材料在三轴均压下受剪切的试验为例，如图 9.8(a) 所示。静水应力 σ 以压为正，体积应变 ε_v 以膨胀为正。在应力状态点 A 处，屈服面切线的斜率用 μ 表示，如图 9.8(b) 所示。当应力率矢量沿 AP 方向时，$d\tau > \mu d\sigma$，此时为塑性加载；当应力率矢量沿 AE 方向时，$d\tau < \mu d\sigma$，此时为弹性卸载。因此，材料是否继续屈服不仅与 $d\tau$ 而且与 $d\sigma$ 有关。此处 $\mu d\sigma$ 好像机械运动中的摩擦力(指

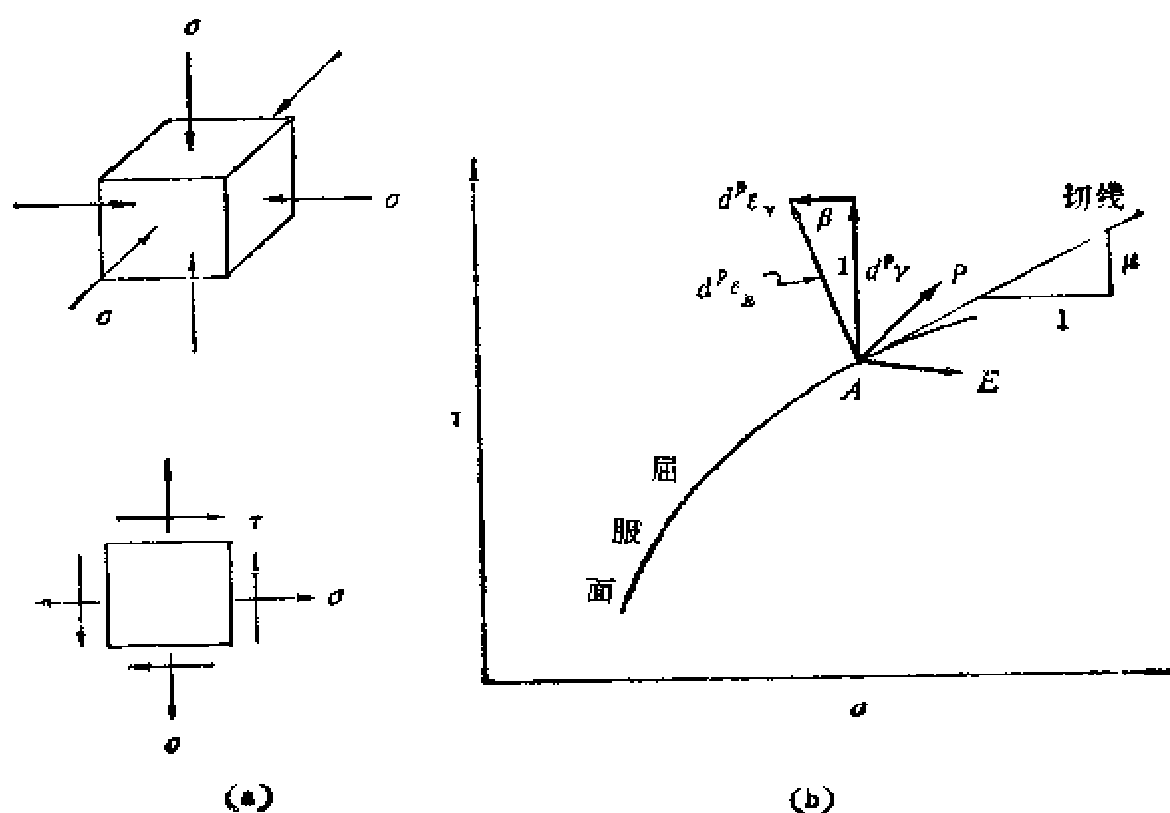


图 9.8

最大摩擦力)，$d\sigma$ 相当正压力。仅当接触面之间的作用力(此处相当 $d\tau$)大于摩擦力时才能滑动(此处为产生新的塑性变形，即材料微结构中的滑移)。因此，μ 称为内摩擦系数。

剪应变增量 $d\gamma$ 可分为弹、塑性两部分：

$$d\gamma = \frac{d\tau}{G} + d^p\gamma \tag{9.4.42}$$

用 $d^p\varepsilon_v$ 表示伴随 $d^p\gamma$ 的体积膨胀，设

$$d^p\varepsilon_v = \beta d^p\gamma \tag{9.4.43}$$

β 称为膨胀因子。塑性剪切变形引起体积膨胀的现象可以解释为，由于接触面粗糙，剪切变形后接触面间的距离加大所致，由图 9.9 示意。μ 和 β 均为材料常数。总体积应变增量可写为弹、塑性两部分之和：

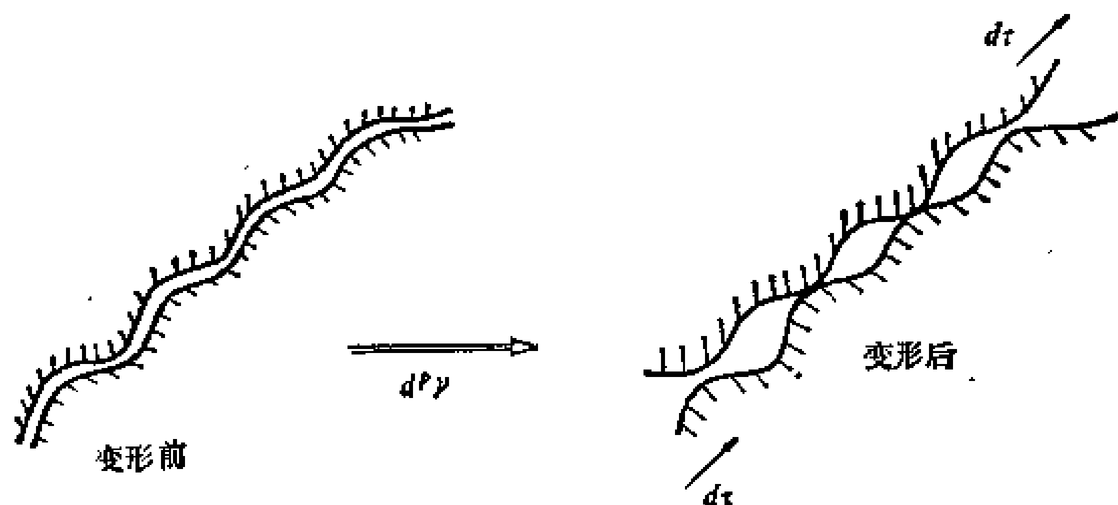


图 9.9

$$d\varepsilon_v = -\frac{d\sigma}{K} + d^p\varepsilon_v \tag{9.4.44}$$

其中 K 为弹性体积模量，$1/K = 3(1-2\nu)/E$。在静水压不变 $(d\sigma = 0)$ 的条件下得到的材料剪切曲线如图 9.10 所示。

若以 G_p 表示塑性硬化模量，则

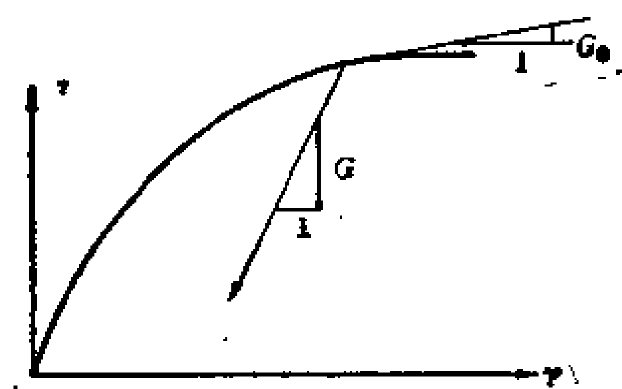


图 9.10

$$d^p\gamma = \frac{1}{G_p} d\tau \tag{9.4.45}$$

上式代入(9.4.42)，有

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{1}{G_t} = \frac{1}{G} + \frac{1}{G_p} \tag{9.4.46}$$

若试验时 $d\sigma \neq 0$，则(9.4.45)式中的 $d\tau$ 应改为有效剪应力增量 $d\tau - \mu d\sigma$，即

$$d^p\gamma = \frac{1}{G_p}(d\tau - \mu d\sigma) \tag{9.4.47}$$

将(9.4.47)代入(9.4.42)：

$$d\gamma = \frac{d\tau}{G} + \frac{1}{G_p}(d\tau - \mu d\sigma) \tag{9.4.48}$$

利用(9.4.47)和(9.4.43)，(9.4.44)式可写为

$$d\varepsilon_v = -\frac{d\sigma}{K} + \frac{\beta}{G_p}(d\tau - \mu d\sigma) \tag{9.4.49}$$

或将以上两式写为率形式：

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{1}{G_p}(\dot{\tau} - \mu\dot{\sigma}) \\ \dot{\varepsilon}_v &= -\frac{\dot{\sigma}}{K} + \frac{\beta}{G_p}(\dot{\tau} - \mu\dot{\sigma}) \end{aligned} \tag{9.4.50}$$

(9.4.50)为均压加剪切情况下的本构关系。

其中

$$\dot{\tau}-\mu\dot{\sigma}\begin{cases}>0 & \text{时,塑性加载}\\ <0 & \text{时,弹性卸载}\end{cases}$$

将 (9.4.50) 推广到一般应力状态，Rudnicki 和 Rice[28] 给出了一个修正的 J_2 流动理论方案。在这个方案中，他们假设各向同性硬化，并且屈服面是光滑的，但允许塑性变形率与屈服面非正交。采用 Cauchy 应力 $\mathbf{t}$，t_e 和 τ_e 分别为 $\mathbf{t}$ 的等效应力和等效剪应力，

$$\tau_e=\left(\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}t_e \tag{9.4.51}$$

描写形状变化的(9.4.50)₁ 式推广为

$$2\mathbf{d}'=\frac{1}{G}\dot{\mathbf{s}}+\frac{1}{G_p}\frac{\mathbf{s}}{\tau_e}\left[\frac{\mathbf{s}}{2\tau_e}:\dot{\mathbf{t}}+\frac{\mu}{3}\mathscr{I}_1(\dot{\mathbf{t}})\right]$$

$$2\hat{d}'_{AB}=\frac{1}{G}\hat{\dot{s}}_{AB}+\frac{1}{G_p}\frac{1}{\tau_e}\hat{s}_{AB}\left[\frac{1}{2\tau_e}\hat{s}_{CD}\hat{\dot{t}}^{CD}+\frac{\mu}{3}\hat{\dot{t}}^{C}_{\cdot C}\right] \tag{9.4.52a}$$

式中

$$\mathbf{d}'=\mathbf{d}-\frac{1}{3}\mathbf{I}\mathscr{I}_1(\mathbf{d}),\quad \hat{d}'_{AB}=\hat{d}_{AB}-\frac{1}{3}\hat{g}_{AB}\hat{d}^{k}_{\cdot k}$$

描写体积变化的(9.4.50)₂ 式推广为

$$\mathscr{I}_1(\mathbf{d})=\frac{1}{3K}\mathscr{I}_1(\dot{\mathbf{t}})+\frac{\beta}{G_p}\left[\frac{\mathbf{s}}{2\tau_e}:\dot{\mathbf{t}}+\frac{\mu}{3}\mathscr{I}_1(\dot{\mathbf{t}})\right]$$

$$\hat{d}^{k}_{\cdot k}=\frac{1}{3K}\hat{\dot{t}}^{k}_{\cdot k}+\frac{\beta}{G_p}\left[\frac{1}{2\tau_e}\hat{s}_{CD}\hat{\dot{t}}^{CD}+\frac{\mu}{3}\hat{\dot{t}}^{C}_{\cdot C}\right] \tag{9.4.52b}$$

以上(9.4.52a, b)两式相加，得

$$\mathbf{d}=\mathbf{d}'+\frac{1}{3}\mathbf{I}J_1(\mathbf{d})=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{G}\dot{\mathbf{s}}+\frac{1}{G_p}\frac{\mathbf{s}}{\tau_e}\left(\frac{\mathbf{s}}{2\tau_e}:\dot{\mathbf{t}}+\frac{\mu}{3}J_1(\dot{\mathbf{t}})\right)\right]$$

$$+\frac{1}{3}\mathbf{I}\left[\frac{1}{3K}J_1(\dot{\mathbf{t}})+\frac{\beta}{G_p}\left(\frac{\mathbf{s}}{2\tau_e}:\dot{\mathbf{t}}+\frac{\mu}{3}J_1(\dot{\mathbf{t}})\right)\right]$$

$$\hat{d}_{AB}=\hat{d}'_{AB}+\frac{1}{3}\hat{g}_{AB}\hat{d}^{k}_{\cdot k}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{G}\hat{\dot{s}}_{AB}+\frac{1}{G_p}\frac{1}{\tau_e}\hat{s}_{AB}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{2\tau_e}\hat{s}_{CD}\hat{\dot{t}}^{CD}+\frac{\mu}{3}\hat{\dot{t}}^{C}_{\cdot C}\right)\right]+\frac{1}{3}\hat{g}_{AB}\left[\frac{1}{3K}\hat{\dot{t}}^{k}_{\cdot k}\right.$$

$$\left.+\frac{\beta}{G_p}\left(\frac{1}{2\tau_e}\hat{s}_{CD}\hat{\dot{t}}^{CD}+\frac{\mu}{3}\hat{\dot{t}}^{C}_{\cdot C}\right)\right]$$

经过整理后，上式可写作：

$$\mathbf{d}=\mathbf{d}^e+\mathbf{d}^p=\left[\mathscr{M}+\frac{\alpha}{\mathrm{H}}\mathbf{PQ}\right]:\dot{\mathbf{t}}=\mathbf{M}:\dot{\mathbf{t}}$$

$$\hat{d}_{AB}=\hat{d}^e_{AB}+\hat{d}^p_{AB}=\left[\hat{\mathscr{M}}_{ABCD}+\frac{\alpha}{\mathrm{H}}\hat{P}_{AB}\hat{Q}_{CD}\right]\hat{\dot{t}}^{CD}=\hat{M}_{ABCD}\hat{\dot{t}}^{CD}$$

(9.4.53)

其中变形率的弹性部分 $\mathbf{d}^e$ 与(9.1.13)式的差别只在于将Kirchhoff应力 $\dot{\mathbf{t}}$ 改成了 Cauchy 应力 $\mathbf{t}$；变形率的塑性部分 $\mathbf{d}^p$ 涉及的 H，$\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ 含义为：

$$H=G_p$$

$$\mathbf{P}=\frac{\sqrt{3}}{2t_e}\mathbf{s}+\frac{\beta}{3}\mathbf{I},\quad \hat{P}_{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2t_e}\hat{s}_{AB}+\frac{\beta}{3}\hat{g}_{AB}$$

$$\mathbf{Q}=\frac{\sqrt{3}}{2t_e}\mathbf{s}+\frac{\mu}{3}\mathbf{I},\quad \hat{Q}_{CD}=\frac{\sqrt{3}}{2t_e}\hat{s}_{CD}+\frac{\mu}{3}\hat{g}_{CD}\qquad(9.4.54)$$

$\mathbf{d}^p$ 平行于 $\mathbf{P}$ 的方向，$\mathbf{Q}$ 沿着屈服面外法线方向：

$$\mathbf{Q}=\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}},\quad \hat{Q}_{CD}=\frac{\partial F}{\partial \hat{t}^{CD}}$$

式中 F 表示屈服函数。屈服条件可表示为

$$F(\mathbf{t})=F_{\max}\qquad(9.4.55)$$

故

$$\dot{F}=\mathbf{Q}:\dot{\mathbf{t}}=\mathbf{Q}:\dot{\mathbf{t}}$$

$$-\hat{Q}_{CD}(\hat{\dot{t}})^{CD}=\hat{Q}_{CD}\hat{\dot{t}}^{CD}=\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{t}_e+\frac{1}{3}\mu\hat{\dot{t}}^{K}_{\cdot K}\quad(9.4.56)$$

(9.4.53)式中的 α 取值如下：

$$\alpha=1\quad 当\ F=F_{max}\ 且\ \mathbf{Q}:\dot{\mathbf{t}}=\hat{Q}_{CD}\hat{\dot{t}}^{CD}\geqslant 0$$

$$\alpha=0\quad 当\ F=F_{max}\ 且\ \mathbf{Q}:\dot{\mathbf{t}}=\hat{Q}_{CD}\hat{\dot{t}}^{CD}<0$$

$$或当\ F<F_{max}\quad(9.4.57)$$

将(9.4.53)用于单向拉伸可以得到

$$\frac{1}{H}=3\left(\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E}\right)\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{3}}\right)^{-1}\left(1+\frac{\mu}{\sqrt{3}}\right)^{-1}\quad(9.4.58)$$

(9.4.53) 就是 Rudnicki 与 Rice[28]给出的考虑内摩擦和膨胀塑性的一种本构模型。

现在进行几点讨论：

(1) 由于考虑内摩擦 ($\mu\neq 0$) 及塑性体积膨胀 ($\beta\neq 0$)，且一般 $\mu\neq\beta$，所以(9.4.53)式的瞬时柔度张量 $\mathbf{M}$ 的分量 $\hat{M}_{ABCD}$ 失去了 A，$B\longleftrightarrow C$，D 的对称性。因此，即使在本构关系中改用 Kirchhoff 应力 $\underset{\cdot}{\mathbf{t}}$，仍然不能建立相应的变分原理。

(2) 当 $\beta=\mu\ (\neq 0)$ 时，$\mathbf{P}=\mathbf{Q}$，这时 $\mathbf{d}^p$ 与屈服面正交；在图 9.8(b) 中，总塑性应变增量与屈服面切线垂直。当 $\beta=\mu=0$ 时，只要将 Cauchy 应力 $\mathbf{t}$ 换为 Kirchhoff 应力 $\underset{\cdot}{\mathbf{t}}$，(9.4.53)就变为大变形情况的 Prandtl-Reuss 方程(9.1.16)。

(3) 当材料的 β 值很小 (例如高强度马氏体钢 $\mu\approx 0.05$，$\beta\approx\mu/15$)，以致在$(9.4.54)_1$式中可以略去时，材料的行为满足塑性不可压缩，但仍然不满足正交法则。

Rudnicki 与 Rice 在[28]中还给出了一个 J_2 形变理论类型的本构律方案。在这个方案中考虑了应力率沿屈服面切平面的分量对塑性变形的影响，

$$\mathbf{d}^p = \frac{1}{H}\mathbf{PQ}:\dot{\mathbf{t}} + \frac{1}{2H_1}\left[\overset{\circ}{\mathbf{s}} - \frac{\mathbf{s}}{t_e}\overset{\circ}{t}_e\right]$$

$$\hat{d}^p_{AB} = \frac{1}{H}\hat{P}_{AB}\hat{Q}_{CD}\hat{\dot{t}}^{CD} + \frac{1}{2H_1}\left[\hat{\dot{s}}_{AB} - \frac{1}{t_e}\hat{s}_{AB}\dot{t}_e\right] \quad (9.4.59)$$

这相当于模拟屈服面有角点的情况。 单向拉伸时，上式右端的[…]=0，所以 H_1 需要通过其它简单加载试验(如单剪)确定。

五、空穴增长模型

通常认为，韧性金属中很大的塑性变形导至空穴的形核与长大。 Gurson[29] 对于多孔的弹塑性体建立了考虑这种机制的连续介质模型。这个模型的特点是考虑膨胀塑性以及屈服依赖于静水应力。 在 Gurson 的模型中把空洞-基体集合当作一个均匀的各向同性的空心球，称为构元。f 表示空洞在构元中所占的体积比分。假设基体为刚塑性材料，通过刚塑性极限分析可确定这一单独构元的力学行为。 [29] 中采用的许多假设虽然没经过严格证明，但都是物理上可以理解的。 Gurson 假定屈服条件为如下形式:

$$F(\mathbf{t}, t_Y, f) = \left(\frac{t_e}{t_Y}\right)^2 + 2f\cosh\left(\frac{\hat{g}_{AB}\hat{t}^{AB}}{2t_Y}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (9.4.60)$$

其中 $\mathbf{t}$ 是宏观 Cauchy 应力(即按包括空洞在内的单位面积折算)。t_e 为 $\mathbf{t}$ 之等效应力，t_Y 是基体材料的拉伸流动强度。 式中第二项表明，由于考虑空洞静水应力对屈服有影响，当 $f=0$ 时，上式化为 Mises 屈服条件。 Needleman 和 Rice[30] 曾说明，对于上述构元，塑性变形率应满足

$$\mathbf{d}^p = \Lambda\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}}, \quad \hat{d}^p_{AB} = \Lambda\frac{\partial F}{\partial \hat{t}^{AB}} \quad (9.4.61)$$

其中 Λ 为待定的流动因子。

假设宏观耗散率与微观耗散率相等，即

$$(1-f)\dot{t}_Y d_e^p = \dot{t}^{AB}\hat{d}_{AB}^p \tag{9.4.62}$$

其中 d_e^p 为基体材料的等效塑性变形率(下标 e 表示"等效")。显然，

$$d_e^p = \frac{1}{\bar{H}}\dot{t}_Y \tag{9.4.63}$$

其中 $\bar{H}$ 为基体材料的瞬时塑性模量，

$$\frac{1}{\bar{H}} = \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \tag{9.4.64}$$

只要注意到(9.4.62)式右端表示即时构形中每单位体积构元的塑性变形功率，而左端代表该单位体积构元中所含基体材料的塑性变形功率，则(9.4.62)式的成立是显然的。将(9.4.63)代入(9.4.62)可得基体材料的硬化规律:

$$\dot{t}_Y = \frac{\bar{H}}{(1-f)t_Y}\dot{t}^{AB}\hat{d}_{AB}^p \tag{9.4.65}$$

上式按变形历史积分，就可得到任意时刻的 t_Y。

塑性变形过程中空洞体积比分 f 的变化由已经存在的空洞的长大和新空穴的形核两种原因造成。在金属中，微裂纹和夹杂的脱开是主要的形核源。按照[30]

$$\dot{f} = (\dot{f})_{\text{growth}} + (\dot{f})_{\text{nucleation}} \tag{9.4.66}$$

$$(\dot{f})_{\text{growth}} = (1-f)\mathscr{J}_1(\mathbf{d}^p) = (1-f)\hat{d}^{pA}_{\cdot A} \tag{9.4.67}$$

$$\begin{aligned}(\dot{f})_{\text{nucleation}} &= A\dot{t}_Y + B\frac{1}{3}\dot{\mathscr{J}}_1(\mathbf{t}) \\ &= A\dot{t}_Y + B\frac{1}{3}(g_{AB}\dot{t}^{AB})\end{aligned} \tag{9.4.68}$$

让我们分析(9.4.67)式的含意: 考虑参考构形中体积为1的构元，变形后体积为 J(这就是体积比 J 的定义)，其中空洞体积为 Jf。假设构元体积的变化完全是由空洞体积的变化造成(略去基体的体积变化)，即

$$(Jf)^{\cdot} = \dot{J}, \quad \dot{J}f + J\dot{f} = \dot{J}$$

或写作

$$\dot{f} = (1 - f)\frac{\dot{J}}{J} \tag{9.4.67)'}$$

由 (3.2.1b)，$\dot{J}/J = \mathscr{I}_1(\mathbf{d})$，它表示即时构形中每单位体积的体积变形率。由于 Gurson 假设刚塑性，所以 $\mathscr{I}_1(\mathbf{d}^e) = 0$，$\mathscr{I}_1(\mathbf{d}) = \mathscr{I}_1(\mathbf{d}^p) = \dot{J}/J$，代入(9.4.67)′就得到(9.4.67)式的结果①。

(9.4.68) 式中 A 和 B 的具体函数形式视形核机制而定。该式右端第一、二项分别表示材料内部由于基体材料硬化(以 t_Y 变量)和三轴均拉部分 ($\mathscr{I}_1(\mathbf{t})$) 增加所引起空洞形核。

以下利用一致性条件 $\dot{F} = 0$ 确定流动因子 $\boldsymbol{\Lambda}$：由(9.4.60)式，一致性条件可写为：

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} : \dot{\mathbf{t}} + \frac{\partial F}{\partial t_Y}\dot{t}_Y + \frac{\partial F}{\partial f}\dot{f} = 0 \tag{9.4.69)'}$$

以下证明

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} : \dot{\mathbf{t}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} : \overset{\circ}{\mathbf{t}} \tag{a}$$

将 t_e 看作 $\mathbf{t}$ 的函数，不难由(9.4.60)式求出

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} = \frac{3}{t_Y^2}\mathbf{S} + \frac{f}{t_Y}\sinh\left(\frac{\mathbf{I} : \mathbf{t}}{2t_Y}\right)\mathbf{I} \tag{b}$$

$$\mathbf{t} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} = \frac{3}{t_Y}\left(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} - \frac{1}{3}\mathscr{I}_1(\mathbf{t})\mathbf{t}\right) + \frac{f}{t_Y}\sinh\left(\frac{\mathbf{I} : \mathbf{t}}{2t_Y}\right)\mathbf{t} \tag{c}$$

由(b)、(c)两式可知，$\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{t}}$ 与 $\mathbf{t} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{t}}$ 均为对称张量。由 Jaumann 导数的定义，并注意到 $\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{t}}$ 的对称性，有

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} : \dot{\mathbf{t}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} : (\overset{\circ}{\mathbf{t}} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{w})$$

---

① 假设新空洞的形核(例如夹杂脱开)不造成宏观体积变化，故 (9.4.67)′ 式中 $\dot{f}$ 应理解为 $(\dot{f})_{growth}$。

$$= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} : \dot{\mathbf{t}} + 2\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} : (\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}) \tag{d}$$

显然

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} : (\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}) = \left(\mathbf{t}\cdot\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}}\right) : \mathbf{w} = 0 \tag{e}$$

上式第一个等号是因为 $\mathbf{t}$ 与 $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}}$ 对称，第二个等号则由于 $\left(\mathbf{t}\cdot\frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}}\right)$ 对称以及 $\mathbf{w}$ 反对称。将(e)代入(d)则得到(a)式。利用(a)，一致性条件(9.4.69)' 式又可写为:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \hat{t}^{CD}}\hat{\dot{t}}^{CD} + \frac{\partial F}{\partial t_Y}\dot{t}_Y + \frac{\partial F}{\partial f}\dot{f} = 0 \tag{9.4.69}$$

将(9.4.66)~(9.4.68)代入上式，有

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{t}^{CD}}\hat{\dot{t}}^{CD} + \frac{\partial F}{\partial t_Y}\dot{t}_Y + \frac{\partial F}{\partial f}\Big[(1-f)\mathscr{J}_1(\mathbf{d}^p) + A\dot{t}_Y$$
$$+ \frac{B}{3}\mathscr{J}_1(\dot{\mathbf{t}})\Big] = 0 \tag{9.4.70}$$

由于 $\mathscr{J}_1(\overset{\nabla}{\mathbf{t}}) = \mathscr{J}_1(\dot{\mathbf{t}})$，并利用(9.4.65)，上式可整理为:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \hat{t}^{CD}} + \frac{\partial F}{\partial f}\frac{B}{3}\hat{g}_{CD}\right)\hat{\dot{t}}^{CD} + \Big[\frac{\partial F}{\partial f}(1-f)\hat{g}^{AB}$$
$$+ \frac{\bar{H}}{(1-f)t_Y}\left(A\frac{\partial F}{\partial f} + \frac{\partial F}{\partial t_Y}\right)\hat{t}^{AB}\Big]\hat{d}^p_{AB} = 0 \tag{9.4.71}$$

再利用(9.4.61)，并引入记号 $\bar{G}$:

$$\bar{G} = -\Big[\frac{\partial F}{\partial f}(1-f)\hat{g}^{AB} + \frac{\bar{H}}{(1-f)t_Y}\Big(A\frac{\partial F}{\partial f}$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial t_Y}\Big)\hat{t}^{AB}\Big]\frac{\partial F}{\partial \hat{t}^{AB}} \tag{9.4.72}$$

则由(9.4.71)得

$$\Lambda = \frac{1}{G}\left[\frac{\partial F}{\partial \hat{\tau}^{CD}} + \frac{\partial F}{\partial f}\frac{B}{3}\hat{g}_{CD}\right]\hat{\tau}^{CD} \tag{9.4.73}$$

将上式带回(9.4.61)，有

$$\hat{d}^{p}_{AB} = \frac{1}{G}\frac{\partial F}{\partial \hat{\tau}^{AB}}\left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\tau}^{CD}} + \frac{\partial F}{\partial f}\frac{B}{3}\hat{g}_{CD}\right)\hat{\tau}^{CD} \tag{9.4.74}$$

(9.4.74)式就是由 Gurson 模型导出的非经典本构关系。将该式与上节中膨胀塑性和压力敏感屈服模型的结果 (9.4.53) 式对比就会发现，只要令

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{\tau}^{AB}} = \hat{P}_{AB},\ \frac{\partial F}{\partial \hat{\tau}^{CD}} + \frac{\partial F}{\partial f}\frac{B}{3}\hat{g}_{CD} = \hat{Q}_{CD}$$

则这两个本构律是十分类似的。若不考虑空穴，即 $f\equiv 0$，参数 f 不再出现在屈服函数 F 中，或取 $B=0$，即不考虑三轴应力对空洞形核的影响，则 $\hat{P}_{AB}=\hat{Q}_{AB}=\partial F/\partial \hat{\tau}^{AB}$，这时 (9.4.74) 又退化为经典的本构律。

本构理论的研究在本世纪四十至五十年代曾经出现过高潮，但以后又转入低潮，最近又重新活跃起来。在普通工程问题中往往存在采用不同本构关系所得结果区别不大的情况，特别是偏离比例加载不大的问题。但是，某些问题，如颈缩、失稳和循环塑性等，对本构模型十分敏感。正是这些问题的研究推动了大变形弹塑性本构理论的发展，反过来它们又是鉴别一个本构理论的正确性和适用性的重要标准。

§9.5 含内变量的塑性变形理论

一、损伤力学的方法

损伤力学认为，材料内部存在着连续分布的缺陷，如位错、空洞等，这些缺陷统称为损伤。损伤力学就是研究在各种加载条件下(塑性、蠕变、疲劳等)物体中损伤随着变形而发展并最终导致破

坏的过程和规律。损伤力学的研究方法可分为两大类：

（1）微观（或细观）方法：这种方法是根据材料的微观成分（如基体、颗粒、空洞）单独的力学行为以及它们之间的相互作用来建立宏观的本构关系。§9.4“五”中介绍的 Gurson 的工作即为一例。这种方法的主要困难是从非均质的微观材料需要经过许多简化假设才能过渡到宏观的均质材料。况且人们对于微观成分本身的了解还不够充分。

（2）宏观方法：它虽然需要微观模型的启发，但是并不需要直接从微观机制导出宏观量之间的理论关系式。而只要求所建立的模型以及由模型导出的推论与实际相符。本节所介绍的属于第二种方法。采用这种方法的理论也是形形色色各不相同的。这方面的研究工作正在发展，还不成熟。宏观方法的共同特点是引入损伤参数作为本构关系中的内变量。不同的研究者采用不同的损伤参数。Качанов[31]，Работнов[32]，Lemaitre 与 Chaboche[33]，Westlund[34] 等选用的损伤参数是和有效面积减缩相联系的，Rousselier[35] 所选用的损伤参数与质量密度有关，而 Dragon 与 Mroz[36] 则选用微裂纹密度。大部分作者选用的损伤参数是标量，即假定材料的损伤是各向同性的。Leckie 与 Onat[37]，Murakami 与 Ohno[38]，Cordebois 与 Sidoroff[39] 等建议采用张量来描述损伤。

二、内变量的概念

损伤力学的理论是在考虑内变量的塑性本构理论的框架内建立起来的。我们首先以两个简例说明什么叫内变量。

例 1 图 9.11 表示一个线弹簧与粘壶串联的系统（Maxwell 模型）。粘壶是一个率相关的阻尼元件。用 ε_e，ε_v 和 ε 分别表示弹簧、粘壶和系统的总变形，则 $\varepsilon=\varepsilon_e+\varepsilon_v$，系统所受的应力可表示为

$$\sigma=E\varepsilon_e=E(\varepsilon-\varepsilon_v) \tag{9.5.1}$$

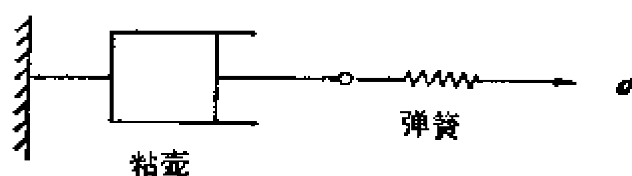


图 9.11

由式(9.5.1)可见，给定 ε 不能算出 σ，即 ε 和 σ 之间没有一一对应的关系。对于一定的 ε，视 ε_v 值的不同 σ 可以很大也可以为零。而粘壶变形 ε_v 与整个加载历史有关，这就使得本构关系(9.5.1)也与历史有关。但全部历史对 $\sigma\sim\varepsilon$ 间本构关系的影响只表现在 ε_v 的即时值上。我们称 ε_v 这样的量为内变量。只要已知 ε_v 的值，σ 和 ε 的即时值就可以相互确定。用 μ 表示粘性系数，则

$$\frac{d\varepsilon_v}{dt}=\mu\sigma \tag{9.5.2}$$

由(9.5.1)、(9.5.2)消去 ε_v，有

$$\frac{d\sigma}{dt}=E\left(\frac{d\varepsilon}{dt}-\frac{d\varepsilon_v}{dt}\right)=E\left(\frac{d\varepsilon}{dt}-\mu\sigma\right)$$

即

$$\dot{\sigma}+E\mu\sigma=E\dot{\varepsilon} \tag{9.5.3}$$

由于(9.5.3)对 $\dot{\sigma}$ 和 $\dot{\varepsilon}$ 是非齐次的，故属于率相关情况。以下再举一个率无关的例子。

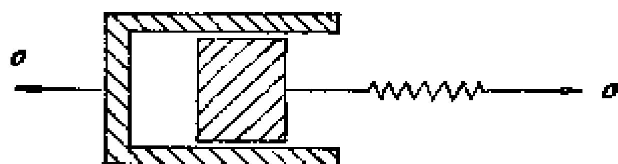


图 9.12

例 2 图 9.12 表示线弹簧与滑块串联的系统。滑块与导轨间存在着带有"硬化"的库伦摩擦。弹簧变形和系统总变形仍以 ε_e 和 ε 表示。f 表示在总变形中由于滑动滑动引起的部分，即 ε —

图 9.13

$\varepsilon_e + f$，显然

$$\sigma = E\varepsilon_e = E(\varepsilon - f) \tag{9.5.4}$$

σ_Y 表示最小摩擦力，摩擦力 σ_f 随着滑动量 f 而线性增长，

$$\sigma_f = \sigma_Y + E_p f,\quad E_p^{-1} + E^{-1} = E_t^{-1} \tag{9.5.5}$$

卸载时滑块不动。(9.5.4)式表明，应力应变关系中含变量 f。如果已知 f，由(9.5.4)就可得到 σ 和 ε 的一一对应关系。全部变形历史对本构关系的影响就表现在 f 的当前值上，所以 f 为内变量。对于图 9.13 给出的加载历史，各阶段的内变量和应力应变关系为：

OA 段　$f = 0$　　　　$\sigma = E\varepsilon$

AB 段　$f = \dfrac{1}{E_p}(\sigma - \sigma_Y)$

$$\sigma = E(\varepsilon - f) = \sigma_Y + E_t(\varepsilon - \varepsilon_Y)$$

B 点 $\quad f = \frac{1}{E_p}(\sigma_B - \sigma_Y)$

$$\sigma_B = E(\varepsilon_B - f) = \sigma_Y + E_t(\varepsilon_B - \varepsilon_Y)$$

BC 段 $\quad f = f_B$

$$\sigma = E(\varepsilon - f_B)$$

C 点 $\quad f = f_B = f_C$

$$\sigma_C = E(\varepsilon_C - f_C) = -\sigma_B$$

CD 段 $\quad f = f_C + \frac{1}{E_p}(\sigma - \sigma_C)$

$$\sigma = E(\varepsilon - f) = \sigma_C + E_t(\varepsilon - \varepsilon_C)$$

显然,在以上加载历史中,弹簧-滑块串联系统模拟了线性硬化材料的力学性能。其中内变量 f 的物理意义就是塑性应变(小变形)。因此,塑性变形本身实质上也可以看作是一种内变量,它依赖于加载历史。

考虑一定质点 X 的一个邻域,一般情况下,简单材料的本构关系(见(6.1.2)′式,略去表示质点的自变量 X 不写)可写为:

$$\mathbf{t}(t) = \mathop{f}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{D}(t-s)) \tag{9.5.6}$$

有时能找到一组内变量 $\boldsymbol{\alpha}(t)$, 只要已知 t 时刻的 $\boldsymbol{\alpha}$ 值以及变形梯度 $\mathbf{D}(t)$ 和温度 $\theta(t)$, 换句话说,只要已知 $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{D}$, θ 的即时值,而无需知道历史,就可以唯一地确定 Cauchy 应力的即时值 $\mathbf{t}(t)$。因此 $\mathbf{t}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{D}$, θ 的函数:

$$\mathbf{t}(t) = f(\mathbf{D}(t), \boldsymbol{\alpha}(t), \theta(t)) \tag{9.5.7}$$

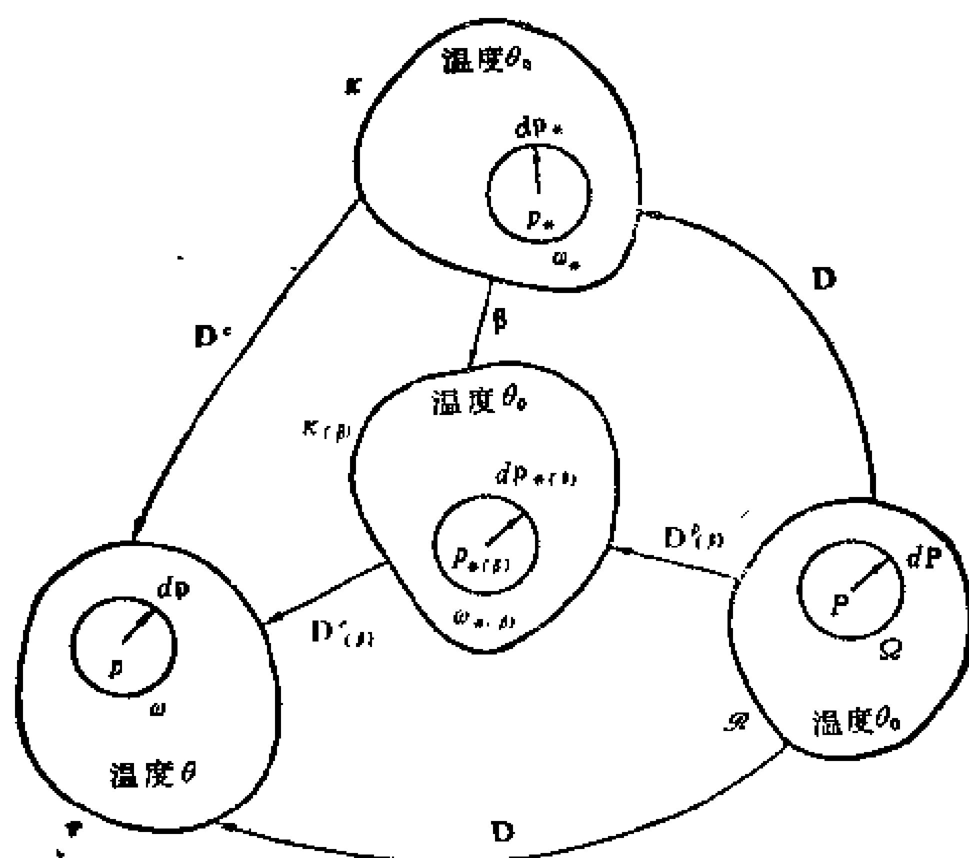
这里 f 表示某一函数。(9.5.7)式为(9.5.6)式的特例: 在(9.5.6)式中应力对运动历史的依赖性表现在泛函 $\mathop{f}_{s=0}^{s=\infty}$ 上, 而在(9.5.7)则表现在内变量 $\boldsymbol{\alpha}$ 作为函数 f 的自变量的即时值上。

通过例 2 已经说明, 塑性变形也是一种内变量。但是塑性变形是由位错滑移等物理过程造成的, 这些过程伴随着材料内部结

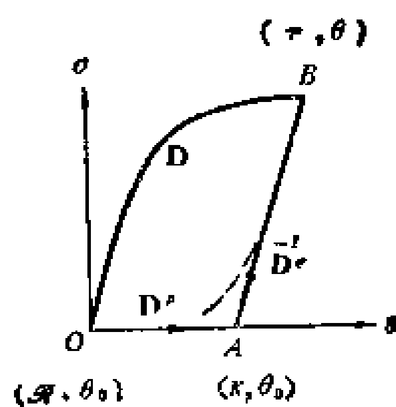
构的变化。因此，Kröner[40,41]，Kratochvil 和 Dillion[42] 等人选择各种与位错排列有关的量，包括不同阶数的张量，作为内变量，例如位错密度、位错环密度等。因为塑性变形与这些结构状态参数有关，所以有的作者(例如 Rice[43,44])在选择后者作为内变量之后，就不再选择塑性应变作为内变量了。因为塑性变形是上述内变量发生变化的结果，它不再是一个可以任意独立变化的内变量。有的作者仍然同时引进塑性变形(与其它内变量一起)作为内变量之一，例如前述[42]以及 Perzyna[45]，但与此同时又假定与塑性变形有关的结构内变量的变化率可以线性地通过塑性变形率表示。另外一些作者则在内变量中不直接引入塑性变形，而把弹性变形作为状态变量，例如 Halphen 和 Nguyen[46] 以及 Lemaitre 与 Chaboche[47] 等。

三、塑性变形的定义

关于塑性变形的定义，也即究竟用哪个量作为塑性变形的度量，至今尚未得到一致的看法。以下介绍一种我们认为比较合理的定义。在图 9.14(a) 中，用 $\mathscr{R}$ 表示初始构形，其温度以 θ_0 表示。它经过变形梯度 $\mathbf{D}$ 代表的变换，变为即时构形 $\ast$，温度则由 θ_0 变为 θ。若用简单拉伸变形过程帮助理解，$\mathscr{R}$ 和 $\ast$ 构形分别与图 9.14(b) 中 O 点和 B 点所代表的状态相对应。考虑 $\mathscr{R}$ 中任一点 P，线元 $d\mathbf{P}$ 以及 P 点附近的一个小邻域 Ω (物质的)，在 $\ast$ 构形中分别变为 p 点，线元 $d\mathbf{p}$ 和 ω 邻域。假如 κ 构形是由 $\ast$ 构形中每个微元 ω 都卸载到应力为零同时温度由 θ 变回到 θ_0 而得到的卸载构形(因此各个微元之间变形可能不协调)。这里假设在卸载过程中不产生新的塑性变形，在图 9.14(b) 中卸载构形 κ 相当于状态点 A。线元 $d\mathbf{P}$ 在 κ 构形中变为 $d\mathbf{p}_{\ast}$。在图 9.14(b) 中尽管实际上从 B 点卸载还未到达 A 点之前已经开始产生新的反向塑性变形，但是我们仍然假定 A 为卸载状态。卸载构形 κ 又称松弛构形，或中



(a)



(b)

图 9.14

间构形。

用 $\mathbf{D}^p$ 代表由 $\mathscr{R}$ 中 P 点邻域 Ω 到 κ 中 p_* 点邻域 ω_* 的变换，

$\mathbf{D}^e$ 表示由 κ 到 $\varkappa$ 的变换，显然

$$d\mathbf{p}=\mathbf{D}^e\cdot d\mathbf{p}_*=\mathbf{D}^e\cdot(\mathbf{D}^p\cdot d\mathbf{P})=(\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{D}^p)\cdot d\mathbf{P}$$

故

$$\mathbf{D}=\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{D}^p \tag{9.5.8}$$

变形梯度 $\mathbf{D}$ 的上述分解形式是由 E. H. Lee[48] 首先提出的。Clifton[49] 则提出 $\mathbf{D}=\mathbf{D}^p\cdot\mathbf{D}^e$，并且论证了在某些情况下它与(9.5.8)式的等价性。实际上，卸载构形的选择并不是唯一的。我们也可以选择 $\kappa_{(\beta)}$ 为卸载构形，κ 与 $\kappa_{(\beta)}$ 之间相差一个由正交张量 β 代表的转动。参照图 9.14(a) 显然有

$$\begin{aligned}&\mathbf{D}^e_{(\beta)}=\mathbf{D}^e\cdot\boldsymbol{\beta}^*,\quad \mathbf{D}^e=\mathbf{D}^e_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{\beta}\\&\mathbf{D}^p_{(\beta)}=\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{D}^p,\quad \mathbf{D}^p=\boldsymbol{\beta}^*\cdot\mathbf{D}^p_{(\beta)}\end{aligned} \tag{9.5.9}$$

将(9.5.9)代入(9.5.8)：

$$\mathbf{D}=\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{D}^p=\mathbf{D}^e_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}^*\cdot\mathbf{D}^p_{(\beta)}=\mathbf{D}^e_{(\beta)}\cdot\mathbf{D}^p_{(\beta)} \tag{9.5.8$'$}$$

(9.5.8)′ 说明 $\mathbf{D}$ 的这种分解不是唯一的，这个不唯一性是卸载构形的选择不唯一所造成的。选择不同的卸载构形就得到不同的 $\mathbf{D}^e$ 和 $\mathbf{D}^p$。关于如何考虑卸载构形的选择问题，将于下面专门讨论，这里暂时假定已选择某一特定的卸载构形 κ。

由(2.2.35)，(2.2.37)，(2.5.1)，(2.5.2)，(2.6.15)，(2.6.16)，(2.8.4a, b)或(2.8.5a, b)式：

$$\mathbf{D}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}=\mathbf{V}\cdot\mathbf{R} \tag{9.5.10a}$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{D}^*\cdot\mathbf{D}=\mathbf{U}^2,\ \mathbf{B}=\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}^*=\mathbf{V}^2 \tag{9.5.10b}$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{I}),\ \mathbf{e}=\frac{1}{2}(\mathbf{I}-\overset{-1}{\mathbf{B}}) \tag{9.5.11}$$

模仿(9.5.10)和(9.5.11)，我们定义

$$\mathbf{D}^e=\mathbf{R}^e\cdot\mathbf{U}^e=\mathbf{V}^e\cdot\mathbf{R}^e,\ \mathbf{D}^p=\mathbf{R}^p\cdot\mathbf{U}^p=\mathbf{V}^p\cdot\mathbf{R}^p \tag{9.5.12a}$$

$$\mathbf{C}^e=\mathbf{D}^{e*}\cdot\mathbf{D}^e,\qquad \mathbf{C}^p=\mathbf{D}^{p*}\cdot\mathbf{D}^p \tag{9.5.12b}$$

$$\mathbf{B}^e=\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{D}^{e*},\qquad \mathbf{B}^p=\mathbf{D}^p\cdot\mathbf{D}^{p*} \tag{9.5.12c}$$

$$\mathbf{E}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^e - \mathbf{I}), \qquad \mathbf{E}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^p - \mathbf{I}) \tag{9.5.13a}$$

$$\mathbf{e}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \overset{-1}{\mathbf{B}^e}), \qquad \mathbf{e}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \overset{-1}{\mathbf{B}^p}) \tag{9.5.13b}$$

以下分析 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{E}^e$ 和 $\mathbf{E}^p$ 有什么关系。将式(9.5.8)代入(9.5.10)，再代入(9.5.11):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}[(\mathbf{D}^e \cdot \mathbf{D}^p)^* \cdot (\mathbf{D}^e \cdot \mathbf{D}^p) - \mathbf{I}]$$

$$= \frac{1}{2}[\mathbf{D}^{p*} \cdot \mathbf{D}^{e*} \cdot \mathbf{D}^e \cdot \mathbf{D}^p - \mathbf{I}] \tag{9.5.14}$$

(9.5.14)减去 $(9.5.13a)_2$，并注意到 $(9.5.12b)_2$，有

$$\mathbf{E} - \mathbf{E}^p = \frac{1}{2}\mathbf{D}^{p*} \cdot (\mathbf{D}^{e*} \cdot \mathbf{D}^e - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{D}^p = \mathbf{D}^{p*} \cdot \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{D}^p$$

因此

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}^{p*} \cdot \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{D}^p + \mathbf{E}^p \tag{9.5.15}$$

可见，$\mathbf{E} \neq \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$。Lee[48] 主张用 $\mathbf{C}^e$ 或 $\mathbf{E}^e$ 作为弹性变形的度量，塑性变形则直接用 $\mathbf{D}^p$，而不是 $\mathbf{E}^p$；Green 和 Naghdi[50],[51] 建议用 $\mathbf{E}^p$ 度量塑性变形，而弹性变形则用 $\mathbf{E} - \mathbf{E}^p = \mathbf{D}^{p*} \cdot \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{D}^p$。

仿照速度梯度 $\mathbf{L}$ 的表达式(见(3.2.5)，(3.3.4)式)

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{D}} \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \tag{9.5.16}$$

也可类似地定义

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^e &= \dot{\mathbf{D}}^e \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}^e} = \mathbf{d}^e + \mathbf{w}^e \\ \mathbf{L}^p &= \dot{\mathbf{D}}^p \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}^p} = \mathbf{d}^p + \mathbf{w}^p \end{aligned} \tag{9.5.17}$$

它们分别称为弹性速度梯度与塑性速度梯度（注意实际上并不存在弹性速度或塑性速度）。$\mathbf{L}^e$ 是即时构形 κ 中的张量，而 $\mathbf{L}^p$ 是卸载构形 κ 中的张量。

按照上述定义，$\mathbf{L}$ 与 $\mathbf{L}^e$，$\mathbf{L}^p$；$\mathbf{d}$ 与 $\mathbf{d}^e$，$\mathbf{d}^p$ 以及 $\mathbf{w}$ 与 $\mathbf{w}^e$，$\mathbf{w}^p$ 是

什么关系呢？将(9.5.8)代入(9.5.16)，并注意到(9.5.17)，

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= (\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{D}^p)^{\cdot}\cdot(\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{D}^p)^{-1}\\ &= (\dot{\mathbf{D}}^e\cdot\mathbf{D}^p+\mathbf{D}^e\cdot\dot{\mathbf{D}}^p)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^p}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^e}\\ &= \dot{\mathbf{D}}^e\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^e}+\mathbf{D}^e\cdot\dot{\mathbf{D}}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^p}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^e}\\ &= \mathbf{L}^e+\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{L}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^e}\end{aligned}\qquad(9.5.18)$$

可见 $\mathbf{L}\neq\mathbf{L}^e+\mathbf{L}^p$。北川浩[3]将(9.5.18)式中第二项写为以下加法分解形式：

$$\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{L}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^e}=\mathbf{D}^e\cdot(\mathbf{d}^p+\mathbf{w}^p)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^e}\underset{\text{记作}}{=}\tilde{\mathbf{d}}^p+\tilde{\mathbf{w}}^p\qquad(9.5.18)'$$

其中，$\tilde{\mathbf{d}}^p$ 为对称，$\tilde{\mathbf{w}}^p$ 为反对称张量

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{d}}^p &= \frac{1}{2}[\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{L}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^e}+(\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{L}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^e})^*]\\ \tilde{\mathbf{w}}^p &= \frac{1}{2}[\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{L}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^e}-(\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{L}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^e})^*]\end{aligned}\qquad(9.5.19)$$

利用(9.5.19)，(9.5.18)式又可写为：

$$\mathbf{L}=\mathbf{d}^e+\mathbf{w}^e+\tilde{\mathbf{d}}^p+\tilde{\mathbf{w}}^p=\mathbf{d}+\mathbf{w}$$

故有

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \mathbf{d}^e+\tilde{\mathbf{d}}^p\\ \mathbf{w} &= \mathbf{w}^e+\tilde{\mathbf{w}}^p\end{aligned}\qquad(9.5.20)$$

可见，$\mathbf{d}\neq\mathbf{d}^e+\mathbf{d}^p$，$\mathbf{w}\neq\mathbf{w}^e+\mathbf{w}^p$。

北川浩[3]指出，当弹性变形为小变形时（塑性变形仍可以很大），$\mathbf{D}^e$ 与 $\overset{-1}{\mathbf{D}^e}$ 均接近于 $\mathbf{I}$（如果由 $\mathscr{R}$ 到 κ 的转动很大时，我们总可以选择 κ 构形，使得 $\mathbf{D}^e$ 为纯变形，即 $\mathbf{R}^e\approx\mathbf{I}$ 而 $\mathbf{R}^p=\mathbf{R}$)。这时，由(9.5.19)，有

$$\tilde{\mathbf{d}}^p\approx\mathbf{d}^p,\ \tilde{\mathbf{w}}^p\approx\mathbf{w}^p$$

因而由(9.5.18)和(9.5.20)有

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &\approx \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p \\ \mathbf{d} &\approx \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \\ \mathbf{w} &\approx \mathbf{w}^e + \mathbf{w}^p\end{aligned} \tag{9.5.21}$$

在前面(9.1.12)式中，我们已经未加说明地采用了 $\mathbf{d}$ 的加法分解式 $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$。实际上，如果把(9.1.12)式的 $\mathbf{d}^p$ 理解为此处的$(9.5.17)_2$式中的 $\mathbf{d}^p$，则(9.1.12)式隐含着小弹性变形的假设。当然，我们也可以把(9.1.12)式当作 $\mathbf{d}^p$ 的定义式，那就相当于此处$(9.5.20)_1$式中的 $\tilde{\mathbf{d}}^p$，而与$(9.5.17)_2$式中的 $\mathbf{d}^p$ 就不是一回事了。

四、卸载构形的选择

前已指出，卸载构形的选择是不唯一的，可以把由某一特定卸载构形 κ 经过以任一正交张量 $\boldsymbol{\beta}$ 表示的转动以后所达到的构形 $\kappa_{(\beta)}$ 取作卸载构形。以 κ 为卸载构形时的 $\mathbf{D}^e$, $\mathbf{D}^p$ 与以 $\kappa_{(\beta)}$ 为卸载构形时的 $\mathbf{D}^e_{(\beta)}$, $\mathbf{D}^p_{(\beta)}$ 之间存在的关系见式(9.5.9)。因此凡是由 $\mathbf{D}^e$, $\mathbf{D}^p$ 计算出来的量，也都依赖于卸载构形的选择。利用(9.5.9)式容易验证，(9.5.12)与(9.5.13)式涉及的各几何量对卸载构形的依赖关系分以下几种类型：

(1) 不依赖于卸载构形的选择，我们称这些量是 β-不变的。

$$\mathbf{C}^p_{(\beta)} = \mathbf{C}^p, \quad \mathbf{U}^p_{(\beta)} = \mathbf{U}^p, \quad \mathbf{E}^p_{(\beta)} = \mathbf{E}^p \tag{9.5.22}$$

$$\mathbf{B}^e_{(\beta)} = \mathbf{B}^e, \quad \mathbf{V}^e_{(\beta)} = \mathbf{V}^e, \quad \mathbf{e}^e_{(\beta)} = \mathbf{e}^e \tag{9.5.23}$$

(9.5.22)式的各几何量都是在参考构形 $\mathscr{R}$ 中的张量，而(9.5.23)式的各几何量则都是在即时构形 κ 中的张量。

(2) 按照类似于客观张量的标架转换关系(5.2.13)式的形式而依赖于卸载构形的选择。我们称这些量是 β-客观的。例如：

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^e_{(\beta)} &= \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{C}^e\cdot\boldsymbol{\beta}^*, \quad \mathbf{E}^e_{(\beta)} = \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E}^e\cdot\boldsymbol{\beta}^* \\ \mathbf{B}^p_{(\beta)} &= \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B}^p\cdot\boldsymbol{\beta}^*, \quad \mathbf{e}^p_{(\beta)} = \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e}^p\cdot\boldsymbol{\beta}^*\end{aligned} \tag{9.5.24}$$

(9.5.24)式中涉及的都是卸载构形 $\kappa_{(\beta)}$ 或 κ 中的张量。

但是必须注意，(9.5.24)的形式虽然与客观张量的标架转换关系(5.2.13)式相似，但是这里卸载构形的选择问题和第五章的标架转换问题是完全不相同的两回事，有的文献(例如[52])却把它们混淆起来，因而得到不恰当的结论。

(3) 两点张量：按照类似于客观矢量的标架转换关系(5.2.7)式的形式而依赖于卸载构形的选择。属于(9.5.9)$_2$ 式 $\mathbf{D}^p$ 类型的有：

$$\mathbf{D}^p_{(\beta)} = \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{D}^p,\ \ \mathbf{R}^p_{(\beta)} = \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}^p \tag{9.5.25}$$

它们都是两点张量，前矢量在卸载构形 $\kappa_{(\beta)}$ 或 κ 中，后矢量在参考构形 $\mathscr{R}$ 中。属于(9.5.9)$_1$ 式 $\mathbf{D}^e$ 类型的有

$$\mathbf{D}^e_{(\beta)} = \mathbf{D}^e\cdot\boldsymbol{\beta}^*,\ \ \mathbf{R}^e_{(\beta)} = \mathbf{R}^e\cdot\boldsymbol{\beta}^* \tag{9.5.26}$$

它们是两点张量，前矢量在即时构形 $\boldsymbol{\kappa}$ 中，后矢量在卸载构形 $\kappa_{(\beta)}$ 或 κ 中。

以后我们还会遇到张量对时间的导数(物质导数)，它们一般也依赖于卸载构形的选择。现按上述三种类型分别讨论：

(1) β-不变张量

对于在参考构形$\mathscr{R}$中的β-不变张量 $\mathbf{H}$，如(9.5.22)式的 $\mathbf{C}^p$，$\mathbf{U}^p$，$\mathbf{E}^p$ 等，有

$$\dot{\mathbf{H}}_{(\beta)} = \dot{\mathbf{H}} \tag{9.5.27}$$

而对于在即时构形 $\boldsymbol{\kappa}$ 中的张量 $\mathbf{h}$，如(9.5.23)式的 $\mathbf{B}^e$，$\mathbf{V}^e$，$\mathbf{e}^e$ 等，同样有

$$\dot{\mathbf{h}}_{(\beta)} = \dot{\mathbf{h}} \tag{9.5.28}$$

但要指出，对于§5.2所研究的客观性来说，(9.5.27)与(9.5.28)的张量导数都不满足客观张量的标架转换关系(5.2.13)式。在 $\boldsymbol{\kappa}$ 构形中的张量 $\mathbf{h}$，如(9.5.23)式的 $\mathbf{B}^e$，$\mathbf{V}^e$，$\mathbf{e}^e$ 等，其客观导数有 Jaumann 导数 $\mathring{\mathbf{h}}$ (见(5.2.41)式)，广义 Jaumann 导数 $\hat{\mathbf{h}}$ (见

(5.2.54)式)等:

$$\begin{aligned}\overset{\cdot}{\mathbf{h}}_{(\beta)} &= \overset{\cdot}{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{h}} - \mathbf{w}\cdot\mathbf{h} + \mathbf{h}\cdot\mathbf{w} \\ \hat{\mathbf{h}}_{(\beta)} &= \hat{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{h}} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{h} + \mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\Omega}\end{aligned} \tag{9.5.29}$$

(2) β-客观张量

对于在卸载构形 $\kappa_{(\beta)}$ 中或 κ 中的 β-客观张量 $\underset{*}{\mathbf{h}}$,例如(9.5.24)的 $\mathbf{C}^e$, $\mathbf{E}^e$, $\mathbf{B}^p$, $\mathbf{e}^p$ 等,依赖于卸载构形的规律为

$$\underset{*}{\mathbf{h}}_{(\beta)} = \boldsymbol{\beta}\cdot\underset{*}{\mathbf{h}}\cdot\boldsymbol{\beta}^* \tag{9.5.30}$$

对时间 t 求导,可得

$$\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\underset{*}{\mathbf{h}}_{(\beta)} = \boldsymbol{\beta}\cdot\underset{*}{\dot{\mathbf{h}}}\cdot\boldsymbol{\beta}^* \tag{9.5.31}$$

式中

$$\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\underset{*}{\mathbf{h}}_{(\beta)} = \underset{*}{\dot{\mathbf{h}}}_{(\beta)} - \boldsymbol{\Omega}_{(\beta)}\cdot\underset{*}{\mathbf{h}}_{(\beta)} + \underset{*}{\mathbf{h}}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{\Omega}_{(\beta)} \tag{9.5.32}$$

称为 β-共旋导数, $\boldsymbol{\Omega}_{(\beta)}$ 表示 $\kappa_{(\beta)}$ 构形相对于 κ 构形的旋率(类似于(3.3.30)式)

$$\boldsymbol{\Omega}_{(\beta)} = \dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{\beta}^* \tag{9.5.33a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\Omega}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{\beta} \tag{9.5.33b}$$

显然,当 $\kappa_{(\beta)}$ 构形与 κ 构形重合时,(9.5.31)给出

$$\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\underset{*}{\mathbf{h}}_{(\beta)} = \underset{*}{\dot{\mathbf{h}}} \quad \text{当 } \boldsymbol{\beta} = \mathbf{I} \tag{9.5.31'}$$

由(9.5.31)式可知: β-客观张量的 β-共旋导数满足张量自身所满足的(9.5.30)式。当取 $\underset{*}{\mathbf{h}}$ 为 $\mathbf{C}^e$, $\mathbf{E}^e$, $\mathbf{B}^p$, $\mathbf{e}^p$ 时, (9.5.31) 式分别给出

$$\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{C}^e_{(\beta)} = \boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{C}}^e\cdot\boldsymbol{\beta}^*, \quad \frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{E}^e_{(\beta)} = \boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{E}}^e\cdot\boldsymbol{\beta}^*$$

$$\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{B}^{p}_{(\beta)} = \boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{B}}^{p}\cdot\boldsymbol{\beta}^{*},\quad \frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{e}^{p}_{(\beta)} = \boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{e}}^{p}\cdot\boldsymbol{\beta}^{*} \tag{9.5.34}$$

(3) 两点张量

属于 $\mathbf{D}^{p}$ 类型的两点张量，满足以(9.5.25)式所示的对卸载构形的依赖规律，对于这一类型的张量可证

$$\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^{p}_{(\beta)} \equiv \dot{\mathbf{D}}^{p}_{(\beta)} - \boldsymbol{\Omega}_{(\beta)}\cdot\mathbf{D}^{p}_{(\beta)} = \boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{D}}^{p} \tag{9.5.35a}$$

也就是说，按上式所定义的 $\mathbf{D}^{p}_{(\beta)}$ 的 β-共旋导数满足与(9.5.25)本身类似的关系。

$\mathbf{D}^{e}$ 类型的两点张量，满足如(9.5.26)所示的对卸载构形的依赖规律，对于这一类张量可证

$$\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^{e}_{(\beta)} \equiv \dot{\mathbf{D}}^{e}_{(\beta)} + \mathbf{D}^{e}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{\Omega}_{(\beta)} = \dot{\mathbf{D}}^{e}\cdot\boldsymbol{\beta}^{*} \tag{9.5.35b}$$

这说明，按上式所定义的 $\mathbf{D}^{e}_{(\beta)}$ 的 β-共旋导数满足与(9.5.26)本身类似的规律。

(9.5.27)与(9.5.28)式启发我们，也可以把 β-不变张量的 β-共旋导数定义成张量的物质导数本身。也即，不同类型张量的 β-共旋导数的定义式(如(9.5.32)，(9.5.35a)，(9.5.35b))是不同的。

现在来讨论弹性速度梯度 $\mathbf{L}^{e}$、塑性速度梯度 $\mathbf{L}^{p}$（见(9.5.17)式）对卸载构形选择的依赖性。先来讨论 $\mathbf{L}^{e}$。将(9.5.9)$_1$ 第一式，代入(9.5.17)$_1$，得

$$\mathbf{L}^{e}_{(\beta)} = \dot{\mathbf{D}}^{e}_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e}_{(\beta)} = (\mathbf{D}^{e}\cdot\boldsymbol{\beta}^{*})^{\cdot}\cdot(\mathbf{D}^{e}\cdot\boldsymbol{\beta}^{*})^{-1} \tag{9.5.36}$$

利用(9.3.33b)，上式可整理成

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{e}_{(\beta)} &= \dot{\mathbf{D}}^{e}_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e}_{(\beta)} = (\dot{\mathbf{D}}^{e}\cdot\boldsymbol{\beta}^{*} - \mathbf{D}^{e}\cdot\boldsymbol{\beta}^{*}\cdot\boldsymbol{\Omega}_{(\beta)})\cdot(\mathbf{D}^{e}\cdot\boldsymbol{\beta}^{*})^{-1}\\ &= \mathbf{L}^{e} - \mathbf{D}^{e}\cdot\boldsymbol{\beta}^{*}\cdot\boldsymbol{\Omega}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{\beta}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e}\end{aligned} \tag{9.5.37}$$

因此，$\mathbf{L}^{e}_{(\beta)}$虽然是在即时构形 κ 中的张量，但是它不具有如(9.5.23)

式所表示的 β-不变性。由上式容易看出：

$$\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^e_{(\beta)}\right)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e_{(\beta)}=\dot{\mathbf{D}}^e\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e=\mathbf{L}^e \qquad (9.5.38)$$

这说明，如果把 $\dot{\mathbf{D}}^e_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e_{(\beta)}$ 中的 $\dot{\mathbf{D}}^e_{(\beta)}$ 改为 β-共旋导数 (9.5.35b) 式，则所得结果(9.5.38)式左端是 β-不变的。

其次，讨论 $\mathbf{L}^p$。类似于(9.5.36)，利用(9.5.9)$_2$，(9.5.17)$_2$ 可得

$$\mathbf{L}^p_{(\beta)}=\dot{\mathbf{D}}^p_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^p_{(\beta)}=(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{D}^p)^{\cdot}\cdot(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{D}^p)^{-1} \qquad (9.5.39)$$

利用(9.5.33b)，上式可整理成

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^p_{(\beta)}&=\dot{\mathbf{D}}^p_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^p_{(\beta)}=(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{D}}^p+\boldsymbol{\Omega}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{D}^p)\cdot(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{D}^p)^{-1}\\&=\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}^p\cdot\boldsymbol{\beta}^*+\boldsymbol{\Omega}_{(\beta)} \qquad (9.5.40)\end{aligned}$$

因此，$\mathbf{L}^p_{(\beta)}$ 虽然是在卸载构形 $\kappa_{(\beta)}$ 中的张量，但是它不具有如(9.5.24)所表示的 β-客观性。由上式容易看出：

$$\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^p_{(\beta)}\right)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^p_{(\beta)}=\boldsymbol{\beta}\cdot(\dot{\mathbf{D}}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^p)\cdot\boldsymbol{\beta}^*=\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}^p\cdot\boldsymbol{\beta}^* \qquad (9.5.41)$$

这说明，如果把 $\dot{\mathbf{D}}^p_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^p_{(\beta)}$ 中的 $\dot{\mathbf{D}}^p_{(\beta)}$ 改为 β-共旋导数 (9.5.35a)，则所得结果(9.5.41)式左端是 β-客观的。

最后，讨论 $\mathbf{L}$。由(9.5.8)′，(9.5.16)与(9.5.18)式，可知

$$\begin{aligned}\mathbf{L}&=\dot{\mathbf{D}}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}=\mathbf{L}^e+\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{L}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e\\&=\dot{\mathbf{D}}^e\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e+\mathbf{D}^e\cdot\dot{\mathbf{D}}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e \qquad (9.5.42a)\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\mathbf{L}&=\mathbf{L}^e_{(\beta)}+\mathbf{D}^e_{(\beta)}\cdot\mathbf{L}^p_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e_{(\beta)}\\&=\dot{\mathbf{D}}^e_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e_{(\beta)}+\mathbf{D}^e_{(\beta)}\cdot\dot{\mathbf{D}}^p_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^p_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e_{(\beta)} \qquad (9.5.42b)\end{aligned}$$

将(9.5.35a,b)用于(9.5.42a)右容易证明，在(9.5.42a)式中，如果把 $\mathbf{D}^e$ 和 $\mathbf{D}^p$ 分别改为 $\mathbf{D}^e_{(\beta)}$ 和 $\mathbf{D}^p_{(\beta)}$，而 $\dot{\mathbf{D}}^e$ 和 $\dot{\mathbf{D}}^p$ 分别改成它们的 β-

共旋导数，等式仍然成立，即

$$\mathbf{L}=\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^{e}_{(\beta)}\right)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e}_{(\beta)}+\mathbf{D}^{e}_{(\beta)}\cdot\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^{p}_{(\beta)}\right)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{p}_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e}_{(\beta)}\tag{9.5.43}$$

由(9.5.38)，上式右端第一项具有 β-不变性。利用(9.5.9)第一式与(9.5.41)易证(9.4.43)右端第二项也具有 β-不变性，即

$$\mathbf{D}^{e}_{(\beta)}\cdot\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^{p}_{(\beta)}\right)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{p}_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e}_{(\beta)}$$

$$=\mathbf{D}^{e}\cdot\dot{\mathbf{D}}^{p}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{p}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e}=\mathbf{D}^{e}\cdot\mathbf{L}^{p}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e}\tag{9.5.44}$$

习题 9.1 证明

$$\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^{e}_{(\beta)}\right)\cdot\mathbf{D}^{p}_{(\beta)}\text{ 与 }\mathbf{D}^{e}_{(\beta)}\cdot\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^{p}_{(\beta)}\right)$$

具有 β-不变性。

五、热力学研究

由热力学第二定律的不等式(4.9.10)与(4.9.11)：

$$\theta\gamma=\frac{1}{\rho}\mathbf{t}:\mathbf{d}-(\dot{\psi}+\eta\dot{\theta})-\frac{1}{\rho\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\boldsymbol{\nabla})$$

$$=\theta\gamma_{\rm int}+\theta\gamma_{\rm th}\geqslant 0\tag{9.5.45}$$

式中

$$\theta\gamma_{\rm int}=\frac{1}{\rho}\mathbf{t}:\mathbf{d}-(\dot{\psi}+\eta\dot{\theta})$$

$$\theta\gamma_{\rm th}=-\frac{1}{\rho\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\boldsymbol{\nabla})\tag{9.5.46}$$

以下将(9.5.46)式中的比变形功率(每单位质量的变形功率) $\mathbf{t}:\mathbf{d}/\rho$ 改用以 $\kappa_{(\beta)}$ 为参考构形的第二类 Piola-Kirchhoff 应力 $\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}$ 表示。当 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{I}$ 时，卸载构形 $\kappa_{(\beta)}$ 就成为 κ，$\underset{*}{T}_{(\beta)}$ 成为 $\underset{*}{T}$。

由(4.5.11)，(4.5.13)，以 $\mathscr{K}$ 为参考构形的第二类 Piola-

Kirchhoff 应力张量 $\mathbf{T}$ 与 Cauchy 应力张量 $\mathbf{t}$ 之间的关系为

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\mathbf{t} &= \mathbf{D}\cdot\frac{1}{\rho_0}\mathbf{T}\cdot\mathbf{D}^* \\
\frac{1}{\rho_0}\mathbf{T} &= \overset{-1}{\mathbf{D}}\cdot\frac{1}{\rho}\mathbf{t}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^*
\end{aligned}
\tag{9.5.47}
$$

若用 $\rho_{*(\beta)}$ 表示 $\kappa_{(\beta)}$ 构形的密度，则仿照上式有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\mathbf{t} &= \mathbf{D}^e_{(\beta)}\cdot\frac{1}{\rho_{*(\beta)}}\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}\cdot\mathbf{D}^{e*}_{(\beta)} \\
\frac{1}{\rho_{*(\beta)}}\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)} &= \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e_{(\beta)}\cdot\frac{1}{\rho}\mathbf{t}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e*}_{(\beta)}
\end{aligned}
\tag{9.5.48a}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\mathbf{t} &= \mathbf{D}^e\cdot\frac{1}{\rho_*}\underset{*}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D}^{e*} \\
\frac{1}{\rho_*}\underset{*}{\mathbf{T}} &= \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e\cdot\frac{1}{\rho}\mathbf{t}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e*}
\end{aligned}
\tag{9.5.48b}
$$

因为卸载构形 $\kappa_{(\beta)}$ 与 κ 只相差一个转动(以正交张量 β 代表)，故它们的密度相等:

$$
\rho_{*(\beta)} = \rho_* \tag{9.5.49}
$$

利用(9.5.48a、b)及 $\mathbf{D}^e_{(\beta)}$ 与 $\mathbf{D}^e$ 关系式$(9.5.9)_1$(或$(9.5.26)_1$)，可以证明 $\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}$ 为 β-客观，满足(9.5.30)型的关系:

$$
\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)} = \boldsymbol{\beta}\cdot\underset{*}{\mathbf{T}}\cdot\boldsymbol{\beta}^* \tag{9.5.50}
$$

利用 $\mathbf{t}$ 的对称性及(9.5.38)，(9.5.43)，(9.5.44)式，可得比变形功率

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_0}w &= \frac{1}{\rho}\mathbf{t}:\mathbf{d} = \frac{1}{\rho}\mathbf{t}:\mathbf{L} = \frac{1}{\rho}\mathbf{t}:(\mathbf{L}^e + \mathbf{D}^e\cdot\mathbf{L}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e) \\
&= \frac{1}{\rho}\mathbf{t}:[\dot{\mathbf{D}}^e\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e + \mathbf{D}^e\cdot\dot{\mathbf{D}}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e] \\
&= \frac{1}{\rho}\mathbf{t}:\Big[\Big(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^e_{(\beta)}\Big)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e_{(\beta)} \\
&\quad + \mathbf{D}^e_{(\beta)}\cdot\Big(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^p_{(\beta)}\Big)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^p_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e_{(\beta)}\Big]
\end{aligned}
\tag{9.5.51}
$$

式中w表示构形$\mathscr{R}$每单位体积的变形功率(见(4.8.15)式)。可把上式的比变形功率分成两部分之和:

$$\frac{1}{\rho_0} w = \frac{1}{\rho} \mathbf{t}:\mathbf{d} = \frac{1}{\rho_0} w^e + \frac{1}{\rho_0} w^p \tag{9.5.52}$$

即弹性部分①:

$$\frac{1}{\rho_0} w^e = \frac{1}{\rho} \mathbf{t}:\mathbf{L}^e = \frac{1}{\rho} \mathbf{t}:(\dot{\mathbf{D}}^e \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}^e})$$
$$= \frac{1}{\rho} \mathbf{t}:\left[\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t} \mathbf{D}^e_{(\beta)}\right) \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e_{(\beta)}\right] \tag{9.5.53a}$$

与塑性部分:

$$\frac{1}{\rho_0} w^p = \frac{1}{\rho} \mathbf{t}:(\mathbf{D}^e \cdot \mathbf{L}^p \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}^e}) = \frac{1}{\rho} \mathbf{t}:(\mathbf{D}^e \cdot \dot{\mathbf{D}}^p \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}^p} \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}^e})$$
$$= \frac{1}{\rho} \mathbf{t}:\left[\mathbf{D}^e_{(\beta)} \cdot \left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t} \mathbf{D}^p_{(\beta)}\right) \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^p_{(\beta)} \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e_{(\beta)}\right] \tag{9.5.53b}$$

现在分别化简以上两式。先化简(9.5.53a)式。利用$\mathbf{t}$的对称性和(9.5.17)$_1$式,(9.5.53a)式可写作

$$\frac{1}{\rho_0} w^e = \frac{1}{\rho} \mathbf{t}:\mathbf{L}^e = \frac{1}{\rho} \mathbf{t}:\mathbf{d}^e \tag{9.5.54}$$

式中

$$\mathbf{d}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^e + \mathbf{L}^{e*}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{D}}^e \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}^e} + \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e*} \cdot \dot{\mathbf{D}}^{e*})$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathscr{D}(\beta)}{\mathscr{D}t} \mathbf{D}^e_{(\beta)}\right) \cdot \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e_{(\beta)} + \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e*}_{(\beta)} \cdot \left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t} \mathbf{D}^e_{(\beta)}\right)^*\right] \tag{9.5.55}$$

由(9.5.12b)$_1$与(9.5.13a)$_1$

$$\mathbf{E}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{D}^{e*} \cdot \mathbf{D}^e - \mathbf{I})$$

---

① 注意 $\frac{1}{\rho_0} w^e = \frac{1}{\rho} \mathbf{t}:\mathbf{L}^e \neq \frac{1}{\rho} \mathbf{t}:\mathbf{L}^e_{(\beta)}$

对时间求导，并利用(9.5.17)$_1$式，可得

$$\dot{\mathbf{E}}^e=\mathbf{D}^{e*}\cdot\mathbf{d}^e\cdot\mathbf{D}^e$$
$$\mathbf{d}^e=\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e*}\cdot\dot{\mathbf{E}}^e\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^e \tag{9.5.56}$$

(9.5.56)$_1$式也可以直接由(3.4.18)式取卸载构形κ为参考构形得到。将(9.5.48b)$_1$式 $\mathbf{t}/\rho$ 与(9.5.56)$_2$式 $\mathbf{d}^e$ 代入(9.5.54)式得

$$\frac{1}{\rho_0}w^e=\frac{1}{\rho}\mathbf{t}:\mathbf{d}^e=\frac{1}{\rho_*}\underset{*}{\mathbf{T}}:\dot{\mathbf{E}}^e \tag{9.5.57a}$$

上述等式也可以由(4.8.18)式得到。利用(9.5.34)第二式与(9.5.49)，(9.5.50)，又可把(9.5.57a)式写作

$$\frac{1}{\rho_0}w^e=\frac{1}{\rho_{*(\beta)}}\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}:\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{E}^e_{(\beta)} \tag{9.5.57b}$$

其次，化简(9.5.53b)式。将(9.5.48b)$_1$式 $\mathbf{t}/\rho$ 代入(9.5.53b)式的第一个等号右侧，化简后得到：

$$\frac{1}{\rho_0}w^p=\left(\mathbf{D}^{e*}\cdot\mathbf{D}^e\cdot\frac{1}{\rho_*}\underset{*}{\mathbf{T}}\right):\mathbf{L}^p$$
$$=\left(\mathbf{D}^{e*}\cdot\mathbf{D}^e\cdot\frac{1}{\rho_*}\underset{*}{\mathbf{T}}\right):(\dot{\mathbf{D}}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^p) \tag{9.5.58a}$$
$$=\left(\mathbf{D}^{e*}_{(\beta)}\cdot\mathbf{D}^e_{(\beta)}\cdot\frac{1}{\rho_{*(\beta)}}\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}\right):\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^p_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^p_{(\beta)}\right) \tag{9.5.58b}$$

(9.5.58b)右端进行双点积的两个张量都是β-客观的；利用(9.5.24)$_1$，(9.5.50)可证双点积符号前面的张量为β-客观，(9.5.41)说明双点积符号后面的张量为β-客观。

将(9.5.57)与(9.5.58)代入(9.5.52)，得：

$$\frac{1}{\rho_0}w=\frac{1}{\rho}\mathbf{t}:\mathbf{d}=\frac{1}{\rho_*}\left[\underset{*}{\mathbf{T}}:\dot{\mathbf{E}}^e+(\mathbf{D}^{e*}\cdot\mathbf{D}^e\cdot\underset{*}{\mathbf{T}}):(\dot{\mathbf{D}}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^p)\right] \tag{9.5.59a}$$

$$=\frac{1}{\rho_{*(\beta)}}\left[\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}:\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{E}^e_{(\beta)}+(\mathbf{D}^{e*}_{(\beta)}\cdot\mathbf{D}^e_{(\beta)}\cdot\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)})\right.$$

$$:\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^{p}_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^{p}_{(\beta)}}\right)\Big] \tag{9.5.59b}$$

(9.5.59)式实现了用卸载构形 κ 或 $\kappa_{(\beta)}$ 中的第二类Piola Kirchhoff 应力张量 $\underset{*}{\mathbf{T}}$ 或 $\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}$ 来表示比变形功率 $\mathbf{t}:\mathbf{d}/\rho$，并把它分成了弹、塑性两部分。以 $\dot{\mathbf{E}}^{e}$ 作为弹性变形率的度量，而塑性变形率则用塑性速度梯度 $\mathbf{L}^{p}=\dot{\mathbf{D}}^{p}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^{p}}$（见(9.5.17)式）度量。一般 $\mathbf{L}^{p}$ 不对称。

假设自由能的函数形式为

$$\psi=\psi(\mathbf{E}^{e},\boldsymbol{\alpha},\theta) \tag{9.5.60}$$

式中内变量 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示数个若干阶（包括零阶）的在卸载构形 κ 中的张量（包括标量）之集合。由(9.5.24)式，$\mathbf{E}^{e}$ 是 β-客观的；这里假定 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 β-客观的。例如，如果它是标量，则 $\alpha_{(\beta)}=\alpha$；如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矢量，则 $\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}$；如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是二阶张量，则 $\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}^{*}$。关于自由能 ψ 表达式中自变量的选择问题下文还将提到。有人提出，由于可直接量测的是总应变而不是弹性应变，所以应该用 $\mathbf{E}$ 作为自由能的状态自变量。但是不难证明，取 $\mathbf{E}^{e}$ 与取 $\mathbf{E}$ 为自变量所得的结果是一样的（见下文(9.5.85)式后面的证明）。由(9.5.60)式有：

$$\dot{\psi}=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{E}^{e}}:\dot{\mathbf{E}}^{e}+\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\odot\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\dot{\theta} \tag{9.5.61a}$$

式中视 $\boldsymbol{\alpha}$ 的阶数，$\odot$ 表示该阶数的点积（例如当 α 为标量时，$\odot$ 表示数乘；$\boldsymbol{\alpha}$ 为二阶张量时，$\odot$ 表示双点积）。利用 $\mathbf{E}^{e}_{(\beta)}$，$\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}$ 的 β-共旋导数的客观性（见(9.5.34)第二式），(9.5.61a)可写作

$$\dot{\psi}=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{E}^{e}_{(\beta)}}:\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{E}^{e}_{(\beta)}+\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}}\odot\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\dot{\theta} \tag{9.5.61b}$$

将(9.5.59a,b)和(9.5.61a,b)代入不等式(9.5.45)，得：

$$\theta\gamma=\left(\frac{1}{\rho_{*}}\underset{*}{\mathbf{T}}-\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{E}^{e}}\right):\dot{\mathbf{E}}^{e}-\left(\eta+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\dot{\theta}-\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\odot\dot{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$+\frac{1}{\rho_*}(\mathbf{D}^{e*}\cdot\mathbf{D}^e\cdot\underset{*}{\mathbf{T}}):(\dot{\mathbf{D}}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^p})-\frac{1}{\rho\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\nabla)\geqslant 0$$

(9.5.62a)

或即

$$\theta\gamma=\left(\frac{1}{\rho_{*(\beta)}}\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}-\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{E}^e_{(\beta)}}\right):\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{E}^e_{(\beta)}-\left(\eta+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\dot{\theta}$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}}\odot\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}+\frac{1}{\rho_{*(\beta)}}\left(\mathbf{D}^{e*}_{(\beta)}\cdot\mathbf{D}^e_{(\beta)}\cdot\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}\right):$$

$$\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^p_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^p_{(\beta)}}\right)-\frac{1}{\rho\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\nabla)\geqslant 0 \qquad (9.5.62b)$$

设(9.5.62)式中 $\dot{\mathbf{E}}^e$ (或 $\mathscr{D}_{(\beta)}\mathbf{E}^e_{(\beta)}/\mathscr{D}t$) 与 $\dot{\theta}$ 是可以任意独立变化的量。为了保证(9.5.62)不等式成立，必有

$$\eta=-\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad (9.5.63)$$

及

$$\frac{1}{\rho_*}\underset{*}{\mathbf{T}}=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{E}^e} \qquad (9.5.64a)$$

或即

$$\frac{1}{\rho_{*(\beta)}}\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{E}^e_{(\beta)}} \qquad (9.5.64b)$$

由于(9.5.63)与(9.5.64)式，(9.5.62)式成为

$$\theta\gamma=-\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\odot\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\frac{1}{\rho_*}(\mathbf{D}^{e*}\cdot\mathbf{D}^e\cdot\underset{*}{\mathbf{T}}):(\dot{\mathbf{D}}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^p})$$

$$-\frac{1}{\rho\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\nabla)\geqslant 0 \qquad (9.5.65a)$$

或即

$$\theta\gamma=-\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}}\odot\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}+\frac{1}{\rho_{*(\beta)}}(\mathbf{D}^{e*}_{(\beta)}\cdot\mathbf{D}^e_{(\beta)}\cdot\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}):$$

$$\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^p_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^p_{(\beta)}}\right)-\frac{1}{\rho\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\nabla)\geqslant 0 \qquad (9.5.65b)$$

通常要求内禀耗散 $\theta\gamma_{int}$ 与热耗散 $\theta\gamma_{th}$ 分别为正或零，故

$$\theta\gamma_{th} = -\frac{1}{\rho\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\nabla) \geqslant 0 \tag{9.5.66}$$

及

$$\theta\gamma_{int} = -\mathbf{A}\odot\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathscr{R}:(\dot{\mathbf{D}}^{p}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^{p}}) \geqslant 0 \tag{9.5.67a}$$

或即

$$\theta\gamma_{int} = -\mathbf{A}_{(\beta)}\cdot\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)} + \mathscr{R}_{(\beta)}:\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^{p}_{(\beta)}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^{p}_{(\beta)}}\right) \geqslant 0 \tag{9.5.67b}$$

式中利用了以下的定义式：

$$\mathbf{A} = \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\alpha}} \qquad \mathbf{A}_{(\beta)} = \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}} \tag{9.5.68a,b}$$

$$\mathscr{R} = \frac{1}{\rho_*}(\mathbf{D}^{e*}\cdot\mathbf{D}^{e}\cdot\underset{*}{\mathbf{T}}) \tag{9.5.69a}$$

$$\mathscr{R}_{(\beta)} = \frac{1}{\rho_{*(\beta)}}(\mathbf{D}^{e*}_{(\beta)}\cdot\mathbf{D}^{e}_{(\beta)}\cdot\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}) \tag{9.5.69b}$$

$\mathbf{A}$，$\mathscr{R}$ 或 $\mathbf{A}_{(\beta)}$，$\mathscr{R}_{(\beta)}$ 称为广义力或热力学作用力。(9.5.67a，b)右端的第二项表示塑性变形耗散功率。由于 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ 与 $\mathbf{L}^{p} = \dot{\mathbf{D}}^{p}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^{p}}$ 不能同时任意指定，所以(9.5.67)式右端两项不能分开。

将(9.5.64)代入(9.5.69)，得

$$\mathscr{R} = \mathbf{C}^{e}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{E}^{e}} = (1+2\mathbf{E}^{e})\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{E}^{e}} \tag{9.5.70a}$$

$$\mathscr{R}_{(\beta)} = \mathbf{C}^{e}_{(\beta)}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{E}^{e}_{(\beta)}} = (1+2\mathbf{E}^{e}_{(\beta)})\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{E}^{e}_{(\beta)}} \tag{9.5.70b}$$

利用(9.5.48a，b)第二式，可将(9.5.69a，b)的 $\mathscr{R}$，$\mathscr{R}_{(\beta)}$ 通过 Cauchy 应力张量表示：

$$\mathscr{R} = \frac{1}{\rho}\mathbf{D}^{e*}\cdot\mathbf{t}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^{e*}} \tag{9.5.71a}$$

$$\mathscr{R}_{(\beta)} = \frac{1}{\rho} \mathbf{D}_{(\beta)}^{e*} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{D}_{(\beta)}^{e*-1} \tag{9.5.71b}$$

这样，由热力学第二定律不等式 (9.5.45) 我们得到了等式(9.5.63)和(9.5.64)以及两个不等式(9.5.66)和(9.5.67)。只要自由能 ψ 的函数已知,就可由(9.5.63)计算熵 η,由(9.5.64a)或(9.5.64b)计算卸载构形 κ 或 $\kappa_{(\beta)}$ 中的第二类 Piola-Kirchhoff 应力 $\underset{*}{\mathbf{T}}$ 或 $\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}$。

最后指出，ψ 的函数形式(9.5.60)是对于卸载构形 κ 而言的。由 (9.5.60) 也可以导出对于其他卸载构形 $\kappa_{(\beta)}$ 的 ψ 的函数形式，过程如下：利用 $\mathbf{E}^e_{(\beta)}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}$ 的 β-客观性(见(9.5.24)式)，$\mathbf{E}^e$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以通过 $\mathbf{E}^e_{(\beta)}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}$ 表示(设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为二阶张量):

$$\mathbf{E}^e = \boldsymbol{\beta}^* \cdot \mathbf{E}^e_{(\beta)} \cdot \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}^* \cdot \boldsymbol{\alpha}_{(\beta)} \cdot \boldsymbol{\beta} \tag{9.5.72}$$

将(9.5.72)代入(9.5.60)得

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\beta}^* \cdot \mathbf{E}^e_{(\beta)} \cdot \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}^* \cdot \boldsymbol{\alpha}_{(\beta)} \cdot \boldsymbol{\beta}, \theta) \tag{9.5.73}$$

这就是对于卸载构形 $\kappa_{(\beta)}$ 的 ψ 的函数形式①。上式也可写作

$$\psi = \psi_{(\beta)}(\mathbf{E}^e_{(\beta)}, \boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}, \theta) \tag{9.5.74a}$$

$$= \psi(\mathbf{E}^e_{(\beta)}, \boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}, \theta, \beta) \tag{9.5.74b}$$

ψ 的函数形式将因卸载构形 $\kappa_{(\beta)}$ 的不同而不同。在(9.5.74a)式中 β 当作参变量,而在(9.5.74b)中则 β 当作自变量,但它们都等于(9.5.73)式的右端。注意 ψ 与 $\psi_{(\beta)}$ 是自变量 $\mathbf{E}^e_{(\beta)}$, $\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}$, θ 的不同的函数,它们的关系是

$$\psi(\boldsymbol{\beta}^* \cdot \mathbf{E}^e_{(\beta)} \cdot \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}^* \cdot \boldsymbol{\alpha}_{(\beta)} \cdot \boldsymbol{\beta}, \theta) = \psi_{(\beta)}(\mathbf{E}^e_{(\beta)}, \boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}, \theta) \tag{9.5.75}$$

最后，讨论一下自由能 ψ 的函数形式问题。 Mandel[53] 和 Halphen 与 Nguyen[46] 选择的正是(9.5.60)式。更一般的形式是

---

① 若内变量为标量 α，则(9.5.73)式中的第二个变量应改为 $\alpha_{(\beta)} = \alpha$。

(9.5.74a)。在自由能函数的自变量中不直接出现塑性变形梯度 $\mathbf{D}^p_{(\beta)}$。我们也可以先假定自由能函数的形式为

$$\phi = \varphi_{(\beta)}(\mathbf{D}^e_{(\beta)}, \boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}, \theta) \qquad (9.5.76)$$

利用 PMI，当在即时构形 κ 中标架转换时，$\mathbf{D}^e_{(\beta)}$ 的标架转换关系为 (5.2.15)式，即

$$\mathbf{D}^{e\prime}_{(\beta)}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{D}^e_{(\beta)}(t) \qquad (9.5.77)$$

因此根据 PMI，(9.5.76)的函数 $\varphi_{(\beta)}$ 应满足

$$\phi = \varphi_{(\beta)}(\mathbf{D}^e_{(\beta)}, \boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}, \theta) = \varphi_{(\beta)}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}^e_{(\beta)}, \boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}, \theta) \quad (9.5.78)$$

设对 $\mathbf{D}^e_{(\beta)}$ 进行极分解的结果为

$$\mathbf{D}^e_{(\beta)} = \mathbf{R}^e_{(\beta)} \cdot \mathbf{U}^e_{(\beta)}$$

取 $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{e*}_{(\beta)}$，得到

$$\phi = \varphi_{(\beta)}(\mathbf{U}^e_{(\beta)}, \boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}, \theta) \qquad (9.5.79)$$

利用关系

$$\mathbf{U}^{e\,2}_{(\beta)} = \mathbf{I} + 2\mathbf{E}^e_{(\beta)}$$

(9.5.79)可写作

$$\phi = \psi_{(\beta)}(\mathbf{E}^e_{(\beta)}, \boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}, \theta)$$

即(9.5.74a)的形式。 Sidoroff[52] 和 Ting[53] 也假设(9.5.76)形式的 ϕ，但未考虑内变量 $\boldsymbol{\alpha}$：

$$\phi = \phi(\mathbf{D}^e, \theta) \qquad (9.5.80)$$

但是 Sidoroff 却要求(9.5.80)的 ϕ 满足所谓 Γ-客观性，即

$$\phi = \phi(\mathbf{D}^e, \theta) = \phi(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}^e \cdot \boldsymbol{\beta}^*, \theta) \qquad (9.5.81)$$

式中 $\mathbf{Q}$ 来自于 κ 构形中的标架转换，$\boldsymbol{\beta}^*$ 来自于卸载构形的不唯一性(见(9.5.9)第一式)。设 $\mathbf{D}^e$ 的极分解式为(见(9.5.12a))

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{R}^e \cdot \mathbf{U}^e = \mathbf{V}^e \cdot \mathbf{R}^e \qquad (9.5.82)$$

先取 $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{e*}$，$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{I}$，然后取 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$，$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{R}^e$，可证

$$\phi(\mathbf{D}^e, \theta) = \phi(\mathbf{U}^e, \theta) = \phi(\mathbf{V}^e, \theta)$$

再取 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{Q}$，由(9.5.81)可证 ϕ 必为其第一个自变量的各向同性函数。这个结论显然是过份了，而且是不对的，因为 Sidoroff 在

(9.5.81) 式中把标架转换与卸载构形不唯一这两个不同的概念混淆起来了。文[55]讨论了这一问题，并指出了这一错误。

Lee 在[48]中取

$$\psi = \psi(\mathbf{C}^e, \theta)$$

这是和(9.5.80)一致的，是由(9.5.80)根据 PMI 所导致的结果。

Rice 在[43]中取

$$\psi = \psi(\mathbf{E}, \theta, \xi) \tag{9.5.83}$$

其中 $\mathbf{E}$ 为 Green 应变张量，ξ 表示一组内变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$。在[44]中 Rice 把 ξ 取作塑性状态参数 H。

Perzyna 在[45]中则建议：

$$\psi = \psi(\mathbf{C}, \theta, \theta\nabla, \alpha^{(i)}, A^{(i)}) \tag{9.5.84a}$$

并证明 ψ 与 $\theta\nabla$ 无关，式中 $\mathbf{C}$ 为右 Cauchy-Green 变形张量

$$\{\alpha^{(i)}, A^{(i)}\} = \{k, \mathbf{P}, \boldsymbol{\Gamma}^{(m)}\} \tag{9.5.84b}$$

其中 k 为硬化参数，$\boldsymbol{\Gamma}^{(m)}$ 为位错密度张量，$\boldsymbol{P}$ 为一个没有明确定义的塑性变形张量。由于考虑到 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{\Gamma}^{(m)}$ 之间有联系，Perzyna 假定 $\boldsymbol{\Gamma}^{(m)}$ 的变化率 $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^{(m)}$ 可以线性地通过塑性变形的变化率 $\mathbf{P}$ 表示，Perzyna 利用热力学第二定律不等式得到

$$\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\mathbf{T} = 2\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}} \tag{9.5.85}$$

其中第一式与前面的(9.5.63)相符。如果把 Perzyna 的 $\mathbf{P}$ 理解为可以由 $\mathbf{D}^p$ 计算出来的对称张量(例如 (9.5.12b) 的 $\mathbf{C}^p$)，则可以把(9.5.84a)写成(注意 (9.5.84b))：

$$\psi = \psi(\mathbf{C}, \theta, k, \mathbf{D}^p, \boldsymbol{\Gamma}^{(m)})$$

式中

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{D} = (\mathbf{D}^e \cdot \mathbf{D}^p)^* \cdot (\mathbf{D}^e \cdot \mathbf{D}^p) = \mathbf{D}^{p*} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{D}^p$$

利用等式

$$\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{C}}:d\mathbf{C}=\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{C}^e}:d\mathbf{C}^e$$

可得

$$\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{C}^e}=\mathbf{D}^p\cdot\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{C}}\cdot\mathbf{D}^{p*} \tag{9.5.86}$$

由卸载构形 κ 及参考构形 $\mathscr{R}$ 中第二类 Piola-Kirchhoff 应力的关系：

$$\frac{1}{\rho_*}\underset{*}{\mathbf{T}}=\mathbf{D}^p\cdot\frac{1}{\rho_0}\mathbf{T}\cdot\mathbf{D}^{p*}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\mathbf{T}=\overset{-1}{\mathbf{D}^p}\cdot\frac{1}{\rho_*}\underset{*}{\mathbf{T}}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^{p*}} \tag{9.5.87}$$

将 Perzyna 的(9.5.85)代入(9.5.87)第一式，并利用(9.5.86)，可得

$$\frac{1}{\rho_*}\underset{*}{\mathbf{T}}=2\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{C}^e}=\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{E}^e}$$

与(9.5.64a)相符。因此 Perzyna 采用 $\mathbf{C}$（不分成弹性与塑性）为自变量，得到与这里采用 $\mathbf{E}^e$(或 $\mathbf{C}^e$)为自变量相同的结果。

以上热力学的研究还不能给出塑性变形梯度 $\mathbf{D}^p$ 及内变量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的演化方程。这属于下一小节讨论的内容。

六、塑性变形梯度 $\mathbf{D}^p$ 与内变量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的演化

假设

$$\mathbf{L}^p=\dot{\mathbf{D}}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}^p}=\lambda\mathbf{H}(\underset{*}{\mathbf{T}},\boldsymbol{\alpha},\theta)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}=\lambda\boldsymbol{\zeta}(\underset{*}{\mathbf{T}},\boldsymbol{\alpha},\theta) \tag{9.5.88}$$

式中 $\mathbf{H}$ 与 $\boldsymbol{\zeta}$ 为材料函数，可由实验确定。λ 称为流动因子，其值待定，并规定 $\lambda\geqslant 0$。(9.5.88)等价于

$$\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^{p}_{(\beta)}\right)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{p}_{(\beta)}=\lambda\mathbf{H}_{(\beta)}(\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)},\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)},\theta)$$

$$\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}=\lambda\zeta_{(\beta)}(\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)},\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)},\theta) \tag{9.5.89}$$

注意(9.5.41)式与(9.5.31)式，可知(9.5.89)两式都具有 β-客观性，故

$$\mathbf{H}_{(\beta)}(\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)},\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)},\theta)=\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}^{*}\cdot\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}^{*}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{\beta},\theta)\cdot\boldsymbol{\beta}^{*}$$

$$\zeta_{(\beta)}(\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)},\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)},\theta)=\boldsymbol{\beta}\cdot\zeta(\overset{*}{\boldsymbol{\beta}}\cdot\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}^{*}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{\beta},\theta)\cdot\boldsymbol{\beta}^{*} \tag{9.5.90}$$

以上已假定内变量 $\boldsymbol{\alpha}$ 为具有 β-客观性的二阶张量。 如果内变量为标量 α（例如塑性硬化参数），则 $\alpha_{(\beta)}=\alpha$，上式应改为（参考(9.5.73)式下面的注，下文中各式亦有类似情况，不再赘述）：

$$\mathbf{H}_{(\beta)}(\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)},\alpha_{(\beta)},\theta)=\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}^{*}\cdot\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{\beta},\alpha_{(\beta)},\theta)\cdot\boldsymbol{\beta}^{*}$$

$$\zeta_{(\beta)}(\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)},\alpha_{(\beta)},\theta)=\zeta(\boldsymbol{\beta}^{*}\cdot\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{\beta},\alpha_{(\beta)},\theta) \tag{9.5.91}$$

假定材料屈服面为

$$f(\underset{*}{T},\boldsymbol{\alpha},\theta)=0 \tag{9.5.92a}$$

或即

$$f_{(\beta)}(\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)},\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)},\theta)=0 \tag{9.5.92b}$$

这里(参考(9.5.73)式下面的注)

$$f_{(\beta)}(\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)},\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}\text{ 或 }\alpha_{(\beta)},\theta)\equiv f(\boldsymbol{\beta}^{*}\cdot\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}^{*}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{\beta}\text{ 或 }\alpha_{(\beta)},\theta) \tag{9.5.93}$$

以下我们利用一致性条件确定流动因子 λ。由 (9.5.92a) 或 (9.5.92b)式，一致性条件可以写为：

$$\dot{f}(\underset{*}{\mathbf{T}},\boldsymbol{\alpha},\theta)=\frac{\partial f}{\partial\underset{*}{\mathbf{T}}}:\underset{*}{\dot{\mathbf{T}}}+\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\alpha}}:\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\dot{\theta}=0 \tag{9.5.94a}$$

或

$$\dot{f}_{(\beta)}(\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)},\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)},\theta)=\frac{\partial f_{(\beta)}}{\partial \underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}}:\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}\right)$$

$$+\frac{\partial f_{(\beta)}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}}:\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}\right)+\frac{\partial f_{(\beta)}}{\partial\theta}\dot{\theta}=0 \qquad (9.5.94b)$$

将(9.5.94)式中的量分为两部分。与状态的独立自变量 $\underset{*}{\mathbf{T}}$(或 $\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}$) 和 θ 的变化率有关的部分记作 λ,即

$$\lambda=\frac{\partial f}{\partial \underset{*}{\mathbf{T}}}:\dot{\underset{*}{\mathbf{T}}}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\dot{\theta} \qquad (9.5.95)$$

或

$$\lambda=\frac{\partial f_{(\beta)}}{\partial \underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}}:\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}\right)+\frac{\partial f_{(\beta)}}{\partial\theta}\dot{\theta}$$

与内变量的变化率有关的部分则记作 $\lambda\Lambda$:

$$\lambda\Lambda=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\alpha}}:\dot{\boldsymbol{\alpha}}\ \left(\text{或}\ \frac{\partial f_{(\beta)}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}}:\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}\right) \qquad (9.5.96)$$

利用(9.5.88)$_2$(或(9.5.89)$_2$),上式又可写为

$$\Lambda=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\alpha}}:\zeta\ \left(\text{或}\ \frac{\partial f_{(\beta)}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)}}:\zeta_{(\beta)}\right) \qquad (9.5.96)'$$

不失广泛性,可设 $\Lambda<0$①。将(9.5.95)和 (9.5.96) 代入(9.5.94a) (或(9.5.94b)),一致性条件化为

$$\lambda=-\frac{\lambda}{\Lambda} \qquad (9.5.97)$$

由(9.5.95)式,利用已知的应力率 $\dot{\underset{*}{\mathbf{T}}}\left(\text{或}\ \frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)}\right)$和温度率 $\dot{\theta}$ 计算 λ。若 $\lambda>0$,则由(9.5.97)式,λ 也大于零,属于塑性加载情

① 如果由(9.5.96)$'$算出的 $\Lambda>0$,则可用 $-f$(或 $-f_{(\beta)}$) = 0 作为屈服面方程代替原(9.5.92)式从而改变 $\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\alpha}}$ 的符号。因此,我们总可以使 $\Lambda<0$。

况。这时可由(9.5.96)′式计算 Λ 并由(9.5.97)得到 λ 值;若 $\bar{\lambda}\leqslant 0$,则为弹性卸载状态,此时应取 $\lambda=0$。由此可见,利用(9.5.97)式,也可按 $\bar{\lambda}$ 的符号区分加载与卸载。

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\text{塑性加载状态:} & \\
\lambda>0,\ \text{当}\ \bar{\lambda}>0, & \\
 & f(\underset{*}{\mathbf{T}},\boldsymbol{\alpha},\theta)=0 \\
\text{或} & f_{(\beta)}(\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)},\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)},\theta)=0 \\
\text{弹性卸载状态:} & \\
\lambda=0,\ \text{当}\ \bar{\lambda}\leqslant 0, & \\
 & f(\underset{*}{\mathbf{T}},\boldsymbol{\alpha},\theta)=0 \\
\text{或} & f_{(\beta)}(\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)},\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)},\theta)=0 \\
\text{以及当} & f(\underset{*}{\mathbf{T}},\boldsymbol{\alpha},\theta)<0 \\
\text{或} & f_{(\beta)}(\underset{*}{\mathbf{T}}_{(\beta)},\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)},\theta)<0
\end{array}
\right\}
\qquad (9.5.98)
$$

七、广义规范材料

如前所述,含内变量的本构关系是损伤力学理论的框架。但是,内变量 $\boldsymbol{\alpha}$ 有很大的选择余地。不同作者选择不同的损伤参数作为内变量,它可以是若干个标量,也可以是若干个不同阶数的张量。内变量也是一个场,在描写变形的物理过程中,它与应力、应变为平等的状态变量。由于和不考虑损伤时相比增加了状态变量 $\boldsymbol{\alpha}$,因此我们不仅需要知道应力和应变如何变化,还必须知道 $\boldsymbol{\alpha}$ 如何变化,也就是建立损伤演化方程。损伤演化方程是本构方程的一部分。Halphen 和 Nguyen[46] 提出一类材料,称为广义规范材料,它的演化方程可写为:

$$
\mathbf{L}^{p}=\dot{\mathbf{D}}^{p}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{p}=\lambda\mathbf{H}(\mathscr{R},\mathbf{A},\theta)
$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \lambda\boldsymbol{\zeta}(\mathscr{R},\mathbf{A},\theta) \tag{9.5.99}$$

或即

$$\left(\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\mathbf{D}^p_{(\beta)}\right)\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^p_{(\beta)} = \lambda\mathbf{H}_{(\beta)}(\mathscr{R}_{(\beta)},\mathbf{A}_{(\beta)},\theta)$$

$$\frac{\mathscr{D}_{(\beta)}}{\mathscr{D}t}\boldsymbol{\alpha}_{(\beta)} = \lambda\boldsymbol{\zeta}_{(\beta)}(\mathscr{R}_{(\beta)},\mathbf{A}_{(\beta)},\theta) \tag{9.5.100}$$

式中 $\mathbf{H}$ 和 $\boldsymbol{\zeta}$ 为材料函数，$\mathbf{H}_{(\beta)}$，$\boldsymbol{\zeta}_{(\beta)}$ 与 $\mathbf{H}$,$\boldsymbol{\zeta}$ 的关系类似于(9.5.90)式，λ 为流动因子。(9.5.100)两式都具有 β-客观性。不失广泛性，可规定 $\lambda \geqslant 0$ 。下面的推导只对卸载构形 κ 进行，对卸载构形 $\kappa_{(\beta)}$的相应公式不难仿照前两小节的方法写出。

由(9.5.99)式有:

$$\mathbf{d}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^p + \mathbf{L}^{p*}) = \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{H} + \mathbf{H}^*) \tag{9.5.101}$$

$$\mathbf{w}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^p - \mathbf{L}^{p*}) = \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{H} - \mathbf{H}^*)$$

如何选择 $\mathbf{H}$ 和 $\boldsymbol{\zeta}$ 的函数形式是一个很困难的问题。 Halphen 和 Nguyen[46] 假定 $\mathbf{L}^p$ 和 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ 有势，即存在势函数 $F = F(\mathscr{R},\mathbf{A},\theta)$ 使满足

$$\mathbf{H} = \frac{\partial F}{\partial \mathscr{R}},\ \boldsymbol{\zeta} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}} \tag{9.5.102}$$

假定势函数与加载函数一致(即假定关联法则)，则条件

$$F(\mathscr{R},\mathbf{A},\theta) = 0 \tag{9.5.103}$$

相当塑性力学中的屈服面方程。(9.5.102)式为含内变量情况的正交法则，称广义正交法则。 Halphen 和 Nguyen[46] 称满足广义正交法则的材料为广义规范材料。确定流动因子 λ 的过程（小变形情况可见[46]的 § 5.2）如下:

由(9.5.103)式，一致性条件可写为:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \mathscr{R}}:\dot{\mathscr{R}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}}:\dot{\mathbf{A}} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\dot{\theta} = 0 \tag{a}$$

由(9.5.68a)，

$$\mathbf{A}=\frac{\partial\phi(\mathbf{E}^e,\boldsymbol{\alpha},\theta)}{\partial\boldsymbol{\alpha}}$$

所以(a)式中的 $\dot{\mathbf{A}}$ 可表示为①

$$\dot{\mathbf{A}}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\cdot}=\frac{\partial^2\phi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\mathbf{E}^e}:\dot{\mathbf{E}}^e+\frac{\partial^2\phi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\,\partial\boldsymbol{\alpha}}:\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\,\theta}\dot{\theta} \qquad (b)$$

利用 (9.5.70a) 式 $\mathscr{R}=(\mathbf{I}+2\mathbf{E}^e)\cdot\dfrac{\partial\phi}{\partial\mathbf{E}^e}$ 可将 (b) 式中的 $\dot{\mathbf{E}}^e$ 用 $\dot{\mathscr{R}}$，$\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $\dot{\theta}$ 表示：

$$\dot{\mathscr{R}}=2\dot{\mathbf{E}}^e\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{E}^e}+(\mathbf{I}+2\mathbf{E}^e)\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{E}^e}\right)^{\cdot} \qquad (c)$$

其中

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{E}^e}\right)^{\cdot}=\frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{E}^e\partial\mathbf{E}^e}:\dot{\mathbf{E}}^e+\frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{E}^e\partial\boldsymbol{\alpha}}:\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{E}^e\partial\theta}\dot{\theta} \qquad (d)$$

将(d)代入(c)，经整理后得

$$2\dot{\mathbf{E}}^e\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{E}^e}+(\mathbf{I}+2\mathbf{E}^e)\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{E}^e\partial\mathbf{E}^e}:\dot{\mathbf{E}}^e$$

$$=\dot{\mathscr{R}}-(\mathbf{I}+2\mathbf{E}^e)\cdot\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{E}^e\partial\boldsymbol{\alpha}}:\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{E}^e\partial\theta}\dot{\theta}\right) \qquad (e)$$

(e)式又可写成

$$\mathbf{K}:\dot{\mathbf{E}}^e=\dot{\mathscr{R}}-(\mathbf{I}+2\mathbf{E}^e)\cdot\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{E}^e\partial\boldsymbol{\alpha}}:\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{E}^e\partial\theta}\dot{\theta}\right) \qquad (f)$$

式中 $\mathbf{K}$ 为四阶张量，在笛卡儿坐标中其分量为

$$K_{ijkl}=2\delta_{ik}\frac{\partial\phi}{\partial E^e_{lj}}+(\delta_{ir}+2E^e_{ir})\frac{\partial^2\phi}{\partial E^e_{rj}\partial E^e_{kl}}$$

---

① $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\mathbf{E}^e}=\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{E}^e}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\right)$，$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}}=\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\right)$，$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\theta}=\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\right)$，在笛卡儿坐标中 $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\mathbf{E}^e}:\dot{\mathbf{E}}^e=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\alpha_{ij}\partial E^e_{kl}}\dot{E}^e_{kl}$

(f) 式为 $\mathbf{E}^e$, $\mathscr{R}$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $\dot{\theta}$ 之间的线性关系式，可将 $\dot{\mathbf{E}}^e$ 解出，得到

$$\dot{\mathbf{E}}^e = \mathbf{W}:\left\{\dot{\mathscr{R}} - (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}^e)\cdot\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{E}^e\partial\boldsymbol{\alpha}}:\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{E}^e\partial\theta}\dot{\theta}\right)\right\} \quad (g)$$

其中 $\mathbf{W}$ 为 $\mathbf{K}$ 之逆：

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1},\ \text{即}\ W_{mnij}K_{ijkl} = \delta_{mk}\delta_{nl}$$

将(g)代回(b)：

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\mathbf{E}^e}:\mathbf{W}:\left\{\dot{\mathscr{R}} - (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}^e)\cdot\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{E}^e\partial\boldsymbol{\alpha}}:\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{E}^e\partial\theta}\dot{\theta}\right)\right\}$$

$$+ \frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}}:\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\theta}\dot{\theta} \quad (h)$$

(h)代入(a)并将含 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ 的项移到等号左侧，得

$$\frac{\partial F}{\partial\mathbf{A}}:\left\{-\frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\mathbf{E}^e}:\mathbf{W}:\left[(\mathbf{I} + 2\mathbf{E}^e)\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{E}^e\partial\boldsymbol{\alpha}}:\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right] + \frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}}:\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right\}$$

$$= -\left\{\frac{\partial F}{\partial\mathscr{R}}:\dot{\mathscr{R}} + \frac{\partial F}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial F}{\partial\mathbf{A}}:\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\mathbf{E}^e}:\mathbf{W}:\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(\dot{\mathscr{R}} - (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}^e)\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{E}^e\partial\theta}\dot{\theta}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\theta}\dot{\theta}\right]\right\} \quad (i)$$

将$(9.5.99)_2$式代入(i)式左并注意到$(9.5.102)$式，我们可将上式写为与$(9.5.97)$相同的形式：

$$\lambda = -\frac{\lambda}{\Lambda} \quad (j)$$

其中

$$\lambda = \frac{\partial F}{\partial\mathscr{R}}:\dot{\mathscr{R}} + \frac{\partial F}{\partial\theta}\dot{\theta}$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial\mathbf{A}}:\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\mathbf{E}^e}:\mathbf{W}:\left[\dot{\mathscr{R}} - (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}^e)\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{E}^e\partial\theta}\dot{\theta}\right]\right.$$

$$\left.+ \frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\theta}\dot{\theta}\right\} \quad (k)$$

$$\Lambda = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}}:\left\{-\frac{\partial^2\phi}{\partial \boldsymbol{\alpha}\partial \mathbf{E}^e}:\mathbf{W}:\left[(\mathbf{I}+2\mathbf{E}^e)\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial \mathbf{E}^e\partial \boldsymbol{\alpha}}:\left(-\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\phi}{\partial \boldsymbol{\alpha}\partial \boldsymbol{\alpha}}:\left(-\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}}\right)\right\} \tag{l}$$

如按(*l*)式计算出 $\lambda < 0$，则应令 $\lambda = 0$。

一般情况下广义力 $\mathscr{R}$ 为非对称张量。但在下述两种情况下 $\mathscr{R}$ 为对称张量或近似为对称张量：

(1) 材料在 κ 构形中是各向同性的

这时 Cauchy 应力 $\mathbf{t}$ 为 $\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{D}^{e*}$ 的各向同性函数[56]，$\mathbf{t}$ 与 $\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{D}^{e*}$ 具有相同的主方向，故

$$\mathbf{t} = (\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{D}^{e*})\cdot\mathbf{t}\cdot(\mathbf{D}^e\cdot\mathbf{D}^{e*})^{-1}$$

$$= \mathbf{D}^e\cdot\mathbf{D}^{e*}\cdot\mathbf{t}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e*}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e} = \mathbf{D}^e\cdot\rho\mathscr{R}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e}$$

上式最后一步利用了(9.5.71*a*)式。上式两端求转置并利用 $\mathbf{t}$ 的对称性，有(最后一步再利用(9.5.71*a*))

$$\mathbf{t}^* = (\mathbf{D}^e\cdot\rho\mathscr{R}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e})^* = \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e*}\cdot\rho\mathscr{R}^*\cdot\mathbf{D}^{e*} = \mathbf{t}$$

$$= \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e*}\cdot\rho\mathscr{R}\cdot\mathbf{D}^{e*}$$

故

$$\mathscr{R}^* = \mathscr{R}$$

(2) 小弹性变形情况

由 $\mathbf{D}^e$ 的极分解(见(9.5.82)式)，选择 $\mathbf{R}^e = \mathbf{I}$，这时有

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{V}^e = \mathbf{U}^e = (\mathbf{C}^e)^{1/2} = (\mathbf{I}+2\mathbf{E}^e)^{1/2} \approx \mathbf{I}+\mathbf{E}^e$$

因为假设弹性变形很小，故由上式 $\mathbf{D}^e \approx \mathbf{I}$。由(9.5.71*a*)式

$$\mathscr{R} = \mathbf{D}^{e*}\cdot\frac{1}{\rho}\mathbf{t}\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e*}$$

$$\mathscr{R}^* = \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e}\cdot\frac{1}{\rho}\mathbf{t}\cdot\mathbf{D}^e$$

因 $\mathbf{D}^e \approx \mathbf{I}$，故 $\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e} = \mathbf{D}^{e*} = \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{e*} = \mathbf{D}^e \approx \mathbf{I}$，由以上两式，利用

(9.5.48)，有

$$\mathscr{R}^* \approx \mathscr{R} \approx \frac{1}{\rho}\mathbf{t} \approx \frac{1}{\rho_*}\underset{*}{\mathbf{T}}$$

因此，对于以上两种情况，我们取 $\mathscr{R}$ 的对称化为广义力，可用 $\mathbf{\Sigma}$ 表示：

$$\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{2}(\mathscr{R} + \mathscr{R}^*) \approx \frac{1}{\rho}\mathbf{t} \approx \frac{1}{\rho_*}\underset{*}{\mathbf{T}} \approx \mathscr{R} \quad (9.5.104)$$

由上式和(9.5.64)

$$\mathscr{R} = \frac{1}{\rho}\mathbf{t} = \frac{1}{\rho_*}\underset{*}{\mathbf{T}} = \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{E}^e} \quad (9.5.105)$$

这时(9.5.103)可以写为

$$F\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{t}, \mathbf{A}, \theta\right) = 0 \quad (9.5.106)$$

$(9.5.102)_1$ 可写为

$$\mathbf{H} = \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{t}\right)}, \quad \mathbf{H}^* = \left(\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{t}\right)}\right)^* = \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{t}\right)} = \mathbf{H} \quad (9.5.107)$$

与 $\mathbf{\Sigma}$ 相应，取 $\mathbf{L}^p$ 的对称化 $\mathbf{d}^p$ 描述塑性变形，由 (9.5.107) 和 $(9.5.101)_1$ 有：

$$\mathbf{d}^p = \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{H} + \mathbf{H}^*) = \lambda\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{t}\right)} \quad (9.5.108a)$$

由$(9.5.99)_2$和$(9.5.102)_2$

$$\dot{\alpha} = -\lambda\frac{\partial F}{\partial\mathbf{A}} \quad (9.5.108b)$$

因此，在前述两种情况下广义规范材料的演化方程(9.5.99)可化为用势函数 F 表达的(9.5.108)式。(9.5.108a) 相当于经典的正交法则，(9.5.108b)为考虑内变量后对正交法则的扩充。

还有一些作者不喜欢在中间构形 κ 中讨论问题，而是在初始构形$\mathscr{R}$中讨论问题。他们采用以 $\mathscr{R}$ 为参考构形的第二类 Piola-Kirchhoff 应力 $\mathbf{T}$ 代替 $\underset{*}{\mathbf{T}}$。为强调以 $\mathscr{R}$ 为参考构形，把 $\mathbf{T}$ 记作 $\mathbf{T}_{(\mathscr{R})}$。这时 $\mathbf{T}_{(\mathscr{R})}$ 与 $\underset{*}{\mathbf{T}}$ 的关系见(9.5.87)。

广义规范材料只代表某一类材料，并非所有材料都符合广义规范材料的模型。Rice[45,44,57] 的研究结果表明，正交性的前提(见(9.5.102)式)并不总是正确的，只有当各种滑移机制的硬化互相独立而不存在交叉硬化时正交性才成立。

在大变形塑性理论中，人们感兴趣的问题是塑性应变率 $\dot{\mathbf{E}}^p$ 的函数形式。将(9.5.12b)$_1$ 代人(9.5.13a)$_1$ 得：

$$\mathbf{E}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{D}^{p*}\cdot\mathbf{D}^p - \mathbf{I}) \tag{9.5.109}$$

上式对时间求导得：

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{D}^{p*}\cdot\dot{\mathbf{D}}^p + \dot{\mathbf{D}}^{p*}\cdot\mathbf{D}^p)$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{D}^{p*}\cdot(\dot{\mathbf{D}}^p\cdot\overset{-1}{\mathbf{D}}{}^p + \overset{-1}{\mathbf{D}}{}^{p*}\cdot\dot{\mathbf{D}}^{p*})\cdot\mathbf{D}^p$$

利用(9.5.17)$_2$ 式，上式又可写为：

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \mathbf{D}^{p*}\cdot\mathbf{d}^p\cdot\mathbf{D}^p \tag{9.5.110}$$

式中 $\mathbf{d}^p$ 为塑性变形率。按照本节广义规范材料的模型，由(9.5.99)$_1$ 式有：

$$\mathbf{d}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^p + \mathbf{L}^{p*}) = \frac{1}{2}\lambda[\mathbf{H}(\mathscr{R},\mathbf{A},\theta)+\mathbf{H}^*(\mathscr{R},\mathbf{A},\theta)] \tag{9.5.111}$$

式中 $\mathscr{R}$ 与 $\mathbf{A}$ 各见(9.5.70a)与(9.5.68a)式。假设自由能 ϕ 的函数形式如(9.5.60)式，则(9.5.111)式可表达为

$$\mathbf{d}^p = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{E}^e,\boldsymbol{\alpha},\theta) \tag{9.5.112}$$

再考虑到(9.5.64)式,上式又可写作

$$\mathbf{d}^p = \lambda \mathbf{g}\left(\frac{1}{\rho_*} \underset{*}{\mathbf{T}},\ \boldsymbol{\alpha},\ \theta\right) \tag{9.5.113}$$

将上式代入(9.5.110),得

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \lambda \mathbf{D}^{p*} \cdot \mathbf{g}\left(\frac{1}{\rho_*} \underset{*}{\mathbf{T}},\ \boldsymbol{\alpha},\ \theta\right) \cdot \mathbf{D}^p \tag{9.5.114}$$

对 $\mathbf{D}^p$ 进行极分解:

$$\mathbf{D}^p = \mathbf{R}^p \cdot \mathbf{U}^p \tag{9.5.115}$$

式中

$$\mathbf{U}^p = (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}^p)^{1/2} \tag{9.5.116}$$

将(9.5.87),代入(9.5.114),并利用(9.5.115),得:

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \lambda \mathbf{U}^p \cdot \mathbf{R}^{p*} \cdot \mathbf{g}\left(\mathbf{R}^p \cdot \mathbf{U}^p \cdot \frac{1}{\rho_J} \mathbf{T}_{(\mathscr{R})} \cdot \mathbf{U}^p \cdot \mathbf{R}^{p*}, \boldsymbol{\alpha}, \theta\right) \cdot \mathbf{R}^p \cdot \mathbf{U}^p \tag{9.5.117}$$

如果材料在松弛构形 κ 中为各向同性,即(9.5.114)及(9.5.117)式中函数 $\mathbf{g}$ 为其第一自变量的各向同性函数,则(9.5.117)式可化为:

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \lambda \mathbf{U}^p \cdot \mathbf{g}\left(\mathbf{U}^p \cdot \frac{1}{\rho_J} \mathbf{T}_{(\mathscr{R})} \cdot \mathbf{U}^p, \boldsymbol{\alpha}, \theta\right) \cdot \mathbf{U}^p$$

利用(9.5.116),上式可写作

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \lambda \mathbf{B}(\mathbf{T}_{(\mathscr{R})}, \mathbf{E}^p, \boldsymbol{\alpha}, \theta) \tag{9.5.118}$$

所以,(9.5.118)式只适用于当材料在松弛构形 κ 中为各向同性的情况。 Green 与 Naghdi[51,50] 把(9.5.118)式当作大变形塑性理论的前提,并认为适用于一切材料。 Mandel[53] 指出了他们的这一错误。

八、考虑内变量的塑性本构关系之例

本节用一个例子说明广义flat范材料模型实际上包含经典的塑

に本构关系。假定材料无粘性。为简单起见，考虑小变形情况。这时应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 可加法分解为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \qquad (9.5.119)$$

为描写材料的塑性硬化特性，引入张量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和标量 p 作为内变量。与 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 p 功共轭的热力学作用力分别用张量 $\mathbf{A}$ 和标量 B 表示。$\mathbf{A}$ 表示背应力，B 表示屈服面的膨胀。$\boldsymbol{\alpha}$ 与 p 的物理意义暂时还不清楚，将由以后的(9.5.130)式阐明。令塑性势函数

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}, B) = J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}) - (\sigma_0 + B) \qquad (9.5.120)$$

式中 σ_0 为初始屈服应力。为简单起见，本小节中采用笛卡儿坐标。若采用 Mises 准则，式中

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}) &= \left[\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{A}'):(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{A}')\right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{2}{3}(\sigma'_{ij} - A'_{ij})(\sigma'_{ij} - A'_{ij})\right]^{1/2} \end{aligned} \qquad (9.5.121)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}'$ 与 $\mathbf{A}'$ 各为 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\mathbf{A}$ 的偏量，即

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad A'_{ij} = A_{ij} - \frac{1}{3}A_{kk}\delta_{ij} \qquad (9.5.122)$$

(9.5.121)式表明不考虑屈服面的旋转和形状变化。

设比自由能 ψ 为依赖下列自变量的函数(见(9.5.60)式)①：

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \theta, \boldsymbol{\alpha}, p) \qquad (9.5.123)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}:\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial\psi}{\partial p}\dot{p} \qquad (9.5.124)$$

这时热力学第二定律不等式(9.5.45)可写为：

$$\begin{aligned} \theta\gamma = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma}:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \Big(&\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}:\dot{\boldsymbol{\alpha}} \\ &+ \frac{\partial\psi}{\partial p}\dot{p}\Big) - \eta\dot{\theta} - \frac{1}{\rho\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\boldsymbol{\nabla}) \end{aligned}$$

① 也可以在(9.5.123)式 ψ 的自变量中加进温度梯度 $\theta\boldsymbol{\nabla}$，然后利用不等式(9.5.125)证明 ψ 与温度梯度无关。

$$= \left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}\right):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \left(\eta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)\dot{\theta} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$$

$$- \frac{\partial \phi}{\partial p}\dot{p} - \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\alpha}}:\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{1}{\rho\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\nabla) \geqslant 0 \qquad (9.5.125)$$

设 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ 和 θ 可自由变化，则有(参考(9.5.63)与(9.5.64)式)：

$$\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e},\ \eta = -\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \qquad (9.5.126a)$$

因为 $\mathbf{A}$ 和 B 分别为对应 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 p 的热力学作用力，故有：

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{A} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\alpha}},\ \frac{1}{\rho}B = \frac{\partial \phi}{\partial p} \qquad (9.5.126b)$$

注意(9.5.68a)式的$\mathbf{A}$相当于这里的 $\mathbf{A}/\rho$ 与 B/ρ，利用(9.5.126)，不等式(9.5.125)可重新写为

$$\rho\theta\gamma = \boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{A}:\dot{\boldsymbol{\alpha}} - B\dot{p} - \frac{1}{\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\nabla) \geqslant 0 \quad (9.5.127)$$

因为通常要求内禀耗散与热耗散同时非负，故

$$\begin{aligned}\rho\theta\gamma_{int} &= \boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{A}:\dot{\boldsymbol{\alpha}} - B\dot{p} \geqslant 0 \\ \rho\theta\gamma_{th} &= -\frac{1}{\theta}\mathbf{h}\cdot(\theta\nabla) \geqslant 0\end{aligned} \qquad (9.5.128)$$

假定材料为广义规范材料，这时由(9.5.108)，并利用(9.5.120)和(9.5.121)可写出(注意：这里的 λ 相当于(9.5.108)式中的 $\rho\lambda$)：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \lambda\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2}\lambda\frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{A}'}{J} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= -\lambda\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \\ \dot{p} &= -\lambda\frac{\partial F}{\partial B} = \lambda = \left(\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\right)^{1/2}\end{aligned} \qquad (9.5.129)$$

注意到弹性变形阶段内变量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 p 均为零，则由(9.5.129)后两式的积分可知，内变量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 p 的物理意义就是塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 和累积塑性变形 $\int \overline{d\varepsilon_p}$。

$$\alpha = \varepsilon^p,\quad p = \int d\bar{\varepsilon}_p = \int \left(\frac{2}{3} d\varepsilon^p_{ij} d\varepsilon^p_{ij}\right)^{1/2} \tag{9.5.130}$$

不难看出,(9.5.129)就是小变形情况下的 Prandtl-Reuss 方程。将(9.5.129)代入(9.5.128),得

$$\begin{aligned}\rho\theta\gamma_{\text{int}} &= \left[(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}) : \frac{3}{2}\frac{(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{A}')}{J} - B\right]\dot{p} \\ &= \left[\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{A}') : \frac{(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{A}')}{J} - B\right]\dot{p} \\ &= (F + \sigma_0)\dot{p} \geqslant 0 \end{aligned} \tag{9.5.131}$$

因为 $F = 0$, $\sigma_0 > 0$, $\dot{p} \geqslant 0$, 所以(9.5.131)不等式恒满足。

为求出全部本构关系还必须给出比自由能 ψ 的表达式。设每单位体积的自由能 $\rho\psi$ 可分为弹性部分与塑性部分之和:

$$\begin{aligned}\rho\psi &= \rho\psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \theta) + \rho\psi_p(\boldsymbol{\alpha}, p, \theta) \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \rho\psi_p(\boldsymbol{\alpha}, p, \theta)\end{aligned} \tag{9.5.132}$$

式中 $\mathbf{a}$ 为四阶弹性本构张量。又设 ψ_p 为内变量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的二次函数,则

$$\rho\psi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha} : \mathbf{b}(J(\boldsymbol{\alpha})) : \boldsymbol{\alpha} + \chi(p) \tag{9.5.133}$$

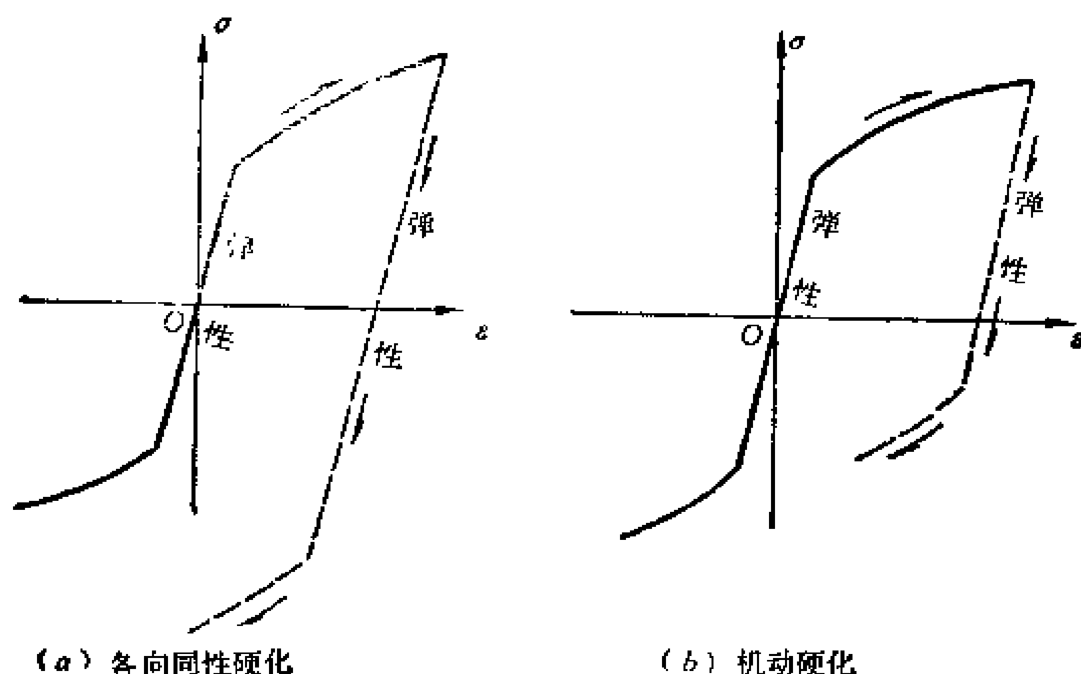
其中 $\mathbf{b}$ 也是一个四阶张量, $\mathbf{b}$ 是 $J(\boldsymbol{\alpha})$ 的函数($J(\boldsymbol{\alpha})$ 的定义同(9.5.121)式), χ 为 p 的标量函数。$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、χ 均可依赖温度 θ。将(9.5.133)代入(9.5.126b)得:

$$\mathbf{A} = \mathbf{b}(J(\boldsymbol{\alpha})) : \boldsymbol{\alpha} \tag{9.5.134a}$$

$$B = \frac{d\chi(p)}{dp} \tag{9.5.134b}$$

(9.5.134a) 给出屈服面中心 $\mathbf{A}$ 随着塑性变形变化的规律,而(9.5.134b)则给出硬化规律。这里得到的本构关系属于 Кадашевич 和 Новожилов[58] 所建议的混合硬化模型的类型。

单向应力状态时, $\boldsymbol{\alpha}$ 变为受力方向的塑性应变 ε^p, $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ 退化为标量,这时(9.5.134)式变为:



（a）各向同性硬化　　　　（b）机动硬化

图 9.15

$$A = b(J(\varepsilon^p))\varepsilon^p \qquad B = \chi'(p) \tag{9.5.135}$$

若取 $b(J(\varepsilon^p)) = 0$，$A = 0$，得到图 9.15(a)所示的各向同性硬化情况；若取 $\chi(p) = \text{const}$，则 $B = 0$，A 为 ε^p 的函数，得到图 9.15(b)所示的机动硬化情况。(9.5.135)式与拉压反向加载以及循环加载的试验结果不尽相符。Chaboche[59] 建议作某些修正。

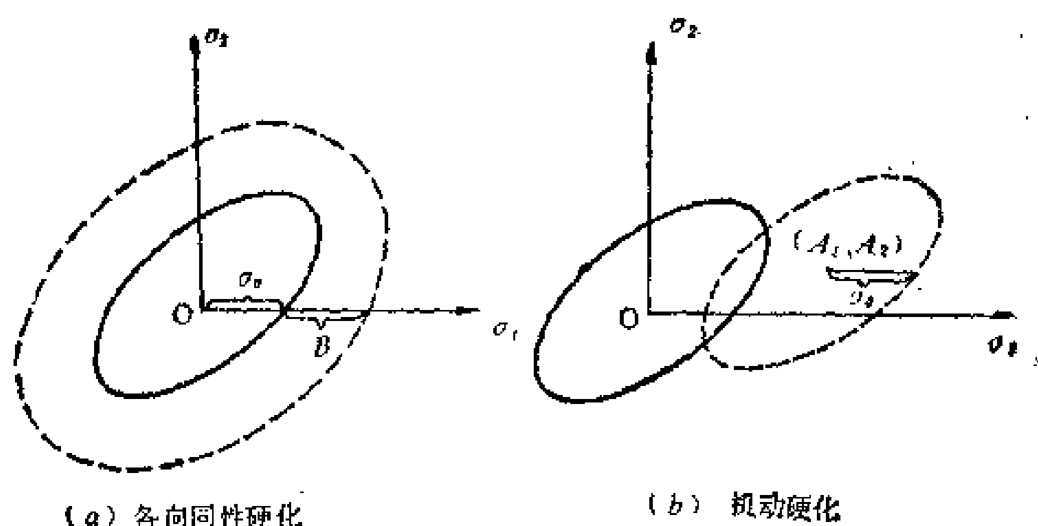
对于双向拉伸应力状态，当 $A = 0$ 时，由 (9.5.120) 和 (9.5.121)屈服面方程为 $\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} - (\sigma_0 + B) = 0$，是图 9.16($a$) 所表示的各向同性硬化情况；当 $B = 0$ 时屈服面方程为

$$\sqrt{(\sigma_1 - A_1)^2 - (\sigma_1 - A_1)(\sigma_2 - A_2) + (\sigma_2 - A_2)^2} - \sigma_0 = 0$$

代表图 9.16(b) 所表示的机动硬化情况。

由这个例子可知，完整的本构方程取决于屈服面(塑性势)函数F 和自由能函数ψ。状态变量($\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\alpha}, p$)的演化方程由(9.5.129)(或(9.5.108)式)取决于屈服面即塑性势函数 F；热力学作用力($\boldsymbol{\sigma}$,

A, B) 与状态变量($\varepsilon^e, \beta, \alpha, p$)的关系由 (9.5.126) (或(9.5.105), (9.5.68a)式)取决于自由能函数 ψ，两组方程相互耦合。



(a) 各向同性硬化　　　　(b) 机动硬化

图 9.16

Lamaitre 与 Chaboche[33,59,60,61,62] 以有效面积减缩率作为损伤参数，Rousselier[35] 采用密度减缩率作为损伤参数，建立了各自的损伤本构模型。他们的本构模型都属于广义规范材料的理论框架，而且内变量(损伤参数)都是标量。当前固体力学的重要发展方向之一是建立符合实际的、具有细观物理基础并考虑损伤的有限变形本构理论。而非线性连续介质力学正是解决这一问题的极其重要的研究工具。

参 考 文 献

[1] Marciniak. Z. and Kuczynski, K., Limit strain in the processes of stretch-forming sheet metal, Int. J. Mech. Sci., Vol. 9, 1967, pp. 609—620.

[2] Hutchinson, J. W., "Finite strain analysis of elastic-plastic solids and structures", in "Numerical Solution of Nonlinear Structural Problems", R. F. Hartung (ed.), ASME, 1973, pp. 17—29.

[3] 北川浩，数理弹塑性论，昭和 61 年 (1986)，大阪大学工学部机械工学科讲义.

[4] Tvergaard, V., Effect of kinematic hardening on localized *necking in biaxially* stretched sheets, Int. J. Mech. Sci., Vol. *20, 1978*, pp. *651—658*.

[5] Prager, W., A new method of analysing stress and strain in work-hardening plastic solids, J. Appl. Mech., Vol. 23, No. 4, 1956, pp. 493--496.

[6] Ziegler, H., A modification of Prager's hardening rule, Quart. Appl. Math., Vol. 17, 1959, pp. 55—65.

[7] Hill, R., A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 6, 1958, pp. 236—249.

[8] Hill, R., Some basic principles in the mechanics of solids without nature time, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 7, 1959, pp. 209—225.

[9] Hill, R., On the classical constitutive relations for elastic-plastic solids, in "Recent Progress in Applied Mechanics", Folke Odquist Volume, B Broberg, J. Hult and F. Niordsen (eds.), Almquist and Wiksell, Stockholm, 1967, pp. 241—249.

[10] Hill, R., Eigenmodal deformations in elasticplastic continua, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 15, 1967, pp. 371—386.

[11] Neale, K. W., A general variational theorem for the rate problem in elasto-plasticity, Int. J. Solids and structures, Vol. 8, 1972, pp. 865—876.

[12] Neale, K. W., On the application of a variational for large-displacement elastic-plastic problems, Proc. IUTAM Symp. on Variational Methods in the Mechanics of Solids, S. Nemat-Nasser, ed., Pergamon Press, 1978, pp. 374—377.

[13] Stören, S. and Rice, J. R., Localized necking in thin sheets, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 23, 1975, pp 421 -441.

[14] Needleman, A. and Tvergaard, V., Necking of biaxially stretched elastic-plastic circular plates, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 25, 1977, pp. 159—183.

[15] Hutchinson, J. W. and Neale, K. W., Sheet necking-II. Time-independent behavior, in "Mechanics of Sheet Metal Forming", D. P. Koistinen and N.-M. Wang (eds.), Plenum Press, 1978, pp. 127—153.

[16] Budiansky, B., A reassesment of deformation theories of plasticity, J. Appl. Mech., Vol. 26, 1959, pp. 259—264.

[17] Ильюшин, А. А., Пластичность, Гостехиздат, 1948.

[18] Hutchinson, J W., Plastic buckling, Adv. Appl. Mech., Vol. 14, 1974, pp. 67—144.

[19] Sanders, J. L., Plastic stress-strain relations based on linear loading functions, U. S. National Congress of Appl. Mech., 2nd, 1954, Proceedings, ed. by Paul M. Naghdi and others, pp. 455—460.

[20] Hill, R., The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 15, 1967, pp. 79—95.

[21] Hutchinson, J. W., Elastic-plastic behaviour of polycrystalline metals and composites, Proc. Roy. Soc. Lond., Vol. A319, 1970, pp. 247—272.

[22] Koiter, W. T., Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface, Quart. Appl. Math., Vol. 11, 1953, pp. 350.

[23] Phillips, A., Pointed Vertices in plasticity, in "Plasticity", Proceedings of the Second Symposium on Naval Structural Mechanics, Brown University, April 1960, edited by Lee, E. H. and Symonds, P. S., pp. 202—214, Pergamon Press, Oxford.

[24] Neale, K. W., Phenomenological constitutive laws in finite plasticity, SM Archives, Vol. 6, Issue 1, 1981, pp. 79—128.

[25] Hill, R., On constitutive inequalities for simple materials—I, II, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 16, 1968, pp. 229—242, 315—322.

[26] Hill, R., Constitutive inequalities for isotropic elastic solids under finite strain, Proc. Roy. Soc. Lond., Vol. A314, 1970, pp. 457—472.

[27] Christoffersen, J. and Hutchinson, J. W., A Class of phenomenological corner theories of plasticity, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 27, 1979, pp. 465—487.

[28] Rudnicki, J. W. and Rice, J. R., Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 23, 1975, pp. 371—394.

[29] Gurson, A. L., Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I—Yield criteria and flow rules for porous ductile media, J. Eng. Mater. Tech., Vol. 99, 1977, pp. 2—15.

[30] Needleman, A. and Rice, J. R., Limits to ductility set by plastic flow localization, in "Mechanics of Sheet Metal Forming", D. P. Koistinen and N.-M. Wang (eds.), Plenum Press, 1978, pp. 237—267.

[31] Качанов, А. М., О времени разрушения в условиях ползучести, Изв. Акад. Наук СССР, Отд. Техн. Наук, 1958, No. 8, pp. 26—31.

[32] Rabotnov, Y. N., Creep rapture, in "Applied Mechanics", Proceedings of the Twelfth International Congress of Applied Mechanics, Stanford University, August 26—31, 1968, Eds. by M. Hetenyi and W. G. Vincenti, pp. 342—349.

[33] Lemaitre, J. et Chaboche, J. L., Aspect phénomenologique de la rapture par endommagement, J. Méca. Appl., Vol. 2, No. 3, 1978, pp. 317—365.

[34] Westlund, R., Damage induced structural instability, Int. J. Non-Linear Mech., Vol. 14, 1979, pp. 149—161.

[35] Rousselier, G., Finite deformation constitutive relations including ductile fracture damage, in "Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture", Proceedings of the IUTAM Symposium on Three-Dimensional Constitutive Relation and Ductile Fracture, Dourdan, France, June, 2—5, 1980, Ed., S. Nemat-Nasser, pp. 331—355, North-Holland Pub. Company.

[36] Dragon, A. and Mroz, Z., A model plastic creep of rock-like materials accounting for the kinetics of fracture, Int. J. Rock. Mech., Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 16, 1979, pp. 253—259.

[37] Leckie, F. A. and Onat, E. T., Tensorial nature of damage measuring internal variables, in "Physical Non-Linearities in Structural Analysis", IUTAM Symposium, Senlis, France, May 27—30, 1980, Eds. by J. Hult and J. Lemaitre,

Springer-Verlag, 1981, pp. 140—155.

[38] Murakami, S. and Ohno, N., A continuum theory of creep and creep damage, in "Creep in Structures", IUTAM Symposium, Leicester, UK, 1980, Eds. A. R. S. Ponter and D. R. Hayhurst, Springer-Verlag, 1981, pp. 422—444.

[39] Cordebois, J and Sidoroff, F., Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité, J. Méca. Théor. Appl., No. Special, 1982, pp. 45—60.

[40] Kröner, E., Dislocation: A New concept in the continuum theory of plasticity, J. Math. Phys., Vol. 42, 1962, pp. 27—37.

[41] Kröner, E., Dislocation field theory, in "Theory of Crystal Defects", B. Gruber (ed.), 1966, pp. 231—256, Academic Press, New York.

[42] Kratochvil, J. and Dillion, O. W., Thermodynamics of elastic-plastic materials as a theory with internal state variables, J. Appl. Phys., Vol. 40, 1969, pp. 313—354.

[43] Rice, J. R., Inelastic constitutive relations for solids: An internal-variable theory and its application to metal plasticity, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 19, 1971, pp. 433—455.

[44] Rice, J. R., Continuum mechanics and thermodynamics of plasticity in relation to microscale deformation mechanics, in "Constitutive Equations in Plasticity", ed. A. S. Argon, Combridge, M. I. T. Press, 1975, pp. 23—79.

[45] Perzyna, P., Thermodynamics theory of viscoplasticity, Adv. in Appl. Mech., Vol. 11, 1971, pp. 313—354.

[46] Halphen, B. et Nguyen, Q. S., Sur les materiaux standards généralisés, Journal de Mécanique, Vol. 14, No. 1, 1975, pp. 39—63.

[47] Lemaitre, J. et Chaboche J. L., Mécanique des matériaux solids, Dunod, 1985.

[48] Lee, E. H., Elastic-Plastic deformation at finite strains, JAM, ASME, Vol. 36, 1969, pp. 1—6.

[49] Clifton, R. Jp., On the equivalence of F^pF^e and F^eF^p, J. Appl. Mech., ASME, Ser. E, 1972, pp. 287—289.

[50] Green, A. E. and Naghdi, P. M., Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strain, Int. J. Eng. Sci., Vol. 9, 1971, pp. 1219—1229.

[51] Green, A. E. and Naghdi, P. M., A general theory of an elastic-plastic continuum, Arch. Rational Mech. Analysis, Vol. 18, 1965, pp. 251—281.

[52] Sidoroff, F., The geometrical concept of intermediate configuration and elastic-plastic finite strain, Archives of Mechanics, Vol. 25, No. 2, Warszawa, 1973, pp. 299—308.

[53] Mandel, J., Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastique et viscoplastiques, Int. J. of Solids and Structures, Vol. 9, 1973, pp. 725—740.

[54] Ting, T. W., Topics in the mathematical theory of plasticity, in "Mechanics of Solids" Vol. III, 1984, pp. 535—590 ("Encyclopedia of Physics", Vol. VI a/3, 1973).

[55] 程莉，大变形弹塑性理论-关于本构理论的若干问题，清华大学博士论文，1988

年9月.
[56] 黄克智、薛明德、陆明万，张量分析，清华大学出版社，1986年.
[57] Kestin, J. and Rice, J. R., Paradoxes in the application of thermodynamics to strained solids, in "A Critical Review of Thermodynamics", ed. E. B. Stuart et al., pp 275—298, Mono Book Corp., 1970.
[58] Кадашевич, Ю. И., и Новожилов, В. В., Теория пластичности, Учитывающая остаточные микро-напряжения, Прикл. Мат. и Мех., Т. XXII, В. 1, 1958, пр. 78—89.
[59] Chaboche, J. L., Sur Lutilisation des variables d'état interne pour la descriptiondu comportement viscoplastique et de la rapture par endommagement, Communication Présentée au Symposium Franco-Pelanais de Phéologie et de Mécanique, Cracovie, 27 juin-2 juillet, 1977.
[60] Lemaitre, J., A continuous damage mechanics model for ductile fracture, J. Engng. Mat. Tech, Vol. 107, 1985, pp. 83—89.
[61] Lemaitre, J., How to use damage mechanics S. M. i. R. T. 7, Principal Division Lecture, Chicago, 1983. Nucl. Eng. Des., 4th Special Issue on SMiRT-7, Vol. 80, No. 2, July, 1984.
[62] Lemaitre, J. and Chaboche, J. L., Mécanique des matériaux solids, Dunod, 1985.

年9月.

[56] 黄克智、薛明德、陆明万，张量分析，清华大学出版社，1986年.

[57] Kestin, J. and Rice, J. R., Paradoxes in the application of thermodynamics to strained solids, in "A Critical Review of Thermodynamics", ed. E. B. Stuart et al., pp 275—298, Mono Book Corp., 1970.

[58] Кадашевич, Ю. И., и Новожилов, В. В., Теория пластичности, Учитывающая остаточные микро-напряжения, Прикл. Мат. и Мех., Т. XXII, В. 1, 1958, pp. 78—89.

[59] Chaboche, J. L., Sur Lutilisation des variables d'état interne pour la descriptiondu *comportement viscoplastique et de la rapture par* endommagement, Communication Présentée au Symposium Franco-Polanais de Phéologie et de Mécanique, Cracovie, 27 juin-2 juillet, 1977.

[60] Lemaitre, J., A continuous damage mechanics model for ductile fracture, J. Engng. Mat. Tech, Vol. 107, 1985, pp. 83—89.

[61] Lemaitre, J., How to use damage mechanics S. M. i. R. T. 7, Principal Division Lecture, Chicago, 1983. Nucl. Eng. Des., 4th Special Issue on SMiRT-7, Vol. 80, No. 2, July, 1984.

[62] Lemaitre, J. and Chaboche, J. L., Mécanique des matériaux solids, Dunod, 1985.